МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Курс лекций по классической дифференциальной геометрии

Лектор — Евгений Григорьевич Скляренко

II курс, 4 семестр, поток математиков

Москва, 2004 г.

Оглавление

Предисловие

Данное издание представляет собой улучшенный вариант лекций по дифференциальной геометрии, прочтённых автором курса в 2002 году и переведённых в электронный (MS Word) формат VILenin'ым. В отличие от первого издания, материал курса разбивается не по лекциям (тем более что в 2004 году это разбиение сильно изменилось), а по тематическим признакам. Основная цель, которая была поставлена при наборе этого текста, — это полная ликвидация ошибок в предыдущем издании. На данный момент их исправлено уже довольно много, причём зачастую это были не опечатки, возникающие иногда вне зависимости от нашего сознания, а весьма крупные неточности математического характера. Тут прежде всего хочется выразить благодарность проф. В. М. Мануйлову и некоторым студентам МехМата — М. Потериной, К. Никитину, В. Кубаеву, Ю. Малыхину и Ю. Притыкину — за поиск ошибок и помощь в уточнении доказательств ряда теорем, а также Ю. Кудряшову за советы по оформлению, TEX-ификации и прочим аспектам типографского набора.

В этой редакции Сергеем Шашковым (sh57@yandex.ru) внесены значительные изменения.

Конечно, сей документ ещё далёк от совершенства, поэтому не нужно воспринимать всё, что здесь написано (особенно в шестой главе про теорему об экспоненциальном отображении), как истину в последней инстанции. Читайте внимательно и старайтесь отличать обычные опечатки от по-настоящему неверных утверждений. Но в целом по сравнению с VILenin'ским опусом здесь лажи должно быть поменьше. Остаётся надеяться, что когда-нибудь удастся изничтожить её целиком и полностью, хотя проще, наверное, написать свой курс дифференциальной геометрии.

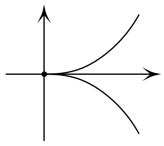
Последняя компиляция: 17 февраля 2006 г.
Обновления документа — на сайте http://dmvn.mexmat.net.
Об опечатках и неточностях пишите на dmvn@mccme.ru.

1. Введение. Основные понятия

1.1. Гладкие кривые

Гладкая кривая — одно из основных понятий нашего курса. Прежде, чем дать определение, рассмотрим прямую $r(t) = r_0 + \vec{v}t$, где $\vec{v} \neq 0$. Можно было бы определить кривую, например, так: гладкая кривая — это кривая, заданная системой

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{1}$$



где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — гладкие функции. Однако такое определение не годится: рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнениями $r(t) = \left(t^2, t^5\right)$. Мы видим, что в точке $t = 0$ эта кривая не гладкая.

Определение. Фигура $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ является *гладкой кривой*, если для любой точки на кривой найдётся такая окрестность этой точки, в которой γ можно задать гладкой функцией $r\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, и $v = \dot{r} \neq 0$ при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

В примере, написанном выше, имеем $\dot{r} = (2t, 5t^4)$ и $\dot{r}(0) = 0$, следовательно, кривая не гладкая.

Замечание. Гладкость кривой не зависит от системы координат, в которой она задана. Наше определение корректно, потому что в нём мы использовали только гладкость функции и то, что вектор скорости не равен нулю, а эти понятия от системы координат не зависят.

Определение. Вектор скорости кривой $\dot{r}(t)$ называется *касательным вектором.*

Посмотрим, что изменится, если мы в уравнении кривой сделаем замену переменной $t = t(\tau)$ и зададим кривую функцией $r = r(\tau)$.

Теорема 1.1. *Если параметризовать гладкую кривую $r = r(t)$ параметром τ, то $t = t(\tau)$ и $\tau = \tau(t)$ — гладкие функции.*

□ В определении гладкой кривой мы имеем, что вектор $v = \dot{r}(t) \neq 0$, и без ограничения общности можно считать, что $\dot{x}(t) \neq 0$. Значит, по теореме об обратной функции существует гладкая функция $t = t(x)$. Поскольку по определению гладкой кривой $x = x(\tau)$ также гладкая функция, то и их композиция $t = t(x) = t(x(\tau)) = t(\tau)$ тоже будет гладкой функцией. По симметричным соображениям $\tau = \tau(t)$ также будет гладкой. Покажем, что $t'_\tau \neq 0$. В самом деле, если бы это было так, то $\dot{x}(t) = \dot{x}(t(\tau))t'_\tau = 0$, а это противоречит условию $\dot{x}(t) \neq 0$. По теореме о производной обратной функции $t'_\tau = \frac{1}{\tau'_t}$. ■

Следствие 1.1. *Пусть v — касательный вектор кривой $r = r(t)$. Тогда касательный вектор при параметре τ будет равен $\widetilde{v}(t) = \dot{r}(t) = \dot{r}(t(\tau))t'_\tau$, т. е. будет коллинеарен вектору v.*

Определение. *Касательная прямая* к кривой $r = r(t)$ в точке t_0 — это прямая $l(t) = r(t_0) + \dot{r}(t_0)t$.

В силу следствия, касательная прямая не зависит от выбора параметризации, т. к. касательные вектора при разных параметризациях будут коллинеарны, и касательные прямые совпадут.

В дальнейшем через r_0 будем обозначать точку на кривой в момент времени t_0, а $\Delta r := r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$. Вектором v часто будем обозначать касательный вектор.

Теорема 1.2. *Расстояние от точек кривой до касательной является величиной 2-го порядка малости от Δt. Касательная прямая — это единственная прямая с таким свойством.*

□ Рассмотрим кривую $r = r(t)$. По формуле Тейлора имеем $\Delta r = v\Delta t + \widetilde{R}$, где $\widetilde{R}$ — члены ряда порядка $\geqslant 2$. Возьмем произвольную прямую $l(t) = r_0 + at$, где $|a| = 1$. Расстояние от точки $r_0 + \Delta r$ на кривой до прямой равно $\big|[a, \Delta r]\big| = \big|[a, v]\Delta t + [a, \widetilde{R}]\Delta t^2 + \ldots\big|$. Для того, чтобы это расстояние являлось величиной второго порядка малости от Δt, необходимо и достаточно, чтобы $[a, v] = 0$, т. е. вектора a и v коллинеарны. Но это и означает, что l задаёт касательную прямую. ■

1.2. Гладкие поверхности

Определение. *Гладкая поверхность* — это фигура, которая локально в каждой точке a_0 допускает описание гладкой функцией $r = r(u^1, u^2)$, где $r_0 = r(0, 0) = a_0$. При этом вектора $m_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}(0)$ и $m_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}(0)$ не коллинеарны. Заметим, что определение гладкой поверхности, как и гладкой кривой, не зависит от выбора системы координат.

В частности, плоскость задается гладкой функцией $r = r_0 + m_1u^1 + m_2u^2$, где m_1 и m_2 не коллинеарны.

Теорема 1.3. *Поверхность можно задать тремя эквивалентными способами:*

1. *Так, как в определении;*
2. *С помощью гладкой функции $z = f(x, y)$;*

3. С помощью гладкой неявной функции $F(x,y,z)$, для которой $\operatorname{grad} F \neq 0$.

$\square$ $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Напишем два вектора m_1 и m_2 один под другим, получим матрицу

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Условие неколлинеарности векторов m_1 и m_2 эквивалентно тому, что $\operatorname{rk} A = 2$, т. е. в матрице есть ненулевой главный минор, не равный нулю. Без ограничения общности,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

тогда существуют гладкие обратные функции $u^1 = u^1(x,y)$ и $u^2 = u^2(x,y)$. Следовательно, $z = z(u^1,u^2) = z\big(u^1(x,y),u^2(x,y)\big) = f(x,y)$, т. е. z — гладкая функция от x и y.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Положим $x = u^1$, $y = u^2$, $z = f(u^1,u^2)$. Тогда $m_1 = (1,0,f_{u^1})$, а $m_2 = (0,1,f_{u^2})$, и они, очевидно, неколлинеарны.

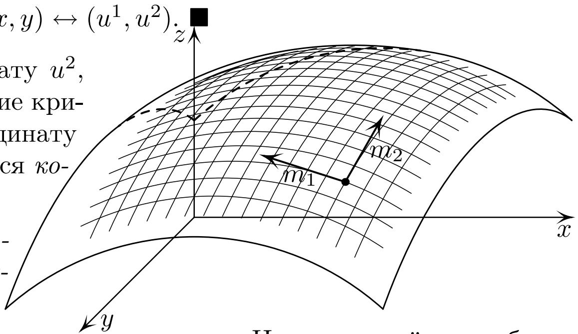
$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Рассмотрим уравнение $F(x,y,z) := f(x,y) - z = 0$, тогда $\operatorname{grad} F = (f_x, f_y, -1) \neq 0$.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ Пусть $\operatorname{grad} F \neq 0$, тогда, без ограничения общности, $F_z \neq 0$. По теореме о неявной функции можно разрешить $F(x,y,z) = 0$ относительно z, т. е. $z = f(x,y)$. $\blacksquare$

1.3. Геометрический смысл параметров. Криволинейные координаты

Теорема 1.4. *Существует локальная биекция между точками поверхности и парами (u^1,u^2), т. е. $\{u^i\}$ есть локальные координаты на поверхности.*

$\square$ Ясно, что каждой паре координат (u^1,u^2) соответствует точка поверхности. Это соответствие биективно по теореме о неявном отображении: $(x,y,z) \leftrightarrow \big(x,y,z(x,y)\big) \leftrightarrow (x,y) \leftrightarrow (u^1,u^2)$. $\blacksquare$



Определение. Пусть $r = r(u^1,u^2)$. Зафиксируем координату u^2, тогда получим кривую $r = r(u^1,u^2_0) = r(u^1)$ на поверхности. Такие кривые называются *u^1-линиями.* Аналогично, зафиксировав координату u^1, получим *u^2-линию.* Совокупность всех этих линий называется *координатными линиями.*

Теорема 1.5. *Координатные линии «разных сортов» пересекаются, а линии «одного сорта» (при разных значениях зафиксированных параметров) не пересекаются и не касаются.*

$\square$ Допустим, что две линии одного сорта имеют общую точку на поверхности. Но тогда этой точке будут соответствовать две пары координат, а это противоречит предыдущему утверждению. $\blacksquare$

1.4. Карта поверхности

Определение. *Картой поверхности* называется пара (U,φ), где U — область в $\mathbb{R}^2$, а отображение φ ставит в соответствие точке на поверхности с криволинейными координатами (u^1,u^2) точку с координатами (u^1,u^2) в области U. Как было доказано ранее, такое отображение биективно.

Теорема 1.6. *Гладкие кривые на поверхности переходят в гладкие кривые на карте. Пересечение переходит в пересечение, касание — в касание, касательный вектор $(\dot x, \dot y, \dot z)$ — в касательный вектор $(\dot u^1, \dot u^2)$.*

$\square$ Как мы знаем, существует биекция между точками карты (u^1,u^2) и точками поверхности (x,y,z). Пусть она задаётся формулами $u^1 = u^1\big(x,y,f(x,y)\big)$ и $u^2 = u^2\big(x,y,f(x,y)\big)$. Рассмотрим гладкую кривую $r(t) = \big(x(t),y(t),f(x(t),y(t))\big)$ на поверхности. Подставляя функции x,y в формулы для u^1 и u^2, получаем t-параметрическое задание гладкой кривой на карте.

Посмотрим на координаты касательного вектора v на карте: имеем $v = \dot r = \frac{\partial r}{\partial u^1}\dot u^1 + \frac{\partial r}{\partial u^2}\dot u^2 = m_1 \dot u^1 + m_2 \dot u^2$. Таким образом, касательный вектор v имеет на карте координаты $(\dot u^1, \dot u^2)$, т. е. переходит в касательный вектор к кривой на карте. $\blacksquare$

Можно рассматривать несколько карт одной и той же поверхности. Установим связь между координатами одной и той же точки поверхности на разных картах.

Определение. *Диффеоморфизмом* областей U и V называется биективное отображение $f\colon U \to V$, такое что f, f^{-1} — гладкие отображения.

Теорема 1.7. *Между областями двух карт $U(u^1,u^2)$ и $V(v^1,v^2)$, отображающими один и тот же фрагмент поверхности, существует диффеоморфизм. Матрица Якоби $J = \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)$ есть матрица перехода от* *базиса* $\{m_1, m_2\}$ *к базису* $\{m'_1, m'_2\}$, *где* $m_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$, *а* $m'_i = \frac{\partial r}{\partial v^i}$, *а матрица* $I = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right)$ *будет матрицей обратной замены базиса.*

□ Первое утверждение очевидно, поскольку отображения f и g точек поверхности на карты суть диффеоморфизмы, и потому отображение $g \circ f^{-1}$ является диффеоморфизмом общих фрагментов карт.

Для базиса V имеем

$$m'_i = \frac{\partial r}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial v^i} + \frac{\partial r}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial v^i} = m_1 \frac{\partial u^1}{\partial v^i} + m_2 \frac{\partial u^2}{\partial v^i}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что $\begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$. По симметричным соображениям $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{pmatrix}$. ■

1.5. Касательная плоскость

Определение. *Касательной плоскостью* к поверхности в точке M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 и натянутая на вектора m_1 и m_2.

Это определение корректно, так как не зависит от параметризации поверхности: если мы возьмём другие параметры v^1 и v^2, то по предыдущей теореме вектора m'_1 и m'_2 линейно выражаются через m_1 и m_2, т. е. лежат в той же плоскости.

Теорема 1.8. *Касательная плоскость к поверхности состоит из всех касательных векторов к кривым на поверхности, проходящим через точку касания.*

□ Пусть кривая задается уравнением $r = r(t),\ r(t_0) = M_0$. Имеем

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial u^1}\dot{u}^1 + \frac{\partial r}{\partial u^2}\dot{u}^2 = m_1\dot{u}^1 + m_2\dot{u}^2 \in \langle m_1, m_2 \rangle, \tag{5}$$

т. е.. вектор скорости кривой лежит в касательной плоскости. Теперь возьмём произвольный вектор $\vec{a} := (\alpha, \beta)$ в касательной плоскости, и найдём кривую, для которой он будет касательным. Пусть наша поверхность задаётся уравнением $r = r(u^1, u^2)$. Подставим $u^1 = u^1_0 + \alpha t,\ u^2 = u^2_0 + \beta t$. Тогда

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial u^1}\dot{u}^1 + \frac{\partial r}{\partial u^2}\dot{u}^2 = m_1\left(u^1_0 + \alpha t\right)'_t + m_2\left(u^2_0 + \beta t\right)'_t = \alpha m_1 + \beta m_2 = \vec{a}. \tag{6}$$

■

Теорема 1.9. *Если поверхность задана уравнением* $F(x, y, z) = 0$, *то уравнение касательной плоскости в точке* $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *имеет вид*

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0. \tag{7}$$

Частные производные берутся в точке M_0.

□ Рассмотрим кривую на поверхности, проходящую через точку M_0 и заданную уравнением $r = r(t)$. Тогда $F\big(x(t), y(t), z(t)\big) \equiv 0$. Продифференцировав тождество, получим $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z} = 0 \ \Leftrightarrow\ (\operatorname{grad} F, \dot{r}) = 0$. Вектор $\dot{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ лежит в касательной плоскости. Значит, её уравнение и есть (7). ■

Теорема 1.10. *Расстояние от точек поверхности до касательной плоскости является величиной 2-го порядка малости от* Δt. *Касательная плоскость — это единственная плоскость с таким свойством.*

□ По формуле Тейлора имеем $\Delta r = m_1\Delta u^1 + m_2\Delta u^2 + \widetilde{R}$, где $\widetilde{R}$ — члены ряда порядка $\geqslant 2$. Возьмем произвольную плоскость с нормальным вектором $\vec{n}$, таким что $|\vec{n}| = 1$. Расстояние от точки $r_0 + \Delta r$ поверхности до этой плоскости равно $d = (\Delta r, n) = (\vec{n}, m_1)\Delta u^1 + (\vec{n}, m_2)\Delta u^2 + (\vec{n}, \widetilde{R})$. Чтобы не было членов первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы $(\vec{n}, m_1) = 0$ и $(\vec{n}, m_2) = 0$, что равносильно условиям $\vec{n} \perp m_1$ и $\vec{n} \perp m_2$, т. е. это и есть касательная плоскость. ■

2. Теория гладких кривых

2.1. Длина дуги кривой

В курсе математического анализа длина кривой вводилась как предел длин вписанных ломаных при стремлении длин звеньев к нулю: $s = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum \Delta r_i$. Мы же определим длину иначе.

Определение. *Длина гладкой кривой* $r = r(t)$ от точки $r(t_0)$ до точки $r(t)$ равна $s = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{r}|dt$.

Длина не должна зависеть от параметризации кривой. Действительно, перейдем к другому параметру τ, тогда $t'_\tau \neq 0$. Пусть, например, $t'_\tau > 0$, тогда $|r'_t|dt = |r'_t|t'_\tau d\tau = |r'_\tau|d\tau$, и интеграл (длина) не изменится.

Теорема 2.1. *Длина кривой (в нашем определении) совпадает с пределом длин вписанных ломаных*[1].

$\square$ По определению интеграла $s = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum |v_i|\Delta t_i$, а в другом определении, раскладывая Δr_i в ряд Тейлора, получим $\Delta r_i = v_i \Delta t_i + \vec{R}\Delta t_i^2$, где $\vec{R}$ — некоторый ограниченный вектор. Оценим разность полученных сумм: $|\Delta r_i| - |v_i|\Delta t \leqslant |\vec{R}|\Delta t^2 \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Таким образом, определения эквивалентны. $\blacksquare$

Следствие 2.1. $\frac{ds}{dt} = |v|,\ |dr| = ds$.

2.2. Натуральный параметр

Заметим, что величину $s = \int\limits_{t_0}^{t} |v|dt$ можно выбрать в качестве параметра кривой, так как $\frac{ds}{dt} = |v| \neq 0$.

Определение. Такой параметр называется *натуральным.*

В дальнейшем, как правило, через s будем обозначать натуральный параметр, а через t — любой другой.

Теорема 2.2. *Параметр t является натуральным параметром s тогда и только тогда, когда в этой параметризации $|v| = 1$. Параметр t равен λs тогда и только тогда, когда $|v| = \mathrm{const}$.*

$\square$ Первое утверждение теоремы следует из второго. Пусть $t = \lambda s$, тогда $|v| = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda} = \mathrm{const}$. Наоборот: если $|v| = \mathrm{const}$, то $ds = |v|dt \ \Rightarrow\ s = |v|t$ и $t = \frac{s}{|v|}$. $\blacksquare$

2.3. Кривизна кривой

Пусть кривая задана натуральным параметром $t = s$. Обозначим $v = \frac{dr}{ds} =: \varepsilon_1$ (это обозначение ещё встретится), причем $|\varepsilon_1| = 1$. Тогда при движении по кривой конец вектора ε_1 будет двигаться по единичной сфере. Вектор ε_1' будет лежать в касательной плоскости к сфере, следовательно, $\varepsilon_1' \perp \varepsilon_1$. Можно было доказать это по-другому: параметр s натуральный, значит, $|\varepsilon_1| \equiv 1$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \equiv 1$. Продифференцировав тождество, получим $(\varepsilon_1, \varepsilon_1') + (\varepsilon_1', \varepsilon_1) = 2(\varepsilon_1, \varepsilon_1') = 0 \ \Rightarrow\ \varepsilon_1 \perp \varepsilon_1'$.

Определение. *Кривизной* гладкой кривой называется величина

$$k(s) := \left|\frac{d\varepsilon_1}{ds}\right| = \left|\frac{d^2 r}{ds^2}\right|. \tag{1}$$

Определение. Точка на кривой называется *точкой спрямления*, если в этой точке кривизна равна 0.

Пусть кривая имеет ненулевую кривизну. Тогда можно рассматривать вектор $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon_1'}{k}$.

Определение. Вектор ε_2 называется *главной нормалью.*

Теорема 2.3. *Кривая имеет на некотором участке нулевую кривизну $\Leftrightarrow$ этот участок прямолинейный.*

$\square$ Справа налево утверждение очевидно (продифференцируйте уравнение прямой!). Слева направо: по формуле Тейлора $r = r_0 + r'\Delta s + \frac{r''\Delta s^2}{2} + \ldots$. Если $k(s) = |r''(s)| = 0$, то останется только член первого порядка, и кроме того, $\varepsilon_1 = \mathrm{const} = \vec{c}$, так как $\varepsilon_1' = 0$. Получилось уравнение прямой вида $r = r_0 + \vec{c}s$. $\blacksquare$

Теорема 2.4. *Расстояние от кривой до своей касательной в точке спрямления (и только в ней) является величиной третьего порядка малости относительно Δs.*

$\square$ Имеем

$$\Delta r = \frac{\varepsilon_1}{1!}\Delta s + \frac{k\varepsilon_2}{2!}\Delta s^2 + \frac{r'''}{3!}\Delta s^3 + \ldots \tag{2}$$

Возьмем произвольную прямую, проходящую через точку r_0 с направляющим вектором m, таким что $|m| = 1$. Тогда расстояние до этой прямой будет равно

$$d = \big|[m, \Delta r]\big| = \left|[m, \varepsilon_1]\Delta s + \frac{1}{2}[m, k\varepsilon_2]\Delta s^2 + \frac{1}{6}[m, r''']\Delta s^3 + \ldots\right|. \tag{3}$$

Расстояние d будет третьего порядка малости $\Leftrightarrow$ вектор m коллинеарен вектору ε_1 и коллинеарен вектору $k\varepsilon_2$. Но так как вектора ε_1 и ε_2 ортогональны, то это возможно тогда и только тогда, когда $k = 0$. $\blacksquare$

[1] Более строгое доказательство было дано в курсе математического анализа во 2 семестре. (Прим. наб.)

2.4. Соприкасающаяся плоскость и соприкасающаяся окружность

Определение. Пусть $k(s_0) \neq 0$. Плоскость, натянутая на вектора ε_1 и ε_2 и проходящая через точку $r(s_0)$, называется *соприкасающейся плоскостью.*

Пример 4.1. Рассмотрим окружность $r(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$. Найдём натуральный параметр: длина дуги равна $s = R\varphi$, следовательно $\varphi = \frac{s}{R}$. Переходя к параметру s, получим $r(s) = R\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right)$. Тогда

$$\varepsilon_1 = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right), \quad \varepsilon_1' = \frac{1}{R}\left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}\right). \tag{4}$$

Следовательно, $\varepsilon_2 = \left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}\right)$, и кривизна $k = \frac{1}{R}$.

Определение. Если в некоторой точке $k \neq 0$, то величина $R = \frac{1}{k}$ называется *радиусом кривизны (в направлении ε_2).* Окружность радиуса R, проведённая в соприкасающейся плоскости в точке, находящейся на расстоянии R от кривой в направлении вектора ε_2, называется *соприкасающейся.*

Теорема 2.5. *Расстояние от кривой до соприкасающейся окружности является величиной третьего порядка малости от Δs. Эта окружность — единственная с таким свойством.*

□ Проведём произвольную окружность через точку r_0. Пусть k — кривизна кривой в точке r_0, $\widetilde{k}$ — кривизна окружности. Для кривой разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$r = r_0 + \varepsilon_1\Delta s + \frac{1}{2}k\varepsilon_2(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}r'''(\Delta s)^3 + \ldots, \tag{5}$$

а для окружности

$$\widetilde{r} = r_0 + \widetilde{\varepsilon}_1\Delta s + \frac{1}{2}\widetilde{k}\widetilde{\varepsilon}_2(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}\widetilde{r}'''(\Delta s)^3 + \ldots \tag{6}$$

Расстояние между этими точками равно

$$d = (\varepsilon_1 - \widetilde{\varepsilon}_1)\Delta s + \frac{1}{2}(k\varepsilon_2 - \widetilde{k}\widetilde{\varepsilon}_2)(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}(r''' - \widetilde{r}''')(\Delta s)^3 + \ldots \tag{7}$$

Эта величина будет третьего порядка малости тогда и только тогда, когда $\varepsilon_1 = \widetilde{\varepsilon}_1$ и $k\varepsilon_2 = \widetilde{k}\widetilde{\varepsilon}_2$. Поскольку вектора ε_2 и $\widetilde{\varepsilon}_2$ единичные, то $k = \widetilde{k}$. Значит, наша окружность совпадает с соприкасающейся. ■

Теорема 2.6. *Соприкасающаяся плоскость — единственная плоскость, такая, что расстояние от кривой до неё третьего порядка малости от Δs.*

□ Возьмём произвольную плоскость с нормальным вектором $\vec{n}$, проходящую через точку r_0. Тогда расстояние до кривой будет равно

$$d = |(\vec{n}, \Delta r)| = \left|(\vec{n}, \varepsilon_1)\Delta s + \frac{1}{2}k(\vec{n}, \varepsilon_2)(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}(\vec{n}, r''')(\Delta s)^3 + \ldots\right| \tag{8}$$

Для выполнения условий теоремы необходимо и достаточно $(\vec{n}, \varepsilon_1) = 0$, $(\vec{n}, \varepsilon_2) = 0$, что и означает совпадение данной плоскости с соприкасающейся. ■

Если плоская кривая имеет в некоторой точке ненулевую кривизну, то касательная в этой точке лежит по одну сторону от кривой.

При рассмотрении плоских кривых можно определить кривизну со знаком. Пусть $\varepsilon_1 = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, где угол α — наклон касательной к оси Ox. Тогда $\varepsilon_1' = \alpha_s' \cdot (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s))$, следовательно $k(s) = |\alpha_s'|$. Для плоских кривых можно убрать модуль, и по определению полагают $k = \alpha_s'$.

2.5. Трёхгранник Френе

Мы ввели в рассмотрение вектора $\varepsilon_1 = r'(s)$ и $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1'}{k}$, где k — кривизна кривой. Дополним их до базиса.

Определение. Вектор $\varepsilon_3 := [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ называется *вектором бинормали.* Репер $\big(r(s), \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\big)$ называется *трёхгранником Френе.*

Теорема 2.7 (Френе). *Имеют место формулы Френе*

$$\varepsilon_1' = k\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2' = -k\varepsilon_1 + \varkappa\varepsilon_3, \quad \varepsilon_3' = -\varkappa\varepsilon_2. \tag{9}$$

Матрица перехода от базиса ε_i к базису ε_i' называется матрицей Френе и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

□ Рассмотрим два базиса $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$, соответствующие точкам s и $s+\Delta s$. Пусть Π — матрица перехода от $\varepsilon_i(s)$ к $\varepsilon_i(s+\Delta s)$. Так как оба базиса ортонормированны, то эта матрица ортогональна. Следовательно, $\Pi^t\Pi = E$. Продифференцируем равенство: $(\Pi^t\Pi)' = (\Pi^t)'\Pi + \Pi^t(\Pi)' = 0$. Устремим $\Delta s \to 0$, тогда $\Pi \to E$. В пределе получаем равенство $(\Pi^t)' + (\Pi)' = 0$, т. е. $(\Pi')^t + \Pi' = 0$. Следовательно матрица Π' кососимметрична. Первую строку этой матрицы, т. е. первую формулу Френе мы знаем, следовательно, знаем и первый столбец, а по диагонали стоят нули. Таким образом, матрица Френе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Осталось два места, противоположные по знаку. Обозначим их $\varkappa$ и $-\varkappa$, получим утверждение теоремы. ■

Определение. Функция $\varkappa(s)$ называется *кручением* кривой в точке s.

Название функции $\varkappa$ объясняется следующими теоремами.

Теорема 2.8. *Кривая имеет нулевое кручение на некотором участке* $\Leftrightarrow$ *на этом участке кривая плоская.*

□ Если кривая на некотором участке лежит в плоскости, то вектора ε_1 и ε_2 лежат в этой же плоскости (это следует из определения производной вектор-функции). Тогда вектор ε_3 коллинеарен нормали к плоскости, т. е. $\varepsilon_3 = \mathrm{const} \;\Rightarrow\; \varepsilon_3' = \varkappa\varepsilon_2 = 0 \;\Rightarrow\; \varkappa = 0$. Если же $\varkappa = 0$, то $\varepsilon_3 = \mathrm{const} = (A,B,C)$. Рассмотрим функцию $f(s) = (r(s),\varepsilon_3) = Ax(s) + By(s) + Cz(s)$. Тогда $f'(s) = (r'(s),\varepsilon_3) + (r(s),\varepsilon_3') = (\varepsilon_1,\varepsilon_3) + 0 = 0$, так как $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$. Следовательно, $f(s) = (r,\varepsilon_3) = \mathrm{const}$, а это есть уравнение некоторой плоскости. ■

Определение. Если в некоторой точке кривая имеет нулевое кручение, она называется *точкой уплощения.*

Теорема 2.9. *Точка r_0 есть точка уплощения* $\Leftrightarrow$ *расстояние от кривой до соприкасающейся плоскости четвёртого порядка малости от Δs.*

□ Вектор нормали соприкасающейся плоскости совпадает с ε_3 с точностью до знака. Условие теоремы выполняется тогда и только тогда, когда $(r''',\varepsilon_3) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} r''' &= (k\varepsilon_2)' = k'\varepsilon_2 + k\varepsilon_2' \overset{(9)}{=\!=} k'\varepsilon_2 + k(-k\varepsilon_1 + \varkappa\varepsilon_3), \\ (r''',\varepsilon_3) &= k'\underbrace{(\varepsilon_2,\varepsilon_3)}_{0} - k^2\underbrace{(\varepsilon_1,\varepsilon_3)}_{0} + k\varkappa\underbrace{(\varepsilon_3,\varepsilon_3)}_{1} = k\varkappa. \end{aligned}$$

Поскольку $k \neq 0$, то $\varkappa = 0$. ■

Теорема 2.10 (Геометрический смысл кручения). *Коэффициент $\varkappa$ — это угловая скорость вращения соприкасающейся плоскости вокруг вектора ε_1. Если $\varkappa > 0$, то соприкасающаяся плоскость вращается в положительном направлении (по часовой стрелке, если смотреть в направлении вектора ε_1).*

□ Пусть $\Delta\varphi$ — угол поворота соприкасающейся плоскости, т. е. угол поворота вектора ε_3 вокруг ε_1. Тогда

$$|\varkappa| = |\varepsilon_3'| = \frac{|\Delta\varepsilon_3|}{\Delta s} = \frac{|\Delta\varepsilon_3|}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \tag{12}$$

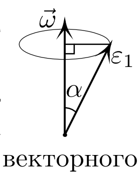
Устремив Δs к нулю, получим, что $|\varkappa| = |\varphi_s'|$, так как первый множитель в (12) есть предел отношения длины секущей к длине дуги при стремлении последней к нулю. ■

Лемма 2.11. *Если трехгранник e_1,e_2,e_3 вращается вокруг вектора $\omega = (\alpha,\beta,\gamma)$ с угловой скоростью $|\omega|$, то скорости вращения концов векторов равны*

$$e_1' = \gamma e_2 - \beta e_3, \quad e_2' = -\gamma e_1 + \alpha e_3, \quad e_3' = \beta e_1 - \alpha e_2, \tag{13}$$

т. е. матрица перехода от e_1,e_2,e_3 к e_1',e_2',e_3' равна

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$



□ Докажем, что скорость вращения конца вектора e_i равна $e_i' = [\omega,e_i]$. Действительно, этот вектор ортогонален векторам ω и e_i, т. е. $e_i' \perp \omega$ и $e_i' \perp e_i$, как и векторное произведение. Скорость конца вектора при вращении равна $|\omega|\sin\alpha$ (длине проекции на ω), где α — угол между ω и e_i, а величина $|\omega|\sin\alpha$ есть в точности площадь параллелограмма, натянутого на вектора ω и e_i, так как $|e_i| = 1$. Таким образом, вектор ε_i' ортогонален ω и e_i и имеет длину, равную длине соответствующего векторного произведения. Значит, $e_i' = [\omega,e_i]$.

Остаётся вычислить координаты векторов скоростей: так как $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ и $e_3 = (0,0,1)$, то получаем требуемое: $e_1' = [\omega, e_1] = (0, \gamma, -\beta)$, $e_2' = [\omega, e_2] = (-\gamma, 0, \alpha)$, $e_3' = [\omega, e_3] = (\beta, -\alpha, 0)$. ■

Теорема 2.12. *Трехгранник Френе вращается вокруг вектора $\omega := (\varkappa, 0, k)$ с угловой скоростью $|\omega|$.*

□ В самом деле, матрица перехода от ε_i к ε_i' есть матрица Френе (10), а по предыдущей лемме трехгранник вращается вокруг вектора $\omega = (\varkappa, 0, k)$. Теорема доказана. ■

2.6. Вычисление кривизны и кручения

Теорема 2.13. *Для кривизны и кручения кривой $r = r(t)$ по произвольному параметру t справедливы следующие формулы:*

$$k = \frac{\big|[\dot r, \ddot r]\big|}{|\dot r|^3}, \quad \varkappa = \frac{\langle \dot r, \ddot r, \dddot r\rangle}{\big|[\dot r, \ddot r]\big|^2}. \tag{15}$$

В плоском случае кручение равно 0, а кривизна задаётся формулой

$$k = \frac{\dot x \ddot y - \ddot x \dot y}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}. \tag{16}$$

□ Имеем $\frac{ds}{dt} = |\dot r|$. Выпишем производные $\dot r$ и $\ddot r$:

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \left|\frac{dr}{dt}\right| \varepsilon_1, \quad \ddot r = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot \varepsilon_1 + \left|\frac{dr}{dt}\right| \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot \varepsilon_1 + \left|\frac{dr}{dt}\right| k\varepsilon_2 \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot \varepsilon_1 + |\dot r|^2 k \varepsilon_2. \tag{17}$$

Следовательно, $[\dot r, \ddot r] = k\,|\dot r|^3\,\varepsilon_3 \;\Leftrightarrow\; \big|[\dot r, \ddot r]\big| = k\,|\dot r|^3$. Отсюда получаем общую формулу для кривизны:

$$k = \frac{\big|[\dot r, \ddot r]\big|}{|\dot r|^3}. \tag{18}$$

Найдем третью производную:

$$\frac{d(|\dot r|^2 k \varepsilon_2)}{dt} = k|\dot r|^2 \frac{d\varepsilon_2}{dt} = k|\dot r|^2 \frac{d\varepsilon_2}{ds}\frac{ds}{dt} = k|\dot r|^3(-k\varepsilon_1 + \varkappa\varepsilon_3) = -k^2|\dot r|^3\varepsilon_1 + k\varkappa|\dot r|^3\varepsilon_3. \tag{19}$$

Отсюда $\dddot r = \widetilde A + k\varkappa|\dot r|^3\varepsilon_3$, где $\widetilde A$ — слагаемые, содержащие ε_1 и ε_2. Имеем

$$\langle \dot r, \ddot r, \dddot r\rangle = |\dot r|^6 k^2 \varkappa \underbrace{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\rangle}_{1} = \big|[\dot r, \ddot r]\big|^2 \varkappa \;\Rightarrow\; \varkappa = \frac{\langle \dot r, \ddot r, \dddot r\rangle}{\big|[\dot r, \ddot r]\big|^2}. \tag{20}$$

■

2.7. Построение кривой по кривизне и кручению

Покажем, что функции кривизны и кручения определяют кривую на плоскости однозначно с точностью до начальных условий: кривая проходит через начало координат, и репер Френе совпадает с координатным репером. Иначе можно сформулировать так: кривые переводятся друг в друга ортогональным преобразованием. Рассмотрим сначала плоский случай.

Теорема 2.14. *Плоская кривая $r = r(s)$ с кривизной $k(s)$ и начальными условиями $\varepsilon_1(0) = e_1$, $r(0) = 0$ существует и притом единственна.*

□ Пусть $\alpha(s)$ — угол между векторами e_1 и $\varepsilon_1(s)$, т. е. угол наклона касательной. Тогда, как ранее было показано, $k = \alpha'(s)$, то есть $\alpha(s) = \int k(s)\,ds + \mathrm{const}$, но так как $\alpha(0) = 0$, то $\alpha(s)$ определяется однозначно. Имеем $\varepsilon_1 = \big(\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)\big)$, следовательно $x' = \cos\alpha(s)$, $y' = \sin\alpha(s)$. Поскольку $x(0) = y(0) = 0$, то функции $x(s) = \int \cos\alpha(s)\,ds$ и $y(s) = \int \sin\alpha(s)\,ds$ также определены однозначно. ■

Перейдем теперь к пространственному случаю.

Теорема 2.15. *Кривая с данными кривизной и кручением и указанными выше начальными условиями существует и единственна.*

□ Запишем формулы Френе по координатам. Все рассуждения будем вести для координаты x, для y и z — аналогично. Пусть $\varepsilon_i = (\varepsilon_{ix}, \varepsilon_{iy}, \varepsilon_{iz})$. Имеем

$$\varepsilon_{1x}' = k\varepsilon_{2x}, \quad \varepsilon_{2x}' = -k\varepsilon_{1x} + \varkappa\varepsilon_{3x}, \quad \varepsilon_{3x}' = -\varkappa\varepsilon_{2x}. \tag{21}$$

Это система дифференциальных уравнений с начальными условиями $\{\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \varepsilon_3(s)\}\Big|_{s=0} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Следовательно, существует и притом единственное решение системы. Далее, аналогично плоскому случаю, существуют и единственны функции $x(s) = \int \varepsilon_{1x} ds$, $y(s) = \int \varepsilon_{1y} ds$ и $z(s) = \int \varepsilon_{1z} ds$. Но надо ещё убедиться в том, что вектора $\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \varepsilon_3(s)$ будут образовывать ортонормированный репер при любых значениях s. Для этого докажем более общее утверждение (лемма 2.16). ■

В дальнейшем часто будет использоваться тензорная форма записи формул без знака суммирования.

Лемма 2.16. *Пусть в пространстве V заданы линейно независимые вектора $\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_n(t)$, такие что при $t = 0$ они ортонормированны. Пусть матрица $C = \left(c_i^j\right)$ кососимметрична, где $\varepsilon_i' = c_i^\alpha \varepsilon_\alpha$. Тогда вектора ε_i будут ортонормированны в любой момент времени.*

□ Пусть $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, и этот базис ортонормирован. Разложим ε_i по этому базису: $\varepsilon_i(t) = d_i^\alpha(t) e_\alpha$. Покажем, что матрица $D := \left(d_i^\alpha\right)$ ортогональна. В нулевой момент времени имеем $D = \mathrm{id}$. Рассмотрим скалярное произведение строк α и β этой матрицы $P(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i^\alpha d_i^\beta$. Продифференцировав его, получим

$$P'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^\alpha d_i^\beta \right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(d_i^\alpha\right)' d_i^\beta + \sum_{i=1}^{n} d_i^\alpha \left(d_i^\beta\right)'. \tag{22}$$

Найдём производные элементов матрицы D. Имеем

$$\varepsilon_i' = \left(d_i^\alpha\right)' e_\alpha = c_i^k \varepsilon_k = c_i^k d_k^\alpha e_\alpha. \tag{23}$$

Приравнивая коэффициенты при векторах e_α, получаем, что $\left(d_i^\alpha\right)' = c_i^k d_k^\alpha$. Теперь производную скалярного произведения (22) можно записать в виде

$$P'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^k d_k^\alpha d_i^\beta + \sum_{i=1}^{n} d_i^\alpha c_i^k d_k^\beta. \tag{24}$$

Теперь вспомним, что матрица C кососимметрична и $c_i^k = -c_k^i$. Тогда вторая сумма равна первой, взятой с противоположным знаком. Значит, производная скалярного произведения любых двух строк матрицы D равна 0 при любом t, откуда следует, что само скалярное произведение постоянно, т. е. оно совпадает со своим начальным значением. При $t = 0$ матрица ортогональна, значит, она ортогональна и при всех t. ■

3. Теория поверхностей

3.1. Первая квадратичная форма

Рассмотрим произвольную поверхность $r = r(u^1, u^2)$, u^1 и u^2 — координаты на поверхности, и по определению гладкой поверхности вектора $m_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}$ и $m_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$ не коллинеарны. Рассмотрим их матрицу Грама:

$$G = G(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} (m_1, m_1) & (m_1, m_2) \\ (m_1, m_2) & (m_2, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Коэффициенты этой матрицы являются функцией от координат, т. е. $g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2)$. При замене координат $(u^1, u^2) \to (v^1, v^2)$ матрицей перехода будет матрица Якоби $J = \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)$, и матрица Грама изменится по формуле $G' = J^t G J$. Элементы новой матрицы будут равны

$$g'_{\alpha\beta} = \left(m'_\alpha, m'_\beta\right) = \left(\frac{\partial r}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial r}{\partial v^\beta} \right) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial r}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \right) = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}. \tag{2}$$

Найдём угол между двумя пересекающимися кривыми на поверхности с уравнениями $r(t) = \left(u^1(t), u^2(t)\right)$ и $\widetilde{r}(t) = \left(\widetilde{u}^1(t), \widetilde{u}^2(t)\right)$. Он равен углу между касательными векторами v и $\widetilde{v}$, которые равны соответственно

$$v\left(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right) = \frac{du^1}{dt} m_1 + \frac{du^2}{dt} m_2, \quad \widetilde{v}\left(\frac{d\widetilde{u}^1}{dt}, \frac{d\widetilde{u}^2}{dt}\right) = \frac{d\widetilde{u}^1}{dt} m_1 + \frac{d\widetilde{u}^2}{dt} m_2. \tag{3}$$

По формуле для скалярного произведения получаем

$$(v,\widetilde{v}) = g_{11}\frac{du^1}{dt}\frac{d\widetilde{u}^1}{dt} + g_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\frac{d\widetilde{u}^2}{dt} + \frac{du^2}{dt}\frac{d\widetilde{u}^1}{dt}\right) + g_{22}\frac{du^2}{dt}\frac{d\widetilde{u}^2}{dt},$$
$$(v,v) = g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2,$$
$$(\widetilde{v},\widetilde{v}) = g_{11}\left(\frac{d\widetilde{u}^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\widetilde{u}^1}{dt}\frac{d\widetilde{u}^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\widetilde{u}^2}{dt}\right)^2,$$

а тогда косинус искомого угла равен

$$\cos\varphi = \frac{(v,\widetilde{v})}{|v||\widetilde{v}|}. \tag{4}$$

Так как $dr = vdt$ и $d\widetilde{r} = \widetilde{v}d\widetilde{t}$, то формально умножая полученные три равенства на $(dt)^2$, получаем

$$(dr,d\widetilde{r}) = g_{11}du^1d\widetilde{u}^1 + g_{12}\left(du^1d\widetilde{u}^2 + du^2d\widetilde{u}^1\right) + g_{22}du^2d\widetilde{u}^2,$$
$$(dr,dr) = g_{11}\left(du^1\right)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}\left(du^2\right)^2,$$
$$(d\widetilde{r},d\widetilde{r}) = g_{11}\left(d\widetilde{u}^1\right)^2 + 2g_{12}d\widetilde{u}^1d\widetilde{u}^2 + g_{22}\left(d\widetilde{u}^2\right)^2.$$

Определение. Квадратичная функция $ds^2 = (dr,d\widetilde{r}) = g_{ij}du^id\widetilde{u}^j$, определённая на касательном пространстве, называется *первой квадратичной формой* (или *метрикой*) поверхности.

Таким образом, угол можно вычислить через первую квадратичную форму:

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij}du^id\widetilde{u}^j}{\sqrt{g_{ij}du^idu^j}\sqrt{g_{ij}d\widetilde{u}^id\widetilde{u}^j}} \tag{5}$$

Найдём определитель Грама при некоторых способах задания поверхности. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$. Тогда $m_1 = (1,0,f_x)$ и $m_2 = (0,1,f_y)$, значит, матрица Грама имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_xf_y \\ f_xf_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}, \quad \det G = 1 + f_x^2 + f_y^2. \tag{6}$$

Если же поверхность задана неявной функцией $F(x,y,z) = 0$, то, считая для определённости $F_z \neq 0$, выразим частные производные: $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$ и $f_y = -\frac{F_y}{F_z}$, и сведём задачу к предыдущей.

3.2. Площади областей

Покажем теперь, как найти площадь области на поверхности $r = r(u^1,u^2)$. Координаты u^1 и u^2 образуют сетку на поверхности. Чтобы найти площадь области, найдем площади маленьких параллелограммов со сторонами $m_{1i}\Delta u_i^1$ и $m_{2i}\Delta u_i^2$, просуммируем их и перейдём к пределу при $\Delta u \to 0$. Площадь такого параллелограмма равна $S_i = \big|[\Delta m_{1i},\Delta m_{2i}]\big| = \big|[m_{1i},m_{2i}]\big|\Delta u_i^1\Delta u_i^2$. В пределе получим

$$S = \iint \big|[m_1,m_2]\big|du^1du^2. \tag{7}$$

Величина $\big|[m_1,m_2]\big|$ равна площади параллелограмма, натянутого на вектора m_1 и m_2. Как известно, эта площадь равна $\sqrt{|G|}$, где G — матрица Грама векторов m_1,m_2. Таким образом, получаем формулу

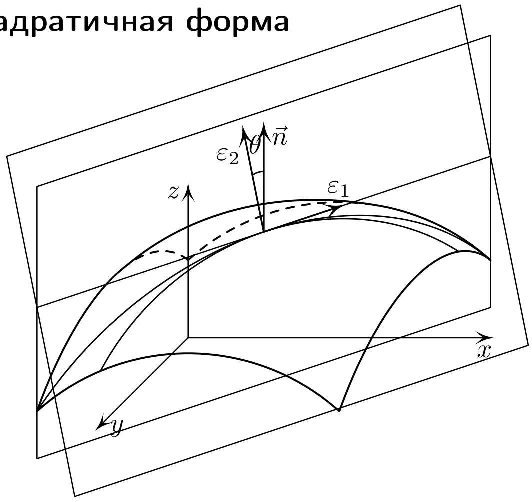
$$S = \iint \sqrt{|G|}du^1du^2. \tag{8}$$

В этом выражении элементы матрицы G под интегралом суть функции от координат u^1 и u^2.

В частности, если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, то, применяя формулу (6), получаем, что площадь области равна

$$S = \iint \sqrt{1+{f_x}^2+{f_y}^2}dxdy. \tag{9}$$

3.3. Внешняя геометрия и вторая квадратичная форма



Будем теперь изучать поверхность вида $F(x, y, z) = 0$ локально в окрестности фиксированной точки A_0. Для этого возьмем нормальный вектор к поверхности $\vec{n} := \frac{[m_1, m_2]}{|[m_1, m_2]|}$ и будем рассматривать все плоскости, содержащие точку A_0 и этот вектор. Сечения поверхности такими плоскостями назовём *нормальными сечениями.*

Зафиксируем какой-нибудь единичный вектор $\varepsilon_1 \perp \vec{n}$ и рассмотрим нормальное сечение в точке A_0 плоскостью α, натянутой на вектора ε_1 и $\vec{n}$. Теперь повернем эту плоскость вокруг ε_1 на угол $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Обозначим эту плоскость через β и зафиксируем в ней единичный вектор $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1$.

В пересечении поверхности и этой плоскости будет гладкая кривая. Действительно, пересечение задается системой

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Поскольку угол поворота θ не равен $\frac{\pi}{2}$, то вектор нормали (A, B, C) к плоскости не коллинеарен вектору $\operatorname{grad} F$, и из теоремы о неявном отображении следует, что решение будет того же класса гладкости, что и F.

Будем рассматривать кривые, у которых плоскость $(A_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ является соприкасающейся. В доказательстве следующей теоремы будем использовать введённые выше обозначения.

Теорема 3.1 (Менье). *Все кривые на поверхности с соприкасающейся плоскостью $(A_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеют одинаковую кривизну в точке A_0.*

□ Чтобы не путать индексы переменных со степенями, в этом доказательстве обозначим криволинейные координаты буквами u и v вместо u^1 и u^2. Пусть поверхность задана уравнением $r = r(u, v)$. Возьмем кривую $r = r\big(u(t), v(t)\big)$ с заданной соприкасающейся плоскостью, и пусть t — натуральный параметр. Вектор ε_1 для нее — это первый вектор базиса Френе, т. е.

$$\varepsilon_1 = \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial r}{\partial v}\dot{v}. \tag{11}$$

Вектор ε_2 — это второй вектор базиса Френе, следовательно

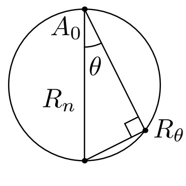
$$k\varepsilon_2 = \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \ddot{u}m_1 + \ddot{v}m_2. \tag{12}$$

Умножим вектор $k\varepsilon_2$ скалярно на $\vec{n}$ и учтём, что $(m_i, \vec{n}) = 0$. Получим следующее выражение:

$$(k\varepsilon_2, \vec{n}) = k\cos\theta = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}, \vec{n}\right)\dot{u}^2 + 2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}, \vec{n}\right)\dot{u}\dot{v} + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^2}, \vec{n}\right)\dot{v}^2. \tag{13}$$

Коэффициенты при производных не зависят от кривой, $\cos\theta$ тоже одинаковый для все кривых с данной соприкасающейся плоскостью, величины $\dot{u}$ и $\dot{v}$ являются координатами зафиксированного нами вектора ε_1, следовательно, тоже постоянны. Следовательно, кривизна одинакова для всех кривых с данной соприкасающейся плоскостью. ■

Определение. Кривизна при нормальном сечении называется *нормальной кривизной* и обозначается k_n.



Из теореме Менье следует, что кривизна произвольного сечения определяется по формуле $k_\theta = \frac{k_n}{\cos\theta}$, а радиусы кривизны связаны соотношением $R_\theta = R_n\cos\theta$, где R_n — радиус нормального сечения. Центры кривизны для разных углов θ лежат на окружности S с диаметром R_n, перпендикулярном вектору ε_1. Действительно, если плоскость повернуть на угол θ, то центр кривизны будет на расстоянии $R_\theta = R_n\cos\theta$ от точки A_0, т. е. попадёт на окружность S.

Итак, мы получили формулу для кривизны нормального сечения:

$$k_n = l_{11}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2l_{12}\left(\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}\right) + l_{22}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2, \quad l_{ij} := \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n}\right). \tag{14}$$

Таким образом, k_n - это квадратичная функция от $\frac{du^1}{ds}$ и $\frac{du^2}{ds}$. Но так как $ds = |dr| = |v|dt$, то

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{u}^i}{|v|}. \tag{15}$$

Следовательно, кривизна равна

$$k_n = \frac{l_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{|v|^2} = \frac{l_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j} = \frac{l_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j}. \tag{16}$$

Определение. Квадратичная функция $l_{ij}du^i du^j$, определенная на касательном пространстве, называется *второй квадратичной формой* поверхности.

Осуществим замену координат $(u^1, u^2) \to (v^1, v^2)$ с матрицей перехода $J = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right\}$. Пусть в новом базисе квадратичная форма имеет коэффициенты $l'_{\alpha\beta}$, тогда

$$l'_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}, \vec{n}\right), \quad \frac{\partial r}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + m_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$l'_{\alpha\beta} = l_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \Leftrightarrow L' = J^t L J. \tag{18}$$

Значит, выражение $l_{ij}du^i du^j$ действительно является квадратичной формой. Её матрицу будем обозначать буквой L. Итак, мы получили, что нормальная кривизна равна отношению второй и первой квадратичных форм.

3.4. Главные направления и главные кривизны

Теперь будем вращать плоскость нормального сечения вокруг вектора $\vec{n}$ на угол φ. При этом мы будем получать нормальные кривизны $k_n = k_n(\varphi)$. Эта непрерывная функция периодична с периодом π и имеет максимальное и минимальное значения.

Определение. Максимальное и минимальное значение нормальной кривизны k_n называются *главными кривизнами.* Их направления называются *главными направлениями.*

Теорема 3.2. *В любой точке поверхности существует ровно две главных кривизны и ровно два главных направления (или все направления главные). Главные направления ортогональны.*

$\square$ Выберем на поверхности ортонормированный базис (v^1, v^2). В нём первая квадратичная форма имеет вид $\left(dv^1\right)^2 + \left(dv^2\right)^2$, следовательно, кривизна равна $k_n = \frac{l_{ij}dv^i dv^j}{(dv^1)^2+(dv^2)^2}$. Первая квадратичная форма положительно определена, а потому существует ортонормированный базис (w^1, w^2), в котором

$$k_n = \frac{\lambda_1\left(dw^1\right)^2 + \lambda_2\left(dw^2\right)^2}{\left(dw^1\right)^2 + \left(dw^2\right)^2} = \lambda_1\cos^2\varphi + \lambda_2\sin^2\varphi = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2\varphi. \tag{19}$$

Следовательно, k_n заключено между λ_1 и λ_2 — это и есть главные кривизны (они единственны). Направления w^1 и w^2 являются главными направлениями, откуда следует второе утверждение теоремы. ■

Формула (19) называется *формулой Эйлера.*

Определение. Точки поверхности классифицируются при помощи главных кривизн следующим образом:
1° Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то точка поверхности называется *сферической.*
2° Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то точка поверхности называется *эллиптической.*
3° Если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то точка поверхности называется *гиперболической.*
4° Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то точка поверхности называется *точкой уплощения.*

Определение. *Гауссовой кривизной* называется произведение главных кривизн $K := \lambda_1\lambda_2$. *Средней кривизной* называется сумма (иногда полусумма) главных кривизн.

3.5. Вычисление главных кривизн и направлений

Теорема 3.3. *Главные кривизны* λ_1, λ_2 *являются корнями уравнения* $\det(L - \lambda G) = 0$.

$\square$

Для ортонормированных координатных векторов m_1, m_2 эта теорема уже была доказана в линейной алгебре: в этом случае числа λ_1, λ_2 являются корнями характеристического многочлена $p(\lambda) = \det\left(\widetilde{L} - \lambda E\right)$, где $\widetilde{L}$ — матрица второй квадратичной формы в «хорошем» базисе.

Пусть теперь наши координаты u^1 и u^2 не ортонормированны, а v^1 и v^2 — ортонормированные координаты. Пусть J — матрица перехода от ортонормированного базиса к нашему (матрица Якоби). Тогда

$$J^t\left(\widetilde{L} - \lambda E\right)J = L - \lambda G \Rightarrow p(\lambda) = \frac{\det(L - \lambda G)}{\det(J^t J)} = \frac{\det(L - \lambda G)}{\det G}. \tag{20}$$

Это означает, что корни характеристического многочлена в ортонормированном базисе (а они и есть главные кривизны) совпадают с корнями уравнения $\det(L-\lambda G)=0$, что и требовалось. ■

Следствие 3.1. *Поскольку произведение корней характеристического многочлена $p(\lambda)$ равно отношению $\frac{\det L}{\det G}$, получаем формулу для гауссовой кривизны:*

$$K=\lambda_1\lambda_2=\frac{\det L}{\det G}. \tag{21}$$

Теорема 3.4. *Главные направления удовлетворяют равенству* $(L-\lambda_i G)\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

□ Будем действовать аналогично предыдущей теореме. Пусть u^1,u^2 — координаты на поверхности. Если бы они были ортонормированны, то в этом случае мы из линейной алгебры знаем, что главные направления удовлетворяют равенству $(\widetilde{L}-\lambda_i E)\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Пусть теперь координаты u^1 и u^2 произвольны, а v^1 и v^2 — ортонормированные координаты. Пусть J — матрица перехода от ортонормированных координат к нашим. Тогда $\begin{pmatrix}dv^1\\dv^2\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}$. Тогда равенство, которому удовлетворяют главные направления, перепишется в виде: $\big(\widetilde{L}-\lambda_i E\big)J\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Домножим обе части равенства на J^t слева, получим $J^t\big(\widetilde{L}-\lambda_i E\big)J\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, то есть $(L-\lambda_i G)\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. ■

Зная коэффициенты матриц G и L, можно найти главные кривизны и направления. Вспомним, чему равны коэффициенты квадратичных форм:

$$g_{ij}=(m_i,m_j),\quad l_{ij}=\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\partial u^j},\vec{n}\right)=\frac{\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\partial u^j},[m_1,m_2]\right)}{\big|[m_1,m_2]\big|}=\frac{\left\langle m_1,m_2,\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\partial u^j}\right\rangle}{\sqrt{|G|}}. \tag{22}$$

Рассмотрим случай, когда поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$. Тогда

$$L=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\cdot\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{xy}&f_{yy}\end{pmatrix},\quad |L|=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2}. \tag{23}$$

Если главными направлениями являются оси Ox и Oy, то $L=\operatorname{diag}(f_{xx},f_{yy})$, $\lambda_i=l_{ii}$, $K=f_{xx}f_{yy}$.

4. Многообразия в $\mathbb{R}^n$

4.1. Криволинейные координаты в n-мерном пространстве

Возьмем некоторую область $U\subset\mathbb{R}^n$, имеем взаимно-однозначное соответствие между точками области и наборами координат: $A\to(x^1,\ldots,x^n)$.

Определение. Рассмотрим два экземпляра пространства $(\mathbb{R}^n,U)$ и $(\mathbb{R}^n,V)$, в которых выбраны области U и V. Будем говорить, что отображение $f\colon U\to V$ есть *непрерывная замена координат*, если оно биективно и $f,\ f^{-1}$ — непрерывные функции.

Пусть в двух пересекающихся областях заданы координаты $u^1,\ldots,u^n$ и $v^1,\ldots,v^n$. На пересечении этих областей мы получаем выражение этих координат друг через друга: $u^i=u^i(v^1,\ldots,v^n)$ и $v^j=v^j(u^1,\ldots,u^n)$, причем эти функции гладкие. Действительно, т. к. существуют гладкие биекции $(u^1,\ldots,u^n)\leftrightarrow(x^1,\ldots,x^n)$ и $(v^1,\ldots,v^n)\leftrightarrow(x^1,\ldots,x^n)$, то и их композиция будет гладкой и биективной.

Заметим, что задание криволинейных координат равносильно заданию диффеоморфизма между некоторой областью Q и областью изменения параметров.

4.2. Понятие многообразия

Определение. Фигура в $\mathbb{R}^n$ называется *k-мерным многообразием*[2] (или *k-поверхностью*), если её можно локально (в окрестности точки A_0) параметризовать так, чтобы были выполнены следующие свойства:

[2]Если говорить более точно, то это определение *вложенного в $\mathbb{R}^n$ гладкого подмногообразия.* На самом деле, многообразие размерности k — это просто хаусдорфово топологическое пространство, локально гомеоморфное некоторой области в $\mathbb{R}^k$. (Прим. наб.)

1° $r = r(x^1, \dots, x^n)$, где $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$ — гладкая функция;
2° Вектора $m_i := \frac{\partial r}{\partial u^i}$, $i = \overline{1, k}$ линейно независимы, т. е. матрица Якоби (1) имеет ранг k.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} \tag{1}$$

При $k = 1$ получается гладкая кривая, при $k = 2$ — гладкая поверхность. Очевидно, что $u^1, \dots, u^k$ будут локальными координатами на поверхности — это следует из теоремы о неявном отображении.

Рассмотрим локальный базис $(m_1, \dots, m_k)$, зависящий от точки. Если заданы другие координаты $(v^1, \dots, v^k)$, то матрица Якоби $J = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right\}$ является матрицей перехода от m_i к m_i':

$$m_i' = \frac{\partial r}{\partial v^i} = \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} = m_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}. \tag{2}$$

Аналогично трёхмерному случаю определяются координатные линии: фиксируем все координаты, кроме одной. Получается правильно параметризованная кривая на поверхности, так как её касательный вектор есть один из векторов m_i, который всегда ненулевой.

Теорема 4.1. *Размерность многообразия определена однозначно.*

□ Пусть одно и то же многообразие задаётся двумя уравнениями: $r = r(u^1, \dots, u^k)$ и $r = r(v^1, \dots, v^l)$. Допустим, что $k > l$. Тогда

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^j}. \tag{3}$$

Поскольку $\operatorname{rk}(A \times B) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$, то получаем противоречие: матрица слева — единичная ранга k, а справа — строго меньше k. ■

Многообразие также можно задавать неявной функцией.

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \dots \\ F_p(x^1, \dots, x^n) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

и все функции гладкие. Если в каждой точке, удовлетворяющей системе, матрица Якоби $J = \left\{\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right\}$ имеет полный ранг, то решением системы является многообразие размерности $n - p$. Покажем, что это эквивалентное определение. Будем считать, что минор ранга p находится в правой части матрицы J. Тогда по теореме о неявном отображении существует выражение последних p координат через первые $k := n - p$ координат. Примем координаты $x^1, \dots, x^k$ за параметры и получим требуемое: $r = r(x^1, \dots, x^k)$. Матрица Якоби будет невырожденной, так как

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, \underset{k}{0}, *, \dots, *). \tag{5}$$

Рассмотрим кривую $r = r(t)$ на многообразии, заданном уравнением $r = r(u^1, \dots, u^n)$. Касательный вектор к кривой в базисе x^i имеет координаты $(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$. Тогда в локальном базисе этот вектор имеет координаты $(\dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n)$. В самом деле, имеем $v = \frac{dr}{dt} = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = \frac{\partial r}{\partial u^i}\dot{u}^i = m_i \dot{u}^i$.

Теорема 4.2. *Координаты на k-мерном многообразии всегда можно расширить до координат во всём пространстве $\mathbb{R}^n$ так, что некоторая окрестность многообразия будет задаваться в этих координатах системой $u^{k+1} = \ldots = u^n = 0$.*

□ Возьмём векторы $m_1, \dots, m_k$ в некоторой точке A_0 на многообразии. Дополним их до базиса в $\mathbb{R}^n$ векторами $m_{k+1}, \dots, m_n$. Покажем, что это и есть искомый базис. Действительно, точка принадлежит поверхности тогда и только тогда, когда последние $n-k$ координат нулевые. Теперь покажем, что если мы сдвинемся не очень далеко от точки A_0, то базис останется базисом. В самом деле, вектора $m_1, \dots, m_k$ суть гладкие функции от координат, а их дополнение до базиса от координат точки вообще не зависит. Поэтому определитель $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ есть непрерывная функция, не равная нулю в точке A_0. По локальному свойству она не обращается в нуль и в некоторой её окрестности. Короче говоря, если базис чуть-чуть пошевелить, то он останется базисом. ■

4.3. Евклидова метрика в криволинейных координатах

Пусть в области $Q \subset \mathbb{R}^n$ введены криволинейные координаты $(u^1, \dots, u^n)$. Определения угла между кривыми, матрицы Грама и т.д. переносятся на многомерный случай дословно с точностью до количества координат. Если координаты являются ортонормированными координатами, то очевидно, что $G = E$. Если координаты являются аффинными координатами, то $G = \text{const}$.

Пусть ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, тогда ее объём в хороших прямоугольных координатах равен

$$V = \int\limits_{\omega} dx^1 \dots dx^n. \tag{6}$$

При замене координат имеем $G' = J^t G J$. В данном случае $G = E$, поэтому $G' = J^t J$. В итоге получаем следующую формулу:

$$V = \int\limits_{\omega} |J| du^1 \dots du^n = \int\limits_{\omega} \sqrt{|G'|} du^1 \dots du^n. \tag{7}$$

Рассмотрим примеры криволинейных координат.
1° Полярные координаты:

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi,\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix},\ ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \tag{8}$$

2° Цилиндрические координаты:

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi,\ z = z,\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{9}$$

3° Сферические координаты:

$$x = \rho \cos\varphi \sin\theta,\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta,\ z = \rho \cos\theta,\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix},\ ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2. \tag{10}$$

4.4. Риманова метрика

Определение. Будем говорить, что в области U задана *риманова метрика*, если:
1° В каждой точке $x \in U$ задана симметричная положительно определённая матрица $G = \{g_{ij}(x)\}$;
2° Функции $g_{ij}(x)$ гладкие;
3° При переходе к другим координатам G преобразуется по правилу $G' = J^t G J$, где J — матрица Якоби.

Скалярное произведение можно восстановить по матрице G: пусть $a = a^i e_i$, $b = b^j e_j$, тогда $(a, b) = g_{ij} a^i b^j$. Коэффициенты матрицы G — это $g_{ij} = (m_i, m_j)$, где $m_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0)$. Косинус угла между кривыми r и $\widetilde{r}$ в этой метрике определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(a, b)}{|a||b|} = \frac{(dr, d\widetilde{r})}{|dr||d\widetilde{r}|}. \tag{11}$$

Объём в римановой метрике не зависит от выбора координат, так как если $G' = J^t G J$, то

$$V = \int\limits_{\omega} \sqrt{|G'|} dv^1 \dots dv^n = \int\limits_{\omega} \sqrt{|J^t||G||J|} dv^1 \dots dv^n = \int\limits_{\omega} \sqrt{|G|} \underbrace{|J| dv^1 \dots dv^n}_{\text{замена}} = \int\limits_{\omega} \sqrt{|G|} du^1 \dots du^n \tag{12}$$

Аналогично длина дуги кривой не зависит от координат и равна $s = \int |v| dt$.

4.5. Изометрия метрик

Определение. Пусть даны области $U, \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ с метриками Римана G и $\widetilde{G}$ соответственно. Говорят, что метрики G и $\widetilde{G}$ *изометричны*, если существует диффеоморфизм областей U и $\widetilde{U}$, сохраняющий длины кривых.

Замечание. Аналогично определяется изометрия k-поверхностей.

Теорема 4.3. *Метрики G и $\widetilde{G}$ изометричны $\Leftrightarrow$ метрические тензоры G и $\widetilde{G}$ совпадают в некоторых криволинейных координатах областей U и $\widetilde{U}$.*

□ Пусть $G = \widetilde{G}$ в некоторых координатах $\left(u^1, \dots, u^n\right)$ области U и координатах $\left(\widetilde{u}^1, \dots, \widetilde{u}^n\right)$ области $\widetilde{U}$. Построим искомый диффеоморфизм. Точке $(x^1, \dots, x^n) \in U$ в координатах $\left\{u^i\right\}$ поставим в соответствие точку с теми же самыми координатами в $\left\{\widetilde{u}^i\right\}$. Очевидно, что это отображение удовлетворяет определению изометрии.

Пусть теперь нам дано, что существует диффеоморфизм областей U и $\widetilde{U}$, сохраняющий длины кривых.

Лемма 4.4. *Длины векторов при изометрии сохраняются.*

□ Проведем в области U кривую с касательным вектором v, ее образ в $\widetilde{U}$ имеет касательный вектор $\widetilde{v}$. Допустим, что в некоторой точке $|v| \neq |\widetilde{v}|$ (для определённости $|v| < |\widetilde{v}|$). Тогда неравенство верно и в некоторой окрестности этой точки. Значит, $\int |v|dt < \int |\widetilde{v}|dt$, т. е. длина кривой не сохранилась. Противоречие. ■

Из леммы следует, что сохраняются все скалярные квадраты. Но скалярное произведение двух произвольных векторов можно выразить через скалярные квадраты по формуле $(a,b) = \frac{1}{2}\big((a+b, a+b) - (a,a) - (b,b)\big)$, а значит сохраняется и скалярное произведение любых векторов, т. е. $g_{ij} = (u_i, u_j) = (\widetilde{u}_i, \widetilde{u}_j) = \widetilde{g}_{ij}$. Теорема доказана. ■

Следствие 4.1. *Изометрия влечет полное совпадение геометрий (углы, длины, объемы и т. д. одинаковые), поскольку все эти величины описываются через метрические тензоры.*

Рассмотрим несколько примеров эквивалентных метрик.

Пример 5.1. Метрика $ds^2 = du^2 + u^2dv^2$ на поверхности эквивалентна евклидовой метрике в полярных координатах $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$. Геометрия на этой поверхности эквивалентна геометрии на плоскости.

Пример 5.2. Рассмотрим цилиндрические координаты, они задают метрику $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. На поверхности цилиндра $\rho = \mathrm{const}$, а это значит, что метрика цилиндрической поверхности имеет вид $ds^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2$. При замене координат $x = a\varphi,\ y = z$, получим $dx = ad\varphi,\ dy = dz$, и метрика принимает вид $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Таким образом, это евклидова метрика.

Пример 5.3. Пусть дана область $U \subset \mathbb{R}^n$ с римановой метрикой $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$. Пусть $\widetilde{U}$ — карта области U. Записи метрик в U и $\widetilde{U}$ совпадут, следовательно они изометричны.

Вообще, метрика эквивалентна евклидовой, если в некоторой системе координат $G = E$. Заметим, что на кривой любая метрика эквивалентна евклидовой, так как $ds^2 = |v|^2 dt^2$ и всегда можно перейти к натуральному параметру, при котором $|v| = 1$ и $g_{11} = 1$.

5. Неевклидова геометрия

5.1. Псевдоевклидовы пространства

Определение. Пространство V над $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если на нем задано невырожденное скалярное произведение (a,b) со свойствами:

1° $(a,b) = (b,a)$;
2° $(a_1 + \lambda a_2, b) = (a_1, b) + \lambda(a_2, b)$;
3° $(a,a) > 0$, если $a \neq 0$.

Базис называется *ортонормированным*, если в нём матрица Грама единичная. Пространство называется *псевдоевклидовым*, если выполняются только первые два свойства скалярного произведения.

Известно, что любую симметричную билинейную функцию можно привести к *нормальному виду*:

$$\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix}\right\} p & & \\ & \left.\begin{matrix} -1 & \\ & -1 \end{matrix}\right\} q & \\ & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Определение. Число $p + q$ называется *рангом* билинейной функции (1), а $(p - q)$ — *сигнатурой*. Число p называется положительным *индексом инерции*, а q — отрицательным.

Определение. Базис псевдоевклидова пространства называется *ортонормированным*, если в нем матрица Грама имеет нормальный вид. Псевдоевклидово пространство V со скалярным произведением (a,b) называется *изотропным*, если существует такой ненулевой вектор $a \in V$, что $a \perp V$, т. е. $(a,x) = 0\ \forall x \in V$.

Теорема 5.1. *Пространство V изотропно $\Leftrightarrow$ скалярное произведение на нём вырождено.*

□ Пусть скалярное произведение вырождено, тогда в нормальном виде будут нули на диагонали, и достаточно взять базисный вектор e_n, тогда $(e_n, x) = 0\ \ \forall x \in V$, т. е. пространство изотропно. Если же оно невырожденно, то в базисе, соответствующем нормальному виду, для любого вектора $a = (x^1, \ldots, x^n)$ имеем $(a,x) = 0\ \forall x\ \Leftrightarrow\ (a, e_i) = \pm x^i = 0$, т. е. все координаты нулевые. ■

Псевдоевклидово пространство обозначается $\mathbb{R}^n_q$. Очевидно, что $R^n_q \sim \mathbb{R}^n_{n-q}$. В частности, $R^n \sim \mathbb{R}^n_0 \sim \mathbb{R}^n_n$.

Определение. *Ортогональным дополнением* к подпространству $W \subset V$ называется подпространство

$$W^\perp := \{a \colon a \perp W\} = \{a \colon (a,x) = 0\ \forall x \in W\}\,. \tag{2}$$

Далее будем считать, что скалярное произведение на V невырождено. [3]

[3] Без этого плохо. Возьмём $(a,b) = 0$ всегда. Тогда следующие теоремы не верны.

Теорема 5.2. *Пусть дано пространство V и подпространство $W \subset V$. Тогда* $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$.

□ Пусть $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, и этот базис ортонормированный. Возьмем вектор $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Пусть $W = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, и пусть $a_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n)$ в базисе V. Имеем $x \perp W \;\Leftrightarrow\; (x, a_i) = 0,\ i = \overline{1, k}$. Получаем систему

$$a_i^1 x^1 + \ldots + a_i^p x^p - a_i^{p+1} x^{p+1} - \ldots - a_i^n x^n = 0, \quad i = \overline{1, k}. \tag{3}$$

Вектора a_i линейно независимы, следовательно, ранг её равен k и размерность пространства решений равна $n - k$, т. е. $\dim W^{\perp} = n - k$. ■

Следствие 5.1. $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

□ В самом деле, очевидно, что $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$. Но из теоремы следует, что $\dim (W^{\perp})^{\perp} = n - (n - k) = k = \dim W$, а это означает, что строгого вложения быть не может. ■

Теорема 5.3. *Подпространство W изотропно тогда и только тогда, когда $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$.*

□ Если $a \neq 0$ и $a \in W \cap W^{\perp}$, то $a \perp W$ и W изотропно. Если W изотропно, то существует $a \neq 0$, такой что $a \perp W$, т. е. $a \in W^{\perp}$ и $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$. ■

Следствие 5.2. *W изотропно тогда и только тогда, когда $W^{\perp}$ тоже изотропно. $V = W \oplus W^{\perp}$ тогда и только тогда, когда W не является изотропным.*

Все изотропные вектора, т. е. такие что $(a, a) = 0$, образуют изотропный конус, задаваемый уравнением

$$\left(x^1\right)^2 + \ldots + (x^p)^2 - \left(x^{p+1}\right)^2 - \ldots - (x^n)^2 = 0. \tag{4}$$

Теорема 5.4. *В псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_q$ существуют изотропные подпространства любой размерности от 1 до $n - 1$.*

□ Без ограничения общности можно считать, что $p \leqslant q$. Рассмотрим набор векторов $a_1, \ldots, a_q$:

$$a_i := (1, 0, \ldots, 0, \underset{p+1}{1}, \ldots, \underset{p+i}{1}, 0, \ldots, 0). \tag{5}$$

Очевидно, что пространства $W_i := \langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ изотропны и имеют размерности от 1 до q (так как вектор a_1 ортогонален всем векторам a_i, $i = 1, \ldots, q$). Тогда пространства $W_i^{\perp}$ также будут изотропными и будут иметь размерности от p до $n - 1$, но $q > p$, поэтому утверждение можно считать доказаным.

Другой вариант: Рассмотрим вектор

$$a := (1, 0, \ldots, 0, \underset{p+1}{1}, 0, \ldots, 0). \tag{6}$$

и пространство $W := \langle a \rangle$. Оно, очевидно, изотропно. Пространство $W^{\perp}$ также изотропно, поэтому, там найдется вектор a_1, ортогональный всему $W^{\perp}$. Дополним его до базиса $a_2, \ldots, a_{n-1}$. Тогда пространства $W_i := \langle a_1, \ldots, a_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n - 1$ очевидно будут искомыми. ■

Теорема 5.5. *Любой неизотропный вектор можно включить в ортонормированный базис, умножив на подходящий коэффициент λ.*

□ Проведём индукцию по размерности пространства $n = \dim V$. При $n = 1$ базис состоит из одного вектора λa, где λ — такое число, что $(\lambda a, \lambda a) = \pm 1$. Шаг индукции: пусть теорема доказана для размерности $\dim V < n$. Возьмем $W := \langle a \rangle$ — одномерное неизотропное подпространство, тогда $W^{\perp}$ будет $(n-1)$-мерным неизотропным подпространством, а в нём по предположению индукции существует базис из неизотропных векторов. ■

5.2. Псевдоортогональные матрицы

Определение. Через E_q будем обозначать единичную матрицу размерности n, в которой у последних q единиц на диагонали инвертирован знак. Такие матрицы будем называть *псевдоединичными*. Матрица называется *псевдоортогональной*, если она переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

Теорема 5.6. *Пусть C — матрица перехода между двумя ортонормированными базисами. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *C — псевдоортогональная матрица;*
2. *$C^t E_q C = E_q$;*
3. *$C^{-1} = E_q C^t E_q$;*
4. *C^t также псевдоортогональна.*

□ $\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ $G' = C^t G C$, а так как базисы ортонормированны, то $G' = G = E_q$. Наоборот: если $G' = G = E_q$, то оба базиса ортонормированны и C будет псевдоортогональной.

$\boxed{2 \Leftrightarrow 3}$ $C^t E_q C C^{-1} = E_q C^{-1} \;\Leftrightarrow\; C^t E_q = E_q C^{-1} \;\Leftrightarrow\; E_q C^t E_q = C^{-1}$, так как $E_q^{-1} = E_q$.

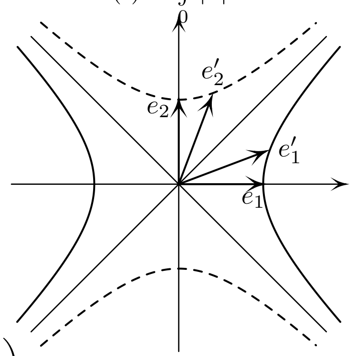
$\boxed{3 \Leftrightarrow 4}$ $C^{-1} E_q = E_q C^t \Leftrightarrow C C^{-1} E_q = C E_q C^t \Leftrightarrow E_q = C E_q C^t = (C^t)^t E_q C^t$, следовательно, по условию 2 матрица C^t также будет псевдоортогональной. В обратную сторону — аналогично, поскольку $C = \left(C^t\right)^t$. ■

Определение. Оператор $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n_q \to \mathbb{R}^n_q$ называется *псевдоортогональным*, если $\big(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y\big) = (x, y)$.

Очевидно, что оператор псевдоортогонален $\Leftrightarrow$ его матрица в ортонормированном базисе псевдоортогональна $\Leftrightarrow$ он переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

5.3. Геометрия пространства $\mathbb{R}^2_1$

Определение. *Псевдодлиной* неизотропного вектора называется величина $|a| := \sqrt{(a, a)}$. *Псевдодлиной* правильно параметризованной кривой, т. е. такой, что $v \neq 0$ и $(v, v) \neq 0$, называется величина $s(t) = \int\limits_0^t |v| dt$.



Псевдодлина кривой не зависит от параметризации по тем же причинам, что и обычная длина. Она сохраняется при псевдоортогональном преобразовании, так как оно сохраняет скалярное произведение.

Теперь рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2_1$. В нём скалярное произведение задаётся в хорошем базисе формулой $(a, b) = xx' - yy'$, и два вектора будут ортогональными, если они симметричны относительно прямой $y = x$.

Стандартный базис e_1, e_2 при псевдоортогональном отображении переходит в ортонормированный базис $e'_1 = (X, Y)$, $e'_2 = (Y, X)$. Следовательно, матрица перехода может иметь один из следующих видов:

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -X & -Y \\ -Y & -X \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Параметризуем единичную псевдоокружность, заданную уравнением $x^2 - y^2 = 1$. Выражая x через y, получим $r(t) = (\pm\sqrt{1 + t^2}, t)$.

Найдём вектор скорости:

$$\dot{r} = (\pm\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, 1), \quad (v, v) = \frac{-1}{1 + t^2}, \quad |v| = \frac{i}{\sqrt{1 + t^2}}. \tag{8}$$

Пусть σ — псевдодлина псевдоокружности. Тогда

$$\sigma(t) = i \int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = i \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right). \tag{9}$$

В данном случае длина получилась чисто мнимая. Это не очень удобно, поэтому имеет смысл вынести i и считать псевдодлиной мнимую часть полученного выражения. Вспоминая, что в нашей параметризации $y = t$, окончательно получаем

$$\sigma = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right). \tag{10}$$

Выражая y через σ, получаем параметризацию псевдоокружности через её длину:

$$y = \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{2} = \operatorname{sh}\sigma, \quad x = \operatorname{ch}\sigma. \tag{11}$$

Таким образом, если псевдодлину использовать в качестве параметра, то все псевдоортогональные матрицы имеют один из четырех видов:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ -\operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & -\operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & -\operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\sigma & -\operatorname{sh}\sigma \\ -\operatorname{sh}\sigma & -\operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Определение. *Псевдовращением* называется преобразование с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Вектор называется *единичным*, если $(a,a)=1$, и *мнимоединичным*, если $(a,a)=-1$. Если вектора a и b оба единичные, то $(a,b)=\operatorname{ch}\theta$, где θ — длина дуги псевдоокружности между концами векторов. Если вектора мнимоединичные, то $(a,b)=-\operatorname{ch}\theta$. В самом деле, примем за e_1 вектор a, тогда $a=(1,0)$ и $b=(\operatorname{ch}\theta,\operatorname{sh}\theta)$. Следовательно $(a,b)=\operatorname{ch}\theta$. Второй случай доказывается аналогично.

На пространстве $\mathbb{R}^2_1$ возникает гиперболическая геометрия и тригонометрия. Вычислим $\operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2)$. Пусть $\vec{a}=(\operatorname{ch}\theta_1,\operatorname{sh}\theta_1)$ и $\vec{b}=(\operatorname{ch}\theta_2,-\operatorname{sh}\theta_2)$, тогда

$$\operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2)=\big(\vec{a},\vec{b}\big)=\operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}\theta_2+\operatorname{sh}\theta_1\operatorname{sh}\theta_2. \tag{14}$$

Пусть $\beta:=\operatorname{th}\sigma=\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\sigma}$, тогда

$$1-\beta^2=1-\frac{\operatorname{sh}^2\sigma}{\operatorname{ch}^2\sigma}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2\sigma}\ \Rightarrow\ \operatorname{ch}\sigma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \operatorname{sh}\sigma=\operatorname{th}\sigma\operatorname{ch}\sigma=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{15}$$

Если использовать β в качестве параметра, то псевдоортогональные матрицы примут вид:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{pmatrix} \tag{16}$$

5.4. Преобразования в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_q$

Зафиксируем в пространстве V некоторый базис, тогда существует взаимно-однозначное соответствие между отображениями $f\colon V\to V$ и их матрицами C_f. Все преобразования пространства, очевидно, образуют группу. Рассмотрим группы ортогональных и псевдо-ортогональных преобразований $\mathbf{O}(n)$ и $\mathbf{O}(n,q)$ соответственно.

Теорема 5.7. *Группа $\mathbf{O}(n)$ состоит из двух компонент: собственных и несобственных преобразований.*

□ В группе $\mathbf{O}(n)$ есть по меньшей мере 2 компоненты: $\det C=1$ и $\det C=-1$. Они не эквивалентны, поскольку матрицу с положительным определителем нельзя непрерывно перевести в матрицу с отрицательным определителем, сохранив невырожденность матрицы. Докажем, что компонент ровно 2. Пусть $\mathcal{A}\in\mathbf{SO}(n)$ — какое-то собственное преобразование. Существует базис, в котором его матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}E &&&&\\ & -E &&&\\ && R(\varphi_1) &&\\ &&& \ddots &\\ &&&& R(\varphi_m)\end{pmatrix}, \tag{17}$$

где первые k векторов отображаются тождественно (подматрица E), следующие l векторов умножаются на -1 (подматрица $-E$), а $R(\varphi_i)$ представляют собой повороты на некоторые углы φ_i. Заметим, что минус единиц в матрице чётное число, так как определитель положительный. Теперь соединим эту матрицу непрерывным путём с единичной матрицей, доказав тем самым то, что $\mathbf{SO}(n)$ линейно связна. Непрерывно изменяя углы φ_i, можно добиться того, что все блоки $R(\varphi_i)$ будут единичными. Сгруппировав минус единицы в пары, заметим, что матрица $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ есть матрица поворота на угол π. Значит, такие блоки также можно перевести в единичные, после чего матрица превратится в единичную. Линейная связность подмножества несобственных преобразований доказывается аналогично. ■

Теперь рассмотрим группу $\mathbf{O}(3,1)$. Скалярное произведение в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^3_1$ задаётся формулой $(a,b)=xx'+yy'-zz'$. Изотропные вектора лежат на конусе $x^2+y^2-z^2=0$. Поверхность $x^2+y^2-z^2=1$ называют единичной *псевдосферой*, а $x^2+y^2-z^2=-1$ — мнимоединичной псевдосферой.

Посмотрим где могут лежать вектора ортонормированного базиса (e_1',e_2',e_3'). Пусть $e_3'=(\alpha,\beta,\gamma)$, тогда e_1' и e_2' лежат в ортогональном дополнении, т. е. имеют такие координаты (x,y,z), что $\alpha x+\beta y-\gamma z=0$. Эта плоскость является сопряженной плоскостью к e_3. Сечение однополостного гиперболоида плоскостью, на которой лежат концы векторов e_1' и e_2', является эллипсом. Таким образом, ортонормированные базисы — это в точности тройки взаимносопряженных векторов.

Теорема 5.8. *Группа $\mathbf{O}(3,1)$ состоит из 4 компонент.*

□ По аналогии с предыдущей теоремой легко видеть, что имеется как минимум 4 компоненты. Ориентация может сохраняться или не сохраняться, и вектор e_3' может либо оставаться на верхней полости гиперболоида, либо нет. Очевидно, что непрерывно из одной компоненты в другую перейти нельзя. Остаётся показать связность каждой из них. Рассмотрим случай компоненты $\mathbf{SO}(3,1)$, содержащей единичную матрицу[4], остальные 3

[4] $\mathbf{SO}(3,1)$, вообще говоря, двусвязно

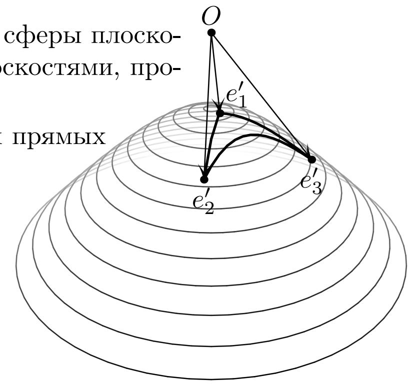
варианта — аналогично. Рассмотрим какой-нибудь положительно ориентированный базис (e_1', e_2', e_3'). Как уже говорилось, вектора e_1' и e_2' лежат на эллипсе. Непрерывным вращением можно повернуть их так, чтобы они были направлены по полуосям эллипса. Остаётся повернуть вектора e_2' и e_3' вокруг e_1' так, чтобы они совпали с координатными осями. Таким образом, мы перевели наш базис в стандартный базис (e_1, e_2, e_3), что и требовалось. ■

5.5. Геометрия на сфере и гиперболоиде

Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ и нижнюю полость $\mathbb{L}^2$ двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, т. е. мнимую псевдосферу в пространстве $\mathbb{R}^3_1$. Сферическую геометрию называют *римановой*, а геометрию на гиперболоиде — *геометрией Лобачевского.*

Теорема 5.9. *На поверхности $\mathbb{L}^2$ из $\mathbb{R}^3$ индуцируется (риманова) положительно определённая метрика.*

□ Возьмем произвольную точку $A \in \mathbb{L}^2$ и рассмотрим вектор $e_3' := \vec{OA} = (x_0, y_0, z_0)$. Касательная плоскость к $\mathbb{L}^2$ в этой точке имеет уравнение $(x - x_0)x_0 + (y - y_0)y_0 - (z - z_0)z_0 = 0$ и является ортогональным дополнением к e_3'. В этой плоскости $(a, a) > 0$, так как это ортогональное дополнение к мнимому единичному вектору. ■



Определение. *Прямыми* на сфере будем называть центральные сечения сферы плоскостями. *Прямыми* на плоскости Лобачевского будем называть сечения $\mathbb{L}^2$ плоскостями, проходящими через начало координат.

Теперь оправдаем данное определение. Как мы сейчас увидим, для таких прямых выполняется неравенство треугольника.

Теорема 5.10. *Для любых трёх точек A_1, A_2, A_3 на $\mathbb{L}^2$ или на $\mathbb{S}^2$, расстояния между которыми равны l_1, l_2, l_3, выполняется неравенство $l_1 + l_2 \geqslant l_3$, причём равенство достигается только тогда, когда точки лежат на одной прямой.*

□ **1°** Геометрия Лобачевского. Пусть $e_i' = \vec{OA_i}$. Достаточно доказать, что $\operatorname{ch}(l_1 + l_2) \geqslant \operatorname{ch}(l_3)$, так как $\operatorname{ch} x$ — монотонно возрастает при $x \geqslant 0$. Имеем

$$\operatorname{ch}(l_1 + l_2) = \operatorname{ch} l_1 \operatorname{ch} l_2 + \operatorname{sh} l_1 \operatorname{sh} l_2 = \operatorname{ch} l_1 \operatorname{ch} l_2 + \sqrt{\operatorname{ch}^2 l_1 - 1}\sqrt{\operatorname{ch}^2 l_2 - 1} \geqslant \operatorname{ch} l_3. \tag{18}$$

Рассмотрим матрицу Грама $G = (g_{ij})$ для векторов e_1', e_2', e_3'. Имеем $\operatorname{ch} l_3 = \operatorname{ch}\big(\angle(e_1', e_2')\big) = -g_{12} = (e_1', e_2')$, и аналогично $\operatorname{ch} l_1 = -g_{23}$, $\operatorname{ch} l_2 = -g_{13}$. Переписав неравенство (18) через коэффициенты матрицы G, получаем

$$\sqrt{(g_{23}^2 - 1)(g_{13}^2 - 1)} \geqslant -g_{12} - g_{23}g_{13} \;\Leftrightarrow\; g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2 + 2g_{12}g_{13}g_{23} - 1 \leqslant 0. \tag{19}$$

Заметим, что в ортонормированном базисе $\det G = \det(-E) < 0$. Значит, при переходе к базису e_i' знак определителя сохранится, т. е.

$$\det G = \begin{vmatrix} -1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & -1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & -1 \end{vmatrix} < 0. \tag{20}$$

В левой части неравенства (19) получилось в точности явное выражение для $\det G$, а мы уже показали, что $\det G < 0$. Равенство будет достигаться в точности тогда, когда вектора e_i' лежат в одной плоскости (т. е. на одной прямой Лобачевского), поскольку определитель Грама обратится в нуль.

2° Сферическая геометрия. Доказательство почти аналогичное первому пункту. На сфере отрезком считается та из двух дуг центрального сечения, длина которой меньше π. Поэтому в том случае, когда сумма длины двух сторон больше π, неравенство очевидно. В противном же случае достаточно показать, что $\cos(l_1 + l_2) \leqslant \cos(l_3)$, так как $\cos x$ монотонно убывает при $x \in [0, \pi]$. Имеем

$$\cos l_1 \cos l_2 - \sqrt{1 - \cos^2 l_1}\sqrt{1 - \cos^2 l_2} \leqslant \cos l_3. \tag{21}$$

Используя обозначения пункта **1°**, приходим к неравенству

$$g_{23}g_{13} - g_{12} \leqslant \sqrt{(1 - g_{23}^2)(1 - g_{13}^2)} \;\Leftrightarrow\; 1 - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 + 2g_{12}g_{23}g_{13} \geqslant 0. \tag{22}$$

Если вектора e_i' ортонормированны, то их матрица Грама единичная, и $\det G = 1 > 0$. Знак $\det G$ инвариантен, следовательно

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{vmatrix} > 0. \tag{23}$$

Отсюда следует, что и выражение в левой части неравенства (22), которое совпадает с $\det G$, также всегда положительно (за исключением того случая, когда e_i компланарны). ■

5.6. Группы движений $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$

Будем обозначать группу движений множества E через $\operatorname{Isom} E$. Как мы знаем, на евклидовой плоскости существует и единственно преобразование, переводящее один ортонормированный репер в ортонормированный. Как мы сейчас увидим, сфера и плоскость Лобачевского в этом отношении ничуть не хуже.

Теорема 5.11. *Преобразование $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$, переводящее ортонормированный репер в ортонормированный, существует и единственно. Группой движений $\mathbb{S}^2$ является $\mathbf{O}(3)$, а группой движений $\mathbb{L}^2$ — «часть» группы $\mathbf{O}(3,1)$, сохраняющая нижнюю полость гиперболоида.*

□ Существование следует из того, что существуют соответствующие ортогональные преобразования пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3_1$, переводящие один репер в другой. Докажем единственность. Пусть f и $\widetilde{f}$ — преобразования, переводящие репер (P, e_1, e_2, e_3) в репер (P', e'_1, e'_2, e'_3). Рассмотрим произвольную точку $A \in \mathbb{L}^2$ и её образы $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$. Покажем, что они совпадают. Проведём прямую (центральное сечение) AP. При изометрическом преобразовании сохраняются длины дуг, следовательно, прямая перейдёт в прямую. В самом деле, если бы это было не так, то нарушилось бы неравенство треугольника: любую кривую можно аппроксимировать ломаными, а сумма длин их будет больше, чем длина отрезка и меньше, чем длина кривой, а по условию расстояния сохраняются. Значит, образами отрезка центрального сечения AP при преобразованиях f и f' будут также некоторые отрезки центральных сечений. Но при изометрии сохраняются и углы, а это значит, что углы между вектором e'_i и отрезками $f(AP)$ и $\widetilde{f}(AP)$ будут совпадать. Значит, направление образа дуги AP определено однозначно. Следовательно, и образ точки A определён однозначно, что и требовалось доказать. ■

Группы преобразований будут трёхмерными, так как каждое преобразование можно представить матрицей 3×3. Условие ортогональности (или псевдоортогональности) даёт 6 соотношений на 9 членов матрицы, следовательно, остается 3 независимых параметра.

Замечание. Имеет место следующее очевидное строгое включение: $\{$ортогональные преобразования$\} \subset$ $\subset \{$аффинные преобразования$\} \subset \{$проективные преобразования$\}$. В проективной группе содержится аффинная группа, а значит, вместе с ней группа движений сферы и плоскости Лобачевского.

5.7. Модель Клейна плоскости Лобачевского

Рассмотрим плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$ и обычную евклидову плоскость α, заданную уравнением $z = -1$. Рассмотрим центральную проекцию конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и $\mathbb{L}^2$ на плоскость α. Образ конуса при этом преобразовании (т. е. окружность на плоскости α) называется *абсолютом.* Вся плоскость Лобачевского, очевидно, при нашем преобразовании биективно отобразится на внутренность круга, границей которого является абсолют. Прямые на плоскости Лобачевского, т. е. центральные сечения гиперболоида, перейдут в хорды абсолюта. Вся эта конструкция и называется *моделью Клейна* геометрии Лобачевского. Заметим, что в этой модели хорошо видно, что через точку, не лежащую на заданной прямой, можно провести сколь угодно много прямых, параллельных данной, т. е. нарушается так называемый *пятый постулат* Евклида (аксиома параллельных). В этом и состоит отличие геометрии Лобачевского от евклидовой геометрии.

Теперь вспомним, что проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — это связка прямых, проходящих через начало координат.

Теорема 5.12. *Группа движений $\mathbb{L}^2$ совпадает с множеством $\mathbf{P}$ проективных преобразований связки, которые сохраняют абсолют.*

□ Рассмотрим проективное преобразование f, сохраняющее абсолют. Пусть оно задаётся матрицей C (определённой с точностью до пропорциональности). Основная идея доказательства в том, чтобы подправить матрицу C так, чтобы она стала псевдоортогональной. Будем рассматривать C как матрицу замены координат. Тогда матрица G скалярного произведения, которая в старом базисе имела вид $G = E_1 = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$, преобразуется по формуле $G' = C^t G C = C^t E_1 C$ и перейдёт в матрицу $G' = \lambda E_1$. В самом деле, абсолют сохраняется, а значит, сохраняется и уравнение конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. А это бывает только тогда, когда оно просто умножается на ненулевой коэффициент. Как известно, при замене координат уравнение конуса (т. е. квадратичная форма $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$) преобразуется по формуле $C^t Q C$ и переходит в квадратичную форму λQ, а значит, и матрица Грама перейдёт в матрицу λE. Далее, поскольку $\det G$ — инвариант, то $\lambda > 0$. Теперь рассмотрим матрицу $\widetilde{C} := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C$. Имеем

$$E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C\right)^t E_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C\right) = \widetilde{C}^t E_1 \widetilde{C}, \tag{24}$$

откуда следует псевдоортогональность матрицы $\widetilde{C}$. Таким образом, установлена биекция между соответствующими группами преобразований. ■

5.8. Метрики на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$

Рассмотрим $\mathbb{S}^2$ в сферических координатах, отмеряя угол θ от оси z. Имеем $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2$. Пусть $\rho = a$, тогда получаем $ds^2 = a^2\sin^2\theta d\varphi^2 + a^2 d\theta^2$. Пусть P — северный полюс сферы, A — произвольная точка на сфере, а l - длина дуги PA. Имеем

$$l = a\theta, \quad ds^2 = dl^2 + a^2\sin^2\frac{l}{a}d\varphi^2. \tag{25}$$

Если $l \to 0$, то $\sin\frac{l}{a} \sim \frac{l}{a}$ и $ds^2 \approx dl^2 + l^2 d\varphi^2$, т.е. метрика эквивалентна метрике в полярных координатах на плоскости. Пусть теперь $\rho = a = 1$, тогда $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Найдём длину s окружности на сфере с фиксированным углом $\theta = r$. Имеем

$$ds^2 = \sin^2 r d\varphi^2 \;\Rightarrow\; ds = \sin r d\varphi \;\Rightarrow\; s = \int\limits_0^{2\pi} \sin r d\varphi = 2\pi\sin r. \tag{26}$$

Площадь этой окружности будет равна

$$S = \iint \sqrt{|G|}d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r} \sin\theta d\theta = 2\pi\left(1 - \cos r\right). \tag{27}$$

Заметим, что если $r \to 0$, то $\cos r \sim 1 - \frac{r^2}{2}$, и $S \to \pi r^2$.

Теперь выведем метрику на $\mathbb{L}^2$. Пусть P — верхняя точка нижней полости гиперболоида, $A \in \mathbb{L}^2$, и θ — длина дуги PA. Параметризуем плоскость Лобачевского: $r = (\operatorname{sh}\theta\cos\varphi, \operatorname{sh}\theta\sin\varphi, -\operatorname{ch}\theta)$. Тогда

$$m_1 = \frac{\partial r}{\partial\theta} = \left(\operatorname{ch}\theta\cos\varphi, \operatorname{ch}\theta\sin\varphi, -\operatorname{sh}\theta\right), \quad m_2 = \frac{\partial r}{\partial\varphi} = \left(-\operatorname{sh}\theta\sin\varphi, \operatorname{sh}\theta\cos\varphi, 0\right). \tag{28}$$

Отсюда $g_{11} = (m_1, m_1) = 1,\ g_{12} = (m_1, m_2) = 0,\ g_{22} = (m_2, m_2) = \operatorname{sh}^2\theta$, и метрика имеет вид $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2$.

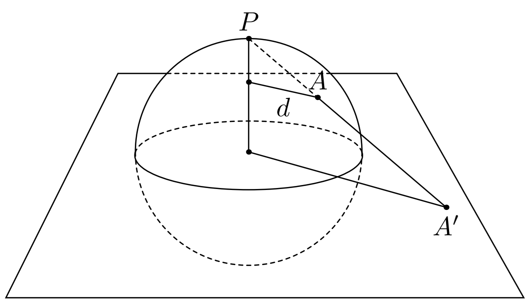
Аналогично случаю $\mathbb{S}^2$ получаем, что длина окружности радиуса $\theta = R$ равна $s = 2\pi\operatorname{sh}R$, а площадь круга того же радиуса равна

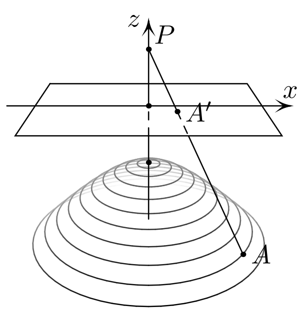
$$\iint \sqrt{|G|}d\varphi d\theta = \iint \operatorname{sh}\theta d\varphi d\theta = 2\pi(\operatorname{ch}R - 1). \tag{29}$$

5.9. Стереографическая проекция $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$

Возьмём точку $A(x, y, z)$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и на плоскости Лобачевского $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ $(z < 0)$ и соединим её прямой с точкой $P(0, 0, 1)$. Если $A \neq P$, то эта прямая пересечёт плоскость xOy в некоторой точке $A'(x', y', 0)$. Очевидно, что такие отображения множеств $\mathbb{S}^2 \setminus \{P\}$ и L^2 на плоскость будет биективными. Пусть точка A' на плоскости имеет полярные координаты (ρ, φ), и d — расстояние от точки A до оси Oz. Имеем

$$\frac{\rho}{d} = \frac{1}{1 - z} \;\Rightarrow\; d = \rho(1 - z) \tag{30}$$





$$
\begin{array}{rl}
\text{Для } \mathbb{S}^2: & \text{Для } \mathbb{L}^2: \\
\rho^2(1-z)^2 = d^2 = 1 - z^2 & \rho^2(1-z)^2 = d^2 = z^2 - 1 \\
\rho^2(1-z) = 1 + z & \rho^2(1-z) = -(1+z) \\
z = \dfrac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} & z = \dfrac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \\
d = \dfrac{2\rho}{1+\rho^2} & d = \dfrac{2\rho}{1-\rho^2}
\end{array}
$$

Отсюда получаем выражение координат точки на поверхности через полярные координаты проекции:

$$
r_{\mathbb{S}}(\rho, \varphi) = \vec{OA} = \left(\frac{2\rho\cos\varphi}{1+\rho^2}, \frac{2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2}, \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}\right) \qquad r_{\mathbb{L}}(\rho, \varphi) = \vec{OA} = \left(\frac{2\rho\cos\varphi}{1-\rho^2}, \frac{2\rho\sin\varphi}{1-\rho^2}, \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1}\right) \tag{31}
$$

Далее, для сферы имеем

$$
m_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = \left(\frac{2\left(1-\rho^2\right)\cos\varphi}{\left(1+\rho^2\right)^2}, \frac{2\left(1-\rho^2\right)\sin\varphi}{\left(1+\rho^2\right)^2}, \frac{4\rho}{\left(1+\rho^2\right)^2}\right), \quad m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(-\frac{2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2}, \frac{2\rho\cos\varphi}{1+\rho^2}, 0\right). \tag{32}
$$

Следовательно,

$$
G_{\mathbb{S}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \end{pmatrix}, \tag{33}
$$

и метрика сферы имеет вид

$$
ds^2 = \frac{4}{\left(1+\rho^2\right)^2} \underbrace{\left(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2\right)}_{\text{метрика плоскости}} = \frac{4}{\left(1 + x'^2 + y'^2\right)^2}\left(dx'^2 + dy'^2\right). \tag{34}
$$

Теперь посмотрим, что будет на $\mathbb{L}^2$. Имеем

$$
m_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = \left(\frac{2\left(1+\rho^2\right)\cos\varphi}{\left(1-\rho^2\right)^2}, \frac{2\left(1+\rho^2\right)\sin\varphi}{\left(1-\rho^2\right)^2}, -\frac{4\rho}{\left(1-\rho^2\right)^2}\right), \quad m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(-\frac{2\rho\sin\varphi}{1-\rho^2}, \frac{2\rho\cos\varphi}{1-\rho^2}, 0\right). \tag{35}
$$

Значит,

$$
G_{\mathbb{L}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2} \end{pmatrix}, \tag{36}
$$

и таким образом, метрика плоскости Лобачевского имеет вид

$$
ds^2 = \frac{4}{\left(1-\rho^2\right)^2} \underbrace{\left(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2\right)}_{\text{метрика плоскости}} = \frac{4}{\left(1 - x'^2 - y'^2\right)^2}\left(dx'^2 + dy'^2\right). \tag{37}
$$

5.10. Метрика поверхности вращения

Рассмотрим кривую $r(\theta) = (l(\theta), 0, z(\theta))$, и пусть θ — натуральный параметр, т. е. $(l'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = 1$. Пусть φ — полярный угол, тогда уравнение поверхности вращения этой кривой вокруг оси Oz принимает вид

$$
r(\theta, \varphi) = \left(l(\theta)\cos\varphi, l(\theta)\sin\varphi, z(\theta)\right). \tag{38}
$$

Тогда

$$
m_1 = \frac{\partial r}{\partial \theta} = \left(l'\cos\varphi, l'\sin\varphi, z'\right), \quad m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(-l\sin\varphi, l\cos\varphi, 0\right). \tag{39}
$$

Так как θ — натуральный параметр, то $|m_1|^2 = l'^2 + z'^2 = 1$, и метрика на поверхности вращения имеет вид

$$
ds^2 = d\theta^2 + l^2(\theta)d\varphi^2, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^2(\theta) \end{pmatrix}. \tag{40}
$$

Теорема 5.13. *Главными направлениями на поверхности вращения являются параллели и меридианы.*[5]

☐ Как мы знаем, главными направлениям соответствуют те и только те ортогональные базисы, относительно которых матрицы первой и второй квадратичных форм диагональны. Формула (40) говорит о том, что в системе координат, порождённой меридианами и параллелями, матрица G диагональна. Покажем, что вторая квадратичная форма в этих координатах также диагональна. В самом деле, имеем

$$r''_{\theta\varphi} = (-l'\sin\varphi, l\cos\varphi, 0)\,, \quad \vec{n} = (z'\cos\varphi, z'\sin\varphi, l') \;\Rightarrow\; l_{12} = \left(\vec{n}, r''_{\theta\varphi}\right) = 0, \tag{41}$$

откуда и следует утверждение теоремы. ■

Теперь найдём главные кривизны поверхности вращения. Для меридиана имеем

$$\varepsilon_1 = m_1 = \left(l', 0, \sqrt{1-(l')^2}\right), \quad \varepsilon_1' = k\varepsilon_2 = l''\left(1, 0, -\frac{l'}{\sqrt{1-(l')^2}}\right) \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \frac{|l''|}{\sqrt{1-(l')^2}}. \tag{42}$$

Остаётся найти λ_2. Кривизна сечения по параллели равна $\frac{1}{l(\theta)}$ (обратная величина к радиусу), а тогда кривизна нормального сечения равна $\lambda_2 = \frac{\cos\alpha}{l}$, где α — угол между вектором нормали $\vec{n}$ и осью Ox. Имеем

$$\vec{n} = \left(\sqrt{1-(l')^2}, 0, -l'\right), \quad \cos\alpha = \sqrt{1-(l')^2} \;\Rightarrow\; \lambda_2 = \frac{\sqrt{1-(l')^2}}{l}. \tag{43}$$

Отсюда гауссова кривизна поверхности вращения при натуральной параметризации равна

$$K = \lambda_1\lambda_2 = \pm\frac{l''(\theta)}{l(\theta)}. \tag{44}$$

Выясним, можно ли представить плоскость Лобачевского как поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$. Метрика на $\mathbb{L}^2$ имеет вид $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2$. Предположим, что мы нашли функцию $l(\theta)$ такую, что $l(\theta) = \operatorname{sh}\theta$ с натуральной параметризацией. Тогда имеем $\operatorname{ch}^2\theta + z'^2 = 1$. Но так как $\operatorname{ch}^2\theta = 1 + \operatorname{sh}^2\theta \geqslant 1$, то получаем противоречие. Значит, этого сделать нельзя (хотя $\mathbb{L}^2$ и является поверхностью вращения в $\mathbb{R}^3_1$).

Теперь сделаем замену $\varphi = \mu\psi$, где $\mu < 1$. Тогда $ds^2 = d\theta^2 + \mu^2\operatorname{sh}^2\theta d\psi^2$. Имеем

$$l'_\theta = x'_\theta = \mu\operatorname{ch}\theta, \quad z'_\theta = \sqrt{1-\mu^2\operatorname{ch}^2\theta}, \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = \frac{z'_\theta}{x'_\theta} = \sqrt{\frac{1}{\mu^2\operatorname{ch}^2\theta} - 1}. \tag{45}$$

Если мы будем вращать такую кривую вокруг оси Oz, то получим поверхность в $\mathbb{R}^3$, локально изометричную плоскости Лобачевского.

5.11. Конформно-евклидовы метрики

Определение. Метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dy^j$ называется *конформно-евклидовой*, если существуют координаты, в которых $ds^2 = f(M)\left(\sum\left(dx^i\right)^2\right)$, где $f(M)$ — функция, зависящая от точки, т. е. $G = f(M)E$ в некотором базисе. Координаты в конформно-евклидовой метрике называются *конформными (изотермическими)*.

Например, метрики на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ конформно евклидовы. Вообще, можно доказать, что метрика на поверхности в $\mathbb{R}^3$ конформно евклидова.

Теорема 5.14. *В конформных координатах углы на карте равны углам в римановой метрике.*

☐ В изотермических координатах имеем $\cos\varphi = \frac{(dr, d\widetilde{r})}{|dr|\cdot|d\widetilde{r}|}$. В силу конформности

$$\cos\varphi = \frac{f(M)\left(dx^1 d\widetilde{x}^1 + \ldots + dx^n d\widetilde{x}^n\right)}{\sqrt{f(M)\sum(dx^i)^2}\sqrt{f(M)\sum(d\widetilde{x}^i)^2}} = \frac{\left(dx^1 d\widetilde{x}^1 + \ldots + dx^n d\widetilde{x}^n\right)}{\sqrt{\sum(dx^i)^2}\sqrt{\sum(d\widetilde{x}^i)^2}}. \tag{46}$$

Правая часть последнего равенства есть в точности выражение для угла между векторами на карте. ■

Теорема 5.15. *Сумма углов треугольника на сфере равна $\alpha + \beta + \gamma = \pi + S_\triangle > \pi$, а на плоскости Лобачевского $\alpha + \beta + \gamma = \pi - S_\triangle < \pi$.*

☐ Сначала докажем утверждение для случая $\mathbb{S}^2$. Без ограничения общности можно считать, что вершина A треугольника ABC совпадает с южным полюсом. Рассмотрим стереографическую проекцию этого треугольника на плоскость xOy, получим треугольник $A'B'C'$, причём $A \mapsto A'(0,0,0)$. При стереографической проекции прямые, проходящие через северный полюс, перейдут в прямые на плоскости. Значит, образы отрезков AB и

[5] Доказательство взято из: С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. «Элементы дифференциальной геометрии и топологии», стр. 396

AC будут отрезками на плоскости. Хорда сферы BC перейдёт в отрезок $B'C'$, а образ «сферического» отрезка BC будет лежать вне треугольника $A'B'C'$ (это очевидным образом следует из того, что хорда лежит ближе к центру окружности, чем дуга центрального сечения). Как было показано выше, метрика сферы конформно евклидова, а по предыдущей теореме углы при конформном отображении сохраняются. Значит, неравенство $\alpha+\beta+\gamma>\pi$ справедливо.

Теперь рассмотрим $\mathbb{L}^2$. Здесь рассуждения аналогичны, а треугольник надо брать такой, чтобы у него одна вершина совпадала с вершиной гиперболоида, т. е. точкой $(0,0,-1)$. Тогда одна из сторон треугольника перейдёт внутрь треугольника, образованного стереографическими проекциями вершин.

Что касается формулы для суммы углов, то она будет доказана позднее. ■

5.12. Конформно эквивалентные метрики

Определение. Пусть даны две области Θ и $\widetilde{\Theta}$ с метриками G и $\widetilde{G}$ соответственно. Если существует диффеоморфизм $f\colon \Theta\to\widetilde{\Theta}$, сохраняющий углы, то он называется *конформным преобразованием* области Θ в $\widetilde{\Theta}$. Метрики G и $\widetilde{G}$ называются *конформно эквивалентными*, если существует конформное преобразование Θ в $\widetilde{\Theta}$.

Лемма 5.16. *Пусть $f\colon V\to\widetilde{V}$ — невырожденное линейное отображение евклидовых пространств. Тогда следующие утверждения эквивалентны для любых векторов $a,b\in V$, $\widetilde{a}=f(a)$, $\widetilde{b}=f(b)$.*

1. $\cos\angle(a,b)=\cos\angle(\widetilde{a},\widetilde{b})$;
2. $(\widetilde{a},\widetilde{b})=\lambda^2(a,b)$, *где λ не зависит от точки;*
3. $|\widetilde{a}|=\lambda|a|$,

□ $\boxed{1\Rightarrow 3}$ Возьмем $e_1,\dots,e_n$ — ортонормированный базис. При отображении f он перейдёт в ортогональный базис, так как углы сохраняются. Покажем, что длины векторов изменяются в одинаковое число раз. Пусть, например, $|f(e_1)|\neq|f(e_2)|$. Тогда, очевидно, получим $\cos 45^\circ=\cos\angle(e_1,e_2)\neq\cos\angle(f(e_1),f(e_2))$ и придём к противоречию.

$\boxed{3\Rightarrow 2}$ Выразим скалярное произведение через длины векторов:

$$(a,b)=\frac{1}{2}\big[(a+b,a+b)-(a,a)-(b,b)\big],\quad (\widetilde{a},\widetilde{b})=\frac{1}{2}\big[(\widetilde{a}+\widetilde{b},\widetilde{a}+\widetilde{b})-(\widetilde{a},\widetilde{a})-(\widetilde{b},\widetilde{b})\big]. \tag{47}$$

Следовательно, $(\widetilde{a},\widetilde{b})=\lambda^2(a,b)$.

$\boxed{2\Rightarrow 1}$ Очевидно. ■

Теорема 5.17. *Метрики областей Θ и $\widetilde{\Theta}$ конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют координаты $(x^1,\dots,x^n)$ в Θ и $(\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n)$ в $\widetilde{\Theta}$ такие, что $d\widetilde{s}^2=F(A)ds^2$.*

□ Пусть координаты в $\widetilde{\Theta}$ выражаются через координаты в Θ по формулам $y^i=y^i(x^1,\dots,x^n)$, и матрица Якоби $\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x^j}\right\}$ невырождена. Рассмотрим кривую $\gamma(t)=\big(x^1(t),\dots,x^n(t)\big)$ в области Θ и её образ $\widetilde{\gamma}=$ $=\big(y^1(x^1(t),\dots,x^n(t)),\dots,y^n(x^1(t),\dots,x^n(t))\big)$.

Имеем

$$\dot{y}^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^1}\dot{x}^1+\ldots+\frac{\partial y^i}{\partial x^n}\dot{x}^n, \tag{48}$$

следовательно, касательный вектор преобразуется следующим образом:[6]

$$\big(\dot{y}^1,\dots,\dot{y}^n\big)^t=J(\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)^t. \tag{49}$$

Отображение касательных пространств линейно, а значит, можно применить доказанную выше лемму. Пусть существует конформное преобразование $f\colon\Theta\to\widetilde{\Theta}$, тогда оно сохраняет углы. Тогда по лемме $\widetilde{G}=F(A)G$. Теперь из этого выведем, что углы сохраняются. Рассмотрим отображение $(x^1,\dots,x^n)\mapsto(\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n)$. Метрики отличаются на множитель, а значит, все углы сохраняются. Тем самым теорема доказана в обе стороны. ■

6. Дифференцирование векторных полей

6.1. Производная по направлению

Определение. Функция $f\colon\Theta\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке a, если существует линейная функция $df(x-a)$ такая, что $f(x)=f(a)+df(x-a)+o(|x-a|)$. Функция f называется *гладкой*, если существуют её частные производные и они непрерывны.

[6] Здесь столбцы записаны как транспонированные строки для экономии места.

Определим понятие *производной функции f по направлению* вектора $\vec{w} \in \Theta$ в точке A следующим образом: возьмем кривую $r(t) = r\big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$, проходящую через точку A и такую, что $\dot{r}(A) = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = \vec{w}$, и положим по определению

$$\frac{df}{dw} := (f \circ r)'(t) = f(r(t))' = \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}^i = (\operatorname{grad} f, w). \tag{1}$$

Корректность очевидна, так как значение производной зависит только от функции и самого направления.

Определение. Пусть в каждой точке пространства задан вектор w. В этом случае говорят, что в пространстве задано *векторное поле*. Оно называется *параллельным*, если в каждой точке его векторы параллельны между собой, сонаправлены и одинаковы по длине.

Рассмотрим теперь функцию $f\colon M^k \to \mathbb{R}$, где M^k — некоторое многообразие. Тогда можно определить производную функции f по касательному вектору w к M^k. Определение будет таким же, только нужно брать кривую на многообразии, и корректность проверяется аналогично.

Координаты $(x^1, \dots, x^k)$ на поверхности можно локально продолжить до координат $(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n)$ в области пространства. В таких координатах области поверхность задается уравнениями $x^i = 0$, $i = k+1, \dots, n$. Функцию f тоже можно продолжить: $f(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$, получится гладкая функция в области. Тогда касательный вектор w имеет координаты $(y^1, \dots, y^k, 0, \dots, 0)$, следовательно, $\frac{df}{dw} = \frac{\partial f}{\partial x^i} y_i$, где $i = 1 \dots k$, так как остальные координаты нулевые. Следовательно, производная по направлению не зависит от от способа продолжения координат на область.

6.2. Дифференцирование векторных полей

Определение. Пусть в области Θ задано векторное поле v и фиксирован вектор w. *Производная векторного поля v по вектору w* обозначается $\nabla_w v := \frac{dv}{dw}$ и определяется следующим образом. Пусть поле имеет координаты $v = v(X^1, \dots, X^n)$, где $X^i = X^i(x^1, \dots, x^n)$. Рассмотрим кривую $r(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$ с касательным вектором $w = \big(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\big)$. Подставим $r(t)$ в уравнение поля, т. е. рассмотрим сложную функцию $v\big(X^1(r(t)), \dots, X^n(r(t))\big) =: V(t)$. Тогда

$$\nabla_w v = V'_t. \tag{2}$$

Через $(\nabla_w v)^k$ будем обозначать k-ю координату производной. Имеем

$$(\nabla_w v)^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\dot{x}^i, \tag{3}$$

т. е. $\nabla_w v$ есть произведение матрицы $\left\{\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right\}$ на вектор w. Определение ∇ не зависит от выбора кривой, так как каждая её координата зависит только от вектора w и координат поля.

Пусть теперь поле v определено не в области, а на многообразии M^n, заданном уравнением $r = r(X^1, \dots, X^n)$, и вектор w касается M^n. Тогда операция $\nabla_w v$ определяется аналогично, только нужно брать кривую, лежащую на поверхности. Также можно определить *производную поля v по полю w* — всё абсолютно аналогично, только направление w будет зависеть от точки.

Лемма 6.1. $f = \text{const} \Leftrightarrow df = 0$, *т. е. все частные производные равны* 0.

$\square$ Слева направо — очевидно. Наоборот: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow$ функция f не зависит от x_i для $\forall\, i \Rightarrow f = \text{const}$. $\blacksquare$

Теорема 6.2. *Векторное поле $v(X^1, \dots, X^n)$ параллельно* $\Leftrightarrow$ $\nabla_w v = 0$ *для всех векторов w в области.*

$\square$ Слева направо утверждение очевидно. Обратно: пусть $\nabla_w v = 0$. Тогда, в частности, $\nabla_{e_i} v = 0$. Значит, все координаты нулевые, т. е. $(\nabla_{e_i} v)^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} = 0$. Следовательно, функции X^k не зависят от x^i для $\forall\, i$, а значит, они постоянны и все векторы поля постоянны. $\blacksquare$

Рассмотрим частный случай векторного поля v на кривой $r(t)$. Введём операцию $\frac{Dv}{dt}$ как производную векторного поля по направляющему вектору кривой:

$$\frac{Dv}{dt} := \nabla_{\dot{r}} v. \tag{4}$$

6.3. Свойства операторов ∇ и $\frac{D}{dt}$ в аффинном пространстве

0° Если v и w — гладкие векторные поля, то $\nabla_w v$ - тоже гладкое поле.

1° Линейность по полю: $\nabla_w(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda \nabla_w v_1 + \mu \nabla_w v_2$ для $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\square$ Непосредственно следует из линейности операции дифференцирования. $\blacksquare$

2° Формула Ньютона – Лейбница: $\nabla_w(fv) = \frac{df}{dw} v + f \nabla_w v$, где $f(x^1, \dots, x^n)$ — гладкая функция.

□ Пусть поле w имеет координаты $(Y^1, \dots, Y^n)$. Имеем $fv = (fX^1, \dots, fX^n)$. Тогда

$$(\nabla_w v)^k = \frac{\partial f X^k}{\partial x^i} Y^i = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i} Y^i}_{\frac{df}{dw}} X^k + f \underbrace{\frac{\partial X^k}{\partial x^i} Y^i}_{\nabla_w v} = \frac{df}{dw} X^k + f (\nabla_w v)^k. \tag{5}$$

■

3° Функциональная линейность по полю: $\nabla_{fw_1 + gw_2} v = f \nabla_{w_1} v + g \nabla_{w_2} v$.
□ Умножение матрицы на вектор есть линейная операция. ■
Теперь сформулируем свойства операции $\frac{D}{dt}$:
0° Если v — гладкое векторное поле, то $\frac{Dv}{dt}$ — гладкая функция по t.
1° Линейность:

$$\frac{D(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)}{dt} = \lambda_1 \frac{D(v_1)}{dt} + \lambda_2 \frac{D(v_2)}{dt}. \tag{6}$$

2° Формула Ньютона – Лейбница:

$$\frac{D(fv)}{dt} = \frac{df}{dt} v + f \frac{Dv}{dt}. \tag{7}$$

Свойство **3°** операции ∇ для операции $\frac{D}{dt}$ не имеет места.

6.4. Оператор ∇ на многообразии (ковариантное дифференцирование)

Рассмотрим поверхность M^n в пространстве $\mathbb{R}^m_q$ и её касательное пространство TM в точке p. Предполагаем, что в случае псевдо-евклидова пространства на M^n индуцируется риманова положительно определённая метрика. Пусть $v(x^1, \dots, x^n)$ — поле касательных векторов к поверхности, а w — некоторый касательный вектор. В TM определён оператор $\nabla_w v$. В общем случае вектор $\nabla_w v$ не касается поверхности M^n (например, на сфере), и это плохо. Определим другую операцию дифференцирования так, чтобы не вылезать из касательного пространства. Тот оператор, который мы определили выше, будем обозначать через $\nabla^0_w v$, а новую операцию определим так:

$$\nabla_w v := \mathrm{Pr}_{TM}\, \nabla^0_w v, \tag{8}$$

где Pr_{TM} есть ортогональная проекция на касательное пространство TM.

Перечислим свойства новой операции $\nabla_w v$. Легко видеть, что имеют место свойства **0°**-**2°**, и доказательства их практически аналогичны.

0° Пусть v и w - гладкие поля. Тогда $\nabla_w v$ тоже гладкое.

□ Ортогонализуем базис в TM. Заметим, что это гладкий процесс. Поскольку пространство не изотропное, то $\mathbb{R}^m = TM \oplus TM^\perp$. Проекция — гладкая операция, а значит, и $\nabla_w v$ будет гладкой. ■

1° Линейность: проекция линейна, поэтому это свойство выполняется.

2° Формула Ньютона – Лейбница: очевидно.

Замечание. ∇ является внутренней операцией, и она зависит только от касательной плоскости в точке.

6.5. Символы Кристоффеля и их свойства

Пусть поверхность M^n в $\mathbb{R}^m_q$ задана уравнением $r = r(x^1, \dots, x^n)$, а $y^1, \dots, y^m$ — аффинные координаты в пространстве. Рассмотрим касательные поля $v(X^1, \dots, X^n)$ и $w(Y^1, \dots, Y^n)$ на M, где $X^i = X^i(x^1, \dots, x^n)$ и $Y^i = Y^i(x^1, \dots, x^n)$. Пусть $TM = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$. Займёмся вычислением координат $\nabla_w v$. Имеем

$$\nabla_w v = \nabla_{Y^j m_j} v = \left(\nabla_{m_j}(X^i m_i)\right) Y^j = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} m_i + X^i \nabla_{m_j} m_i\right) Y^j. \tag{9}$$

Введём некоторые обозначения. Выражения $\Gamma^k_{ij} := (\nabla_{m_j} m_i)^k$ называются *символами Кристоффеля.*

Поменяв индекс суммирования i в формуле (9) на k, преобразуем её к виду

$$\left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} m_k + \Gamma^k_{ij} m_k X^i\right) Y^j = \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} X^i\right) Y^j m_k. \tag{10}$$

Окончательно получаем

$$(\nabla_w v)^k = \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} X^i\right) Y^j. \tag{11}$$

Таким образом, в n-мерном пространстве имеется n^3 символов Кристоффеля.

Теперь рассмотрим кривую $r = r\big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big) \subset M^n$. Тогда $Y^i = \dot{x}^i$, и для $\frac{D}{dt}$ в криволинейных координатах поверхности получаем выражение

$$\left(\frac{Dv}{dt}\right)^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^j \dot{x}_i. \tag{12}$$

Теорема 6.3. *Координаты на поверхности являются аффинными тогда и только тогда, когда* $\Gamma^k_{ij} = 0$.

□ Если координаты аффинные, то очевидно, что все символы Кристоффеля нулевые. Наоборот, пусть $\Gamma^k_{ij} = 0$, то есть $\nabla_{m_i} m_j = 0$. Пусть $w = Y^j m_j$, тогда $\nabla_w m_i = 0$ в силу свойства функциональной линейности. Но по теореме (6.2)[7]векторы m_i постоянны. Рассмотрим какую-нибудь аффинную систему координат и запишем матрицу Якоби перехода к этим координатам. Поскольку вектора m_i постоянны, то и эта матрица будет постоянной, откуда и следует, что наша система координат также аффинная. ■

Теорема 6.4. *Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам:* $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

□ Рассмотрим поверхность $r = (y^1, \ldots, y^m) \subset \mathbb{R}^m$, где $y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$, а x^i — криволинейные координаты. Надо доказать, что $\nabla_{m_i} m_j = \nabla_{m_j} m_i$. Для этого достаточно доказать, что $\nabla^0_{m_j} m_i = \nabla^0_{m_i} m_j$ (в продолженных координатах). Имеем $m_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$. Тогда

$$\frac{\partial m_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i \partial x^j}, \ldots, \frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i \partial x^j}\right). \tag{13}$$

Поскольку все функции гладкие, то от порядка дифференцирования ничего не зависит. ■

Теорема 6.5 (v2.0 by Shashkov). *Пусть есть три векторных поля v_1, v_2, w на многообразии $M \in \mathbb{R}^m$, тогда*

$$\frac{d(v_1, v_2)}{dw} = (\nabla_w v_1, v_2) + (v_1, \nabla_w v_2). \tag{14}$$

□ Для $\nabla^0_w v$ это свойство можно проверить напрямую: пусть $v_1 = (X_1^1, \ldots, X_1^n)$, $v_2 = (X_2^1, \ldots, X_2^n)$, $w = (Y^1, \ldots, Y^n)$. Тогда $\frac{d(v_1,v_2)}{dw} = (X_1^i \frac{\partial X_2^i}{\partial x_j}) Y^j + Y^j (\frac{\partial X_1^i}{\partial x_j} X_2^i) = \big(\nabla^0_w v_1, v_2\big) + \big(v_1, \nabla^0_w v_2\big)$. Далее имеем: $\nabla^0_w v_1 = \nabla_w v_1 + v_1'$, $\nabla^0_w v_2 = \nabla_w v_2 + v_2'$ (вектора v_1' и v_2' лежат в ортогональном дополнении к касательному пространству). Тогда $(v_1', v_2) = (v_1', v_2) = 0$, так как v_1, v_2 — касательные, следовательно, $\frac{d(v_1,v_2)}{dw} = (\nabla_w v_1, v_2) + (v_1, \nabla_w v_2)$. ■

Следствие 6.1. *Пусть есть 2 векторных поля $v(t)$, $w(t)$ в $\mathbb{R}^m$ на кривой $r = r(t)$, тогда*

$$\frac{d(v, w)}{dt} = \left(\frac{Dv}{dt}, w\right) + \left(v, \frac{Dw}{dt}\right). \tag{15}$$

6.6. Тождества Кристоффеля

Выведем явные формулы для Γ^k_{ij}. Воспользуемся только что доказанной теоремой, применив её к векторам m_i и m_j. Имеем $(m_i, m_j) = g_{ij}$, тогда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = (\nabla_{m_k} m_i, m_j) + (m_i, \nabla_{m_k} m_j). \tag{16}$$

Так как $\nabla_{m_k} m_i = \Gamma^\alpha_{ik} m_\alpha$, то

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^\alpha_{ik} g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{jk} g_{\alpha i}. \tag{17}$$

Полученное равенство можно записать для любого набора индексов i, j, k. Поэтому можно написать систему уравнений, получающихся путём циклической перестановки индексов:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \Gamma^\alpha_{ki} g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{jk} g_{i\alpha}, \\
\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} &= \Gamma^\alpha_{ij} g_{\alpha k} + \Gamma^\alpha_{ki} g_{j\alpha}, \\
\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} &= \Gamma^\alpha_{jk} g_{\alpha i} + \Gamma^\alpha_{ij} g_{k\alpha}.
\end{aligned}$$

[7]Эта теорема про $\nabla^0_w v$. Чего с этим делать простого еще не придумал

Из этой системы получаем *первое тождество Кристоффеля* (суммирование идёт по индексу α):

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} g_{\alpha k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{18}$$

Пусть $G^{-1} = \left\{g^{\alpha\beta}\right\}$. Умножив каждое равенство Кристоффеля на $g^{k\beta}$ и просуммировав по k, получим $\Gamma^{\alpha}_{ij} g_{\alpha k} g^{k\beta}$ (суммирование по k и α). Поскольку $g_{\alpha k} g^{k\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta; \\ 1, & \alpha = \beta, \end{cases}$ то

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\alpha}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{19}$$

Это *второе тождество Кристоффеля* (суммирование по k).

Замечание. Из тождеств Кристоффеля следует, что символы Кристоффеля зависят только от метрики, то есть дифференцирование есть внутренняя операция.

Всё вышесказанное верно и для абстрактных многообразий с римановой метрикой.

6.7. Геодезическая кривизна

Пусть нам задано многообразие $M^n \subset \mathbb{R}^m$ с локальной параметризацией $r = r\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ и локальным базисом $m_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$, и кривая $r(t) = \left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right)$ на M^n. Пусть s - натуральный параметр для кривой, т.е. $ds = |v| dt$, и $\frac{dr}{ds} = \varepsilon_1$ — касательный вектор длины 1. Обычная кривизна в евклидовом пространстве задается формулой: $k\varepsilon_2^0 = \frac{D^0 \varepsilon_1}{ds}$.

Определение. Пусть $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = k_g \varepsilon_2$. Величина k_g называется *геодезической кривизной* и представляет собой кривизну линии внутри изучаемой поверхности. Если $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = 0$, то считаем, что $k_g := 0$.

Лемма 6.6. *Если $k_g \neq 0$, то $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1$.*

□ Имеем $(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 1$. Продифференцировав, получим $0 = \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_1)}{ds} = 2\left(\frac{D\varepsilon_1}{ds}, \varepsilon_1\right) = 2k_g(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$. Но так как $k_g \neq 0$, то $(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 0 \Rightarrow \varepsilon_2 \perp \varepsilon_1$. ■

Лемма 6.7. $k_g \varepsilon_2 = \operatorname{Pr} k\varepsilon_2^0$.

□ В самом деле, $k_g \varepsilon_2 = \frac{D\varepsilon_1}{ds} = \operatorname{Pr} \frac{D^0 \varepsilon_1}{ds} = \operatorname{Pr}(k\varepsilon_2^0)$. ■

6.8. Геодезические линии

Определим понятие кривых, являющихся аналогами прямых линий в $\mathbb{R}^m$.

Определение. Кривая $r = r(t)$ на поверхности называется *геодезической*, если $k_g = 0$, то есть $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = 0$.

Замечание. Если для геодезической взять параметр $t = \lambda s$, то $\dot{r} = v = \mu\varepsilon_1$, а значит, $\frac{Dv}{dt} = \frac{D(\mu\varepsilon_1)}{\lambda ds} = 0$. Следовательно, для определения геодезической годится любой параметр, пропорциональный натуральному.

Лемма 6.8. *Пусть дана кривая $r = r(t)$, $v = \dot{r}$, и $\frac{Dv}{dt} = 0$. Тогда она будет геодезической и параметр t пропорционален натуральному.*

□ Покажем, что $|v| = \text{const}$. В самом деле, $\frac{D(v,v)}{dt} = \left(\frac{Dv}{dt}, v\right) + \left(v, \frac{Dv}{dt}\right) = 0 \Rightarrow |v| = \text{const}$. Следовательно, $v = \mu\varepsilon_1$, и по теореме (2.2) имеем $t = \lambda s$. Отсюда $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = \frac{D(\frac{1}{\mu}v)}{d(\frac{t}{\lambda})} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{Dv}{dt} = 0$. Значит, кривая геодезическая. ■

В своё время мы «объявили» прямыми по сфере и плоскости Лобачевского центральные сечения этих поверхностей плоскостями. Покажем теперь, что они действительно «прямые» в геодезическом смысле.

Теорема 6.9. *На $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ геодезическими являются плоские центральные сечения.*

□ Параметризуем кривую $r(s)$ сечения сферы натуральным параметром. Её касательный вектор ε_1, очевидно, лежит в секущей плоскости и в касательной плоскости к поверхности. Пусть $\vec{OA}$ — радиус-вектор точки на кривой. Он ортогонален касательной плоскости. Так как $\frac{D^0\varepsilon_1}{ds} \perp \varepsilon_1$ и $\vec{OA} \perp \varepsilon_1$, то вектор $\frac{D^0\varepsilon_1}{ds}$ тоже ортогонален к касательной плоскости, и $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = \operatorname{Pr}\frac{D^0\varepsilon_1}{ds} = 0$. Следовательно центральные сечения являются геодезическими. Ниже мы докажем, что других геодезических нет, а случай плоскости Лобачевского рассматривается аналогично: для псевдосферы все рассуждения с ортогональностью векторов переносятся дословно. ■

Определение. Рассмотрим поверхность M^n, кривую $r(t)$ на M^n и поле $v(t)$ касательных векторов к M^n на кривой. Будем говорить, что *поле параллельно вдоль кривой*, если $\frac{Dv}{dt} = 0$.

Используя это определение, можно сказать, что кривая является геодезической $\Leftrightarrow$ поле $\varepsilon_1(s)$ параллельно вдоль этой кривой.

6.9. Дифференциальные уравнения для геодезических

Как мы знаем, k-я координата производной вектора $v = (X^1, \ldots, X^n)$ вдоль кривой $r(t) = r\big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)$ равна $\left(\frac{Dv}{dt}\right)^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \dot{x}_j$. Кривая является геодезической $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{Dv}{dt}\right)^k = 0$. Получаем систему уравнений:

$$\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \dot{x}_j = 0,\ k = \overline{1,\, n}. \tag{20}$$

В нашем случае $v(t) = \dot{r} = \big(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n\big)$, и окончательно система имеет вид

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0,\ k = \overline{1,\, n}. \tag{21}$$

Очевидно, что кривая является геодезической $\Leftrightarrow$ она удовлетворяет этим уравнениям.

А вот теперь применим теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями, т. е. точкой $\vec{x}_0$ на поверхности и направлением $\vec{v}_0$. Таким образом, в окрестности любой точки в заданном направлении выходит одна и только одна геодезическая. Отметим также, что решение нашей системы гладко зависит от начальных условий.

Теперь теорему о «прямых» на сфере и плоскости Лобачевского можно усилить утверждением о том, что других геодезических, кроме центральных сечений, там не бывает.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится

Определение. Рассмотрим точку $A(x^1, \ldots, x^n)$ на поверхности и касательный вектор $v(z^1, \ldots, z^n)$ в этой точке. Проведём геодезическую $\gamma(t)$, такую, что $\dot{\gamma}(0) = v$. Рассмотрим точку $\gamma(t_0) = (y^1, \ldots, y^n)$ — образ точки при движении по геодезической за время $t = t_0$. Отображение $(x^1, \ldots, x^n, z^1, \ldots, z^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$. называется *экспоненциальным отображением.*

Здесь и далее есть лажа. Только её плохо видно.

Теорема 6.10. *Для любых двух точек в достаточно малой окрестности существует единственная геодезическая, проходящая через эти две точки.*

$\square$ Мы знаем, что найдётся такая окрестность нуля, что геодезические существуют при $t \in [0, 1]$ для всех начальных условий из этой окрестности.

Рассмотрим экспоненциальное отображение точки $A(x^1, \ldots, x^n)$ в точку $B(y^1, \ldots, y^n)$ за время $t = \alpha$. Заметим, что координаты точки B также гладко зависят от начальных условий. Покажем, что матрица Якоби нашего отображения невырождена, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

$$J = \frac{\mathcal{D}(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)}{\mathcal{D}(x^1, \ldots, x^n, z^1, \ldots, z^n)} = \begin{pmatrix} E & \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \\ 0 & * \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Покажем, что $\det J \neq 0$ в точке A. В самом деле, если точки A и B близки, то $\vec{AB} = \alpha v\big(1 + o(|v|)\big)$. Следовательно, $\frac{\partial y}{\partial z^i} = (0, \ldots, \underset{i}{\alpha}, \ldots, 0)$, т. е. $\left\{\frac{\partial y^i}{\partial z^j}\right\} = \alpha E$. Отсюда следует, что $\det J \neq 0$ в некоторой окрестности, а значит, экспоненциальное отображение обратимо (по крайней мере локально). Из всего этого вытекает, что существует геодезическая между любыми двумя достаточно близкими точками, так как для точки B с помощью обратного отображения можно найти вектор v, такой, что геодезическая из точки A вдоль вектора v попадёт в B. Заметим также, что такая геодезическая будет единственной. $\blacksquare$

Геодезические, выпущенные из одной точки во всех направлениях, образуют *геодезический шар* (если зафиксировать длину отрезка каждой геодезической).

6.10. Полугеодезические координаты на двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение. Если метрика поверхности имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + g(u^1, u^2)(du^2)^2$, то координаты (u^1, u^2) называются *полугеодезическими.*

Лемма 6.11. *В полугеодезических координатах u^1-линии являются геодезическими.*

$\square$ Рассмотрим некоторую u^1-линию γ. Её параметр $s = u^1$ будет натуральным, так как при $u^2 = \mathrm{const}$ имеем $ds^2 = (du^1)^2$, то есть $ds = du^1$ и $|\dot{\gamma}| \equiv 1$. Нам нужно доказать, что $\frac{Dm_1}{ds} = 0$. Поскольку $\frac{Dm_1}{ds} = \nabla_{m_1} m_1 = \Gamma^{\alpha}_{11} m_{\alpha}$, то нужно доказать, что $\Gamma^\alpha_{11} = 0$ для $\forall\,\alpha$. Так как координаты полугеодезические, то $g_{11} = 1$ и $g_{12} = 0$, а значит, $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} = 0$. Тогда

$$\Gamma^\alpha_{11} = \frac{1}{2} g^{\alpha k} \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} \right) = 0, \tag{23}$$

что и требовалось. ■

Теорема 6.12. *В окрестности любой точки поверхности существуют полугеодезические координаты.*

□ Проведём на поверхности произвольную гладкую линию $r(v)$ с натуральной параметризацией. Введем новые координаты (v^1, v^2). В качестве v^2 возьмём параметр кривой v, а из каждой точки кривой вдоль вектора $\vec{n} \perp \dot{r}$ пустим геодезическую. В качестве второй координаты v^1 возьмем натуральный параметр этих геодезических. На самой кривой вектора m_i ортогональны, значит это действительно координаты. Остаётся показать, что они полугеодезические. В самом деле, $g_{11} = 1$, так как параметр u натуральный. Докажем, что $g_{12} = 0$. В любой точке кривой r координаты ортогональны, а значит на этой кривой $g_{12} = 0$. Так как $\frac{\partial g_{11}}{\partial v^i} = 0$, то

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} \right) = g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial v^1}. \tag{24}$$

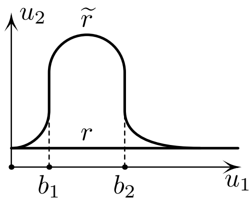
Теперь заметим, что $\Gamma^\alpha_{11} = (\nabla_{m_1} m_1)^\alpha = 0$, так как v^1-линии геодезические. Значит, $g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = \Gamma^1_{11} = 0$. По формуле для обратной матрицы $g^{12} = \frac{g_{12}}{\det G}$, откуда $\frac{g_{12}}{\det G} \frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = 0$. Тогда либо $g_{12} = 0$ и всё доказано, либо $\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = 0$. Но в этом случае g_{12} не зависит от v^1, а поскольку на кривой r имеем $g_{12} = 0$, то $g_{12} \equiv 0$. ■

Следствие 6.2. *Любую геодезическую можно (локально) включить в полугеодезические координаты.*

□ Проведем кривую, ортогональную этой геодезической. Через каждую точку на ней проведем ещё геодезические, и таким образом получим координаты. ■

А теперь докажем экстремальное (и пожалуй, основное) свойство геодезических линий.

Теорема 6.13. *Геодезическая локально кратчайшая.*



□ Рассмотрим геодезическую r. Проведём кривую γ, ортогональную ей, и включим r в полугеодезические координаты, тогда она будет некоторой u^1-линией. Рассмотрим другую кривую $\widetilde{r}$, проходящую через точку A пересечения γ и r. Назовём точку в области изменения параметра *хорошей*, если в ней можно выразить u^2 через u^1, и *плохой* в противном случае (на рисунке b_1 и b_2 — плохие точки). На множестве χ хороших точек, выражая координату u^2 кривой $\widetilde{r}$ через u^1, получаем, что длина этого куска кривой будет равна

$$\int\limits_\chi \sqrt{1 + g_{22} \left(\frac{du^2}{du^1} \right)^2} du^1, \tag{25}$$

в то время как длина геодезической на хорошем множестве будет равна $\int du^1$, т. е. меньше, чем $\widetilde{r}$. Для геодезической плохих точек нет вообще, а длина кривой $\widetilde{r}$ по плохому множеству неотрицательна. Короче говоря, наличие плохих точек делает кривую ещё длиннее, а для хорошего множества у нас есть формула (25). ■

6.11. Продолжаемость геодезических

Определение. Если геодезическая продолжается на поверхности бесконечно долго, то поверхность называется *геодезически полной.*

Теорема 6.14. *Для любого компакта $K \subseteq M^n$ геодезическую в нём можно продолжить до ∂K.*

□ Как уже было доказано, для любой точки существует окрестность, в которой геодезические существую по всем направлениям. Покажем, что можно найти такую систему шаровых окрестностей, что геодезические продолжаются до их границ. В самом деле, геодезическая гладко зависит от начальных условий, т. е. для любого вектора v существует такая коническая окрестность, что геодезическая пройдёт через «дно» конуса. Таким образом, получаем покрытие окрестности конусами, а в силу компактности сферы найдется минимальный радиус, для которого это возможно по всем направлениям. Далее, покроем весь компакт такими окрестностями, выделим конечное покрытие, и таким образом для любой начальной точки найдется конечная система окрестностей, через которую геодезическая пройдёт за конечное время и выйдет на ∂K. ■

Следствие 6.3. *Компактная поверхность геодезически полна.*

6.12. Параллельный перенос на многообразиях

Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^m$ — поверхность с римановой метрикой.

Векторное поле параллельно, если $\nabla_w v = 0$ для всех w. На самом деле достаточно выполнение этого условия для $w = m_i$, то есть достаточно, чтобы $\left(\nabla_{m_j} v\right)^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} X^i = 0$ — система из n^2 уравнений.

Определение. Пусть дано касательное векторное поле $v = v(t)$ на кривой $r = r(t) \in M^n \subset \mathbb{R}^m$. Оно называется *параллельным вдоль* $r(t)$, если $\frac{Dv}{dt} = 0$, т. е. $\frac{D^0 v}{dt} \perp M^n$.

Пример 12.1. Возьмем геодезическую $r(s)$ и рассмотрим поле $v = \dot{r}$. Оно параллельно, так как по определению геодезической $\frac{Dv}{ds} = 0$.

Сформулируем некоторые свойства полей, параллельных вдоль кривой.

1° Если поле v параллельно, то λv тоже параллельно.

2° Определение параллельности не зависит от параметризации кривой: $\frac{Dv}{d\tau} = \frac{Dv}{dt}\frac{dt}{d\tau} = 0 \cdot \frac{dt}{d\tau} = 0$.

3° Если поля v_1 и v_2 параллельны, то поле $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ также параллельно.

Лемма 6.15. *Пусть векторные поля a и b параллельны по кривой $r(t)$. Тогда $(a, b) = \mathrm{const}$.*

□

$$\frac{d(a,b)}{dt} = \left(\frac{Da}{dt}, b\right) + \left(a, \frac{Db}{dt}\right) = (0, b) + (a, 0) = 0. \tag{26}$$

■

Следствие 6.4. *Если вектор $\vec{a}$ параллелен вдоль кривой, то вдоль неё он имеет постоянную длину.*

Следствие 6.5. *Если a и b параллельны, то угол между a и b постоянен, т. к.* $\frac{(a,b)}{|a||b|} = \cos(\angle(a,b)) = \mathrm{const}$.

Напишем уравнение параллельности векторного поля a вдоль кривой:

$$\left(\frac{Da}{dt}\right)^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \dot{x}^j = 0,\ k = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

Фиксируем точку A_0 на кривой и вектор $\vec{a_0} = \left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$. Тогда решение системы (27) локально существует и единственно.

Определение. *Параллельным переносом* вектора a_0 по $r(t)$ называется параллельное поле $a(t)$, такое, что $a(t_0) = a_0$.

Из локального существования параллельного поля легко вывести его существование на произвольном отрезке кривой $r(t)$. В окрестности каждой точки решение соответствующей системы существует, а из покрытия окрестностями отрезка можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема 6.16. *Для вектора a_0 в точке A_0 существует единственное параллельное векторное поле $a(t)$.*

□ Существование параллельного векторного поля уже фактически было доказано. Остаётся доказать единственность. Пусть существует 2 решения a_1 и a_2, тогда у всех векторов $a_1(t)$ и $a_2(t)$ одинаковая длина и угол между ними. А в нулевой момент времени $|a_1| = |a_2| = |a_0|$, и угол между ними равен нулю. Следовательно, векторные поля a_1 и a_2 совпадают. ■

Рассмотрим локальный базис из касательных векторов m_i в некоторой точке A_0. Перенесём их параллельно вдоль кривой, получим новый базис $\{\widetilde{m_i}\}$. При параллельном переносе вследствие сохранения углов базис перейдёт в базис. Разложим $a(t)$ по новому базису: $a(t) = \widetilde{X}^i \widetilde{m}_i$.

Лемма 6.17. *Векторное поле $a(t)$ параллельно $\Leftrightarrow$ его координаты $(\widetilde{X}^1, \ldots, \widetilde{X}^n)$ в базисе $\{\widetilde{m}_i\}$ постоянны.*

□ Для доказательства достаточно разложить вектор по базису. ■

Теперь дадим «внутреннее» определение ковариантной производной $\frac{D}{dt}$. Для этого введём следующее обозначение (оно будет использоваться и в дальнейшем). Рассмотрим касательное поле $a(t)$ на кривой, перенесем вектор $a(t+h)$ в точку t (назад) параллельно. Результат такого переноса будем обозначать через $\widehat{a}(t)$.

Теорема 6.18. *Имеет место равенство*

$$\frac{Da}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\widehat{a}(t) - a(t)}{h}. \tag{28}$$

□ Пусть $\{\widetilde{m}_i\}$ — параллельный базис. Тогда $a = \widetilde{X}^i(t)\widetilde{m}_i$. Продифференцируем по правилу Лейбница:

$$\frac{Da}{dt} = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}\widetilde{m}_i + \widetilde{X}^i \frac{D\widetilde{m}_i}{dt} = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}\widetilde{m}_i. \tag{29}$$

Второе слагаемое обратится в 0, так как базис $\{\widetilde{m}_i\}$ параллелен.

Теперь преобразуем правую часть. Имеем $a(t+h) = \widetilde{X}^i(t+h)\widetilde{m}_i$. В параллельном базисе координаты не меняются, следовательно, $\widehat{a}(t) = \widetilde{X}^i(t+h)\widetilde{m}_i$. Найдём производную для каждой координаты в точке t:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{X}^i(t+h) - \widetilde{X}^i(t)}{h} = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}. \tag{30}$$

Получилось выражение для i-й координаты вектора в преобразованной левой части требуемого равенства. ■

6.13. Параллельный перенос по замкнутому контуру. Формула Гаусса–Бонне

Рассмотрим двумерное многообразие $M \subset \mathbb{R}^m$ и кривую $r(t)$ на нём. Пусть также задано два векторных поля $a(t)$ и $\widetilde{a}(t)$ с векторами постоянной длины, и поле $\widetilde{a}(t)$ параллельно вдоль $r(t)$.

Выясним «физический смысл» производной $\frac{D}{dt}$. Обозначим через $\Delta\varphi$ величину изменения угла между параллельным полем и полем $a(t)$.

Теорема 6.19. $|\dot\varphi| = \left|\frac{Da}{dt}\right|$.

□ Применяя обозначения предыдущего параграфа, имеем

$$\left|\frac{Da}{dt}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\widehat{a}(t) - a(t)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\widehat{a}(t) - a(t)}{\Delta\varphi}\right| \cdot \left|\frac{\Delta\varphi}{h}\right|. \tag{31}$$

Первый множитель стремится к 1, так как это первый замечательный предел, а второй и есть $|\dot\varphi|$. ■

Таким образом, ковариантная производная — это скорость вращения векторного поля.

Пусть теперь $|a| = 1$ и пусть M ориентируемо. В каждой точке кривой выберем вектор $b \in TM$ такой, что $|b| = 1$, $b(t) \perp a(t)$ и пара (a, b) положительно ориентирована. Существование требуемого поля $b(t)$ очевидно. Имеем $|\dot\varphi| = \left|\frac{Da}{dt}\right|$, и $\left(\frac{Da}{dt}, b\right) = \pm\left|\frac{Da}{dt}\right|$. Так как $|b| = 1$ и $\frac{Da}{dt} \perp a$, то $\frac{Da}{dt} \| b$. Получаем формулу для поворота векторного поля:

$$\Delta\varphi = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{Da}{dt}, b\right) dt = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{D^0 a}{dt}, b\right) dt. \tag{32}$$

Последнее равенство следует из того, что $\frac{D^0 a}{dt} = \frac{Da}{dt} + a'$, где a' ортогонален поверхности, и при скалярном умножении на b получится 0.

Рассмотрим гладкий замкнутый контур на поверхности. Пусть на нём задано векторное поле касательных векторов $a = \varepsilon_1(s)$, тогда $\dot\varepsilon_1 = k_g b$ и $\Delta\varphi = \int\limits_{s_0}^{s} k_g ds$.

Определение. Величина $\oint k_g ds$ называется *угловым дефектом* поверхности.

Пример 13.1. Рассмотрим параллельный перенос вектора на сфере. Возьмём вектор, касающийся экватора, перенесём его вдоль экватора, затем по меридиану до полюса, а затем — в исходную точку (каждый сдвиг — на $\frac{1}{4}$ длины окружности). В результате вектор повернётся на $\frac{\pi}{2}$.

Теорема 6.20. *Сумма углов геодезического треугольника равна* $\alpha + \beta + \gamma = \pi - \Delta\varphi$.

□ Рассмотрим вектор ε_1, направленный из вершины A треугольника вдоль стороны AB. Перенесем его параллельно от A до B и повернем на угол $\pi - \beta$, далее параллельно до C и повернем на $\pi - \gamma$, далее параллельно до A и повернем на $\pi - \alpha$. В результате вектор совместится с самим собой, и общий поворот будет равен 2π. Следовательно, $(\pi - \beta) + (\pi - \gamma) + (\pi - \alpha) = 2\pi + \Delta\varphi$. Заметим, что при переносе воль геодезических угол не меняется, так как $k_g = 0$. Отсюда $\alpha + \beta + \gamma = \pi - \Delta\varphi$. ■

Покажем, что гауссова кривизна есть внутренний инвариант поверхности, т. е. зависит только от метрики. [8]

Лемма 6.21. *Если матрица Грама диагональна, т. е. метрика имеет вид* $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$, *то имеет место следующая формула для гауссовой кривизны поверхности:*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right]. \tag{33}$$

□ Пусть вторая квадратичная форма равна $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$. Имеем $E = (r_u, r_v)$. Пусть $\vec{l} := \frac{r_u}{\sqrt{E}}$ и $\vec{m} := \frac{r_v}{\sqrt{G}}$ — нормированные вектора r_u и r_v соответственно, а $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности. Мы знаем формулу для гауссовой кривизны: $K = \frac{LN - M^2}{EG}$, где, как известно, $L = (r_{uu}, n)$, $M = (r_{uv}, n)$, $N = (r_{vv}, n)$. Имеем

[8] Доказательство следующей леммы: А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёв, А. Т. Фоменко. «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии». Стр. 282-283

$r_{uu}=\frac{E_u}{\sqrt{E}}l+\sqrt{E}l_u$. Так как $(r_u,n)=0$, то $L=\sqrt{E}\,(l_u,n)$. Так как $(l,l)=1$, то $(l_u,l)=0$. Отсюда $l_u=p_1m+q_1n$. Аналогично, $N=\sqrt{G}\,(m_v,n)$, и $m_v=p_2l+q_2n$. Тогда $LN=\sqrt{EG}\,(l_u,n)\,(m_v,n)=\sqrt{EG}q_1q_2=\sqrt{EG}\,(l_u,m_v)$. Аналогично $M^2=\sqrt{EG}\,(l_v,m_u)$. Отсюда

$$K=\frac{(l_u,m_v)-(l_v,m_u)}{\sqrt{EG}}. \tag{34}$$

Заметим, что $(l_u,m_v)=(l_u,m)_v-(l_{uv},m)$ и $(l_v,m_u)=(l_v,m)_u-(l_{uv},m)$. Поэтому

$$K=\frac{(l_u,m)_v-(l_v,m)_u}{\sqrt{EG}}. \tag{35}$$

Выразим числитель через E и G. Пользуясь тем, что $(r_u,r_v)=0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial v}\,(l_u,m)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(r_{uu},r_v)}{\sqrt{EG}}\right)=-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(r_u,r_{uv})}{\sqrt{EG}}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right). \tag{36}$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial u}\,(l_v,m)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right). \tag{37}$$

Подставляя полученные выражения в формулу для кривизны, получаем искомую формулу. ■

Следствие 6.6. *В частности, если $E\equiv 1$, то формула принимает вид*

$$K=-\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{uu}}{\sqrt{G}}. \tag{38}$$

Введём понятия *геодезической* и *вынужденной* производной. Рассмотрим поле $a=a^ir_i$ на n-мерной гиперповерхности. $r_i=\frac{\partial r}{\partial u^i}$, и $a^i=a^i(u^1,\ldots,u^n)$. Пусть γ — кривая, и $\dot\gamma=\left(\dot u^1,\ldots,\dot u^n\right)$. Тогда

$$\dot a=\dot a^ir_i+a^i\dot r_i=\dot a^ir_i+a^i\left(r_{ij}\dot u^j\right)=\dot a^kr_k+\left(\Gamma^k_{ij}r_k+b_{ij}\vec n\right)a^i\dot u^j=\underbrace{\left(\dot a^k+\Gamma^k_{ij}a^i\dot u^j\right)}_{\text{геод. произв.}}r_k+\underbrace{b_{ij}\vec n a^i\dot u^j}_{\text{вын. пр.}}. \tag{39}$$

Здесь мы фактически разложили производную по базису касательного пространства и его ортогонального дополнения $\langle\vec n\rangle$.

Теорема 6.22. *Угол между единичным вектором $\vec a$ и результатом его переноса по гладкому замкнутому контуру γ области D равен*

$$\Delta\omega=\int\limits_D K ds. \tag{40}$$

□ Рассмотрим полугеодезическую систему координат в области D. Имеем $ds^2=du^2+G(u,v)dv^2$, и $r_u\perp r_v$. Имеем $(\vec a,r_u)=|a|\cdot|r_u|\cos\omega=\cos\omega$, где ω — угол между $\vec a$ и r_u. Далее, имеем $d\,(\vec a,r_u)=(d\vec a,r_u)+(\vec a,dr_u)$ Вектор $d\vec a$ есть сумма геодезической и вынужденной производных. Геодезическая часть равна 0, так как вектор переносится параллельно, а потому $d\vec a$ ортогонален касательной плоскости, и $(d\vec a,r_u)=0$. Заметим теперь, что так как $r_u=(1,0)$, то $\Gamma^k_{11}=0$ и $\dot r^k_u=0$. Значит, убирая все нулевые слагаемые, получаем

$$d\,(\vec a,r_u)=d\cos\omega=-\sin\omega d\omega=\left(\vec a,\Gamma^k_{1j}\,du^j\,r_k\right)=\left(\vec a,\Gamma^2_{12}dv\,r_v\right). \tag{41}$$

Имеем $\Gamma^2_{12}=\frac{G_u}{2G}$. Поэтому

$$d\,(\vec a,r_u)=\frac{G_u}{2G}\,(\vec a,r_v)\,dv=\frac{G_u}{2G}\sqrt{G}\sin\omega dv. \tag{42}$$

В итоге получаем $-\sin\omega d\omega=\frac{G_u}{2G}\sin\omega dv$, откуда $d\omega=-\frac{G_u}{2\sqrt{G}}dv$. Интегрируя, получаем

$$\Delta\omega=\oint\limits_\gamma\frac{-G_u}{2\sqrt{G}}dv=-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{G_{uu}}{\sqrt{G}}-\frac{G_u^2}{2\sqrt{G^3}}\right)dudv=-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{G_{uu}}{G}-\frac{G_u^2}{2G^2}\right)ds=\int\limits_D K ds. \tag{43}$$

■

Следствие 6.7. *Формула для суммы углов геодезического треугольника: $\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint\limits_\triangle K ds$.*

Теперь наконец-то можно ликвидировать долг в теореме о сумме углов треугольника на сфере и плоскости Лобачевского. На единичной сфере $K = 1$, поэтому сумма углов треугольника равна $\alpha + \beta + \gamma = \pi + K\sigma = \pi + \sigma > \pi$, где σ — площадь треугольника. На плоскости Лобачевского $K = -1$, поэтому $\alpha + \beta + \gamma = \pi - \sigma < \pi$.

Замечание. На сфере единичного радиуса $\Delta\varphi = 2\pi - \sigma$. Если мы будем двигаться по параллели, то вблизи полюса $\sigma \to 0$, следовательно, $\Delta\varphi \to 2\pi$. На экваторе же $\sigma = 2\pi$ и $\Delta\varphi = 0$ (поворота нет).

Для любой седловидной поверхности, у которой $K < 0$ и $\Delta\varphi = 2\pi - K\sigma$, как и в случае сферы, вблизи полюса $\Delta\varphi \to 2\pi$, и чем дальше мы от него отходим, тем быстрее растет $\Delta\varphi$.

6.14. Сферическое (гауссово) отображение

Пусть задана кривая $r = r(s)$. Рассмотрим вектор нормали $n(s)$ к этой кривой, перенесём его в центр единичной окружности. Получится кривая $\widetilde{r} = n(s)$ на этой окружности. Кривизна $k(s)$ кривой равна α'_s, где α — угол между касательным вектором и осью Ox. Имеем $\alpha'_s = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, где $\Delta\alpha$ — длина дуги на окружности (на образе), Δs — длина дуги на $r(s)$. $\Delta\alpha$ — угол от $\varepsilon_1(s)$ до $\varepsilon_1(s + \Delta s)$, он равен углу от $n(s)$ до $n(s + \Delta s)$. Отображение кривой на окружность называется *круговым образом кривой*. Кривизна кривой равна отношению приращения дуги на окружности к приращению на кривой $k = \frac{d\widetilde{s}}{ds}$.

Аналогичное отображение существует и в пространстве.

Определение. Рассмотрим кривую $r(u^1, u^2)$ и единичный вектор $\vec{n} := \frac{[m_1,m_2]}{|[m_1,m_2]|}$. Сопоставим точке поверхности конец вектора $\vec{n}$, лежащий на единичной сфере. Такое отображение называется *сферическим*.

При помощи сферического отображения выведем ещё один геометрический смысл гауссовой кривизны.

Теорема 6.23. *Рассмотрим область малой площади Δs на поверхности и $\Delta\widetilde{s}$ — образ этой области на сфере при сферическом отображении. Тогда $\lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\widetilde{s}}{\Delta s} = |K|$.*

$\Box$ Возьмём «хорошую» систему координат, т. е. такую, что уравнение поверхности имеет вид $z = f(x, y)$ и направления Ox, Oy являются главными. Тогда площадь куска поверхности равна $\Delta s = \iint\limits_{\Omega} \big|[m_1, m_2]\big| dxdy$, где Ω — область изменения параметров.

Найдём координаты сферического образа куска поверхности. Обозначив через L число $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$, имеем

$$\widetilde{r} := \vec{n} = \frac{[m_1, m_2]}{|[m_1, m_2]|} = (-f_x, -f_y, 1)\,\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = (-f_x, -f_y, 1)\,\frac{1}{L}. \tag{44}$$

Найдём вектора частных производных по параметрам на сфере:

$$\widetilde{m}_1 := \frac{\partial\widetilde{r}}{\partial x} = \left(\frac{1}{L}\right)'_x (-f_x, -f_y, 1) + \frac{1}{L}\,(-f_{xx}, -f_{yx}, 0)\,, \tag{45}$$

$$\widetilde{m}_2 := \frac{\partial\widetilde{r}}{\partial y} = \left(\frac{1}{L}\right)'_y (-f_x, -f_y, 1) + \frac{1}{L}\,(-f_{xy}, -f_{yy}, 0)\,. \tag{46}$$

Отсюда, молчаливо воспользовавшись теоремой о среднем, получаем

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\widetilde{s}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\iint |[\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2]|\,dxdy}{\iint |[m_1, m_2]|\,dxdy} \to \frac{|[\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2]|}{|[m_1, m_2]|}. \tag{47}$$

В начале координат $f_x = f_y = f_{xy} = 0$ и $[m_1, m_2] \to (0, 0, 1)$. Значит, $\big|[m_1, m_2]\big| \to 1$, а $\widetilde{m}_1 \to (-\lambda_1, 0, 0)$ и $\widetilde{m}_2 \to (0, -\lambda_2, 0)$. Поэтому $\big|[\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2]\big| \to |\lambda_1 \cdot \lambda_2|$, т. е. $\lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\widetilde{s}}{\Delta s} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = |K|$. $\blacksquare$

6.15. Комплексные структуры на поверхностях

Определение. Пусть нам задана поверхность и две системы координат (две карты): (u^1, u^2) и (v^1, v^2). Тогда на общей части поверхности одни координаты можно выразить через другие: $u^i = u^i(v^1, v^2)$. Сопоставим координатам (u^1, u^2) число $z := u^1 + iu^2 \in \mathbb{C}$, а координатам (v^1, v^2) — число $w := v^1 + iv^2 \in \mathbb{C}$. Говорят, что на поверхности задана *комплексная структура*, если можно выразить z через w и w через z.

Теорема 6.24. *На сфере $\mathbb{S}^2$ существует комплексная структура*[9].

[9] Для тех, кто ещё не забыл, что такое *инверсия*, теорема должна быть очевидной без всяких выкладок. Из геометрических соображений отображение карт есть инверсия относительно единичной окружности на плоскости xOy, а в биективности и гладкости такого преобразования (а следовательно, и в наличии обратного отображения) сомнений быть не должно.

□ Осуществим стереографическую проекцию сферы из южного и северного полюсов S и N соответственно. Пусть $A' = (x', y')$ — проекция точки A из северного полюса, и $A'' = (x'', -y'')$ — проекция из южного полюса (здесь знак «минус» взят для удобства). Пусть $z = x' + iy'$ и $w = x'' + iy''$.

Заметим, что если $\rho = OA'$ и $\widetilde{\rho} = OA''$, то $\rho\widetilde{\rho} = 1$. В самом деле, $\frac{\widetilde{\rho}}{1} = \frac{OA''}{OS} = \frac{ON}{OA'} = \frac{1}{\rho}$.

Следовательно, $zw = 1$, так как $|z||w| = \rho\widetilde{\rho} = 1$, а аргументы у них противоположные, то есть $\arg(zw) = 0$. Следовательно, $z = \frac{1}{w}$ и на $\mathbb{S}^2$ удалось ввести комплексную структуру. ■

Комплексная структура на $\mathbb{S}^2$ связана с метрикой. В комплексной форме метрика сферы имеет вид

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{4dzd\overline{z}}{(1 + z\overline{z})^2}. \tag{48}$$

Выразим x и y через z и $\overline{z}$. Имеем $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$. Тогда $dz = dx + idy,\ d\overline{z} = dx - idy$. Если в этой метрике подставить $z = \frac{1}{w}$, то получим

$$ds^2 = \frac{4dwd\overline{w}}{(1 + w\overline{w})^2}. \tag{49}$$

Справедливо и более общее утверждение.

Теорема 6.25. *На любом двумерном замкнутом связном компактном гладком многообразии можно ввести комплексную структуру.*

7. Прилажение

В заголовке этого раздела не случайно буква «о» заменена на «а». Это не опечатка, а вполне правильная характеристика данного фрагмента лекций.

...

Сформулируем некоторые свойства угла $\Delta\widetilde{\varphi}$:

1° $\Delta\widetilde{\varphi}$ не зависит от выбора векторного поля a и точки, из которой начинается поворот, и является внутренним инвариантом поверхности.

2° $\Delta\widetilde{\varphi}$ близок к 2π при маленьком контуре, так как метрика близка к метрике плоскости.

3° При изменении направления обхода $\Delta\widetilde{\varphi}$ меняет знак.

4° $\Delta\widetilde{\varphi}$ не зависит от ориентации поверхности, так как если сменить ориентацию, то положительный обход контура будет в другом направлении.

Теорема 7.1 (Интегральная формула для $\Delta\widetilde{\varphi}$). *Дана кривая $r(t) = \big(u^1(t), u^2(t)\big)$ и касательное единичное поле $a(t)$ на ней, поле $b \perp a$. Тогда*

$$\Delta\widetilde{\varphi} = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial a}{\partial u^1}, \frac{\partial b}{\partial u^2}\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial u^2}, \frac{\partial b}{\partial u^1}\right)\right] du^1 du^2. \tag{1}$$

□ Имеем

$$\frac{Da}{dt} = \frac{Da}{du^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{Da}{du^2}\frac{du^2}{dt}. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\Delta\widetilde{\varphi} = -\oint \left(\frac{Da}{dt}, b\right) dt = -\oint \left[\left(\frac{Da}{du^1}, b\right) du^1 + \left(\frac{Da}{du^2}, b\right) du^2\right]. \tag{3}$$

Возьмём внутри контура некоторую точку, опишем вокруг неё маленькую окрестность U, и гладко продолжим поля a и b на всю область, за исключением области U. Применяя формулу Грина к полученному множеству[10], получаем

$$\Delta\widetilde{\varphi} = -\iint\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{Da}{du^2}, b\right) du^1 du^2 - \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{Da}{du^1}, b\right) du^1 du^2\right] - 2\pi. \tag{4}$$

Добавка 2π возникает при интегрировании по ∂U, так как если устремить радиус окрестности к нулю, то угол поворота вектора стремится к 2π. В последнем равенстве заменим D на D^0. Тогда $\frac{D^0 a}{dt} = \frac{da}{dt}$. Таким образом,

$$2\pi + \Delta\widetilde{\varphi} = -\iint\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{da}{du^2}, b\right) du^1 du^2 - \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{da}{du^1}, b\right) du^1 du^2\right] = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial a}{\partial u^1}, \frac{\partial b}{\partial u^2}\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial u^2}, \frac{\partial b}{\partial u^1}\right)\right] du^1 du^2. \tag{5}$$

■

При выводе формулы для $\Delta\widetilde{\varphi}$ мы использовали операции внутреннего и внешнего дифференцирования. Сейчас мы получим формулу вида $\Delta\widetilde{\varphi} = \iint\limits_S K(A)d\sigma$, где K — функция от точек поверхности. Имеем $d\sigma = \big|[m_1, m_2]\big| du^1 du^2 = \sqrt{|G|} du^1 du^2$. Поделим и умножим на $\sqrt{|G|}$, получим

$$K(A) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\left[\left(\frac{\partial a}{\partial u^1}, \frac{\partial b}{\partial u^2}\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial u^2}, \frac{\partial b}{\partial u^1}\right)\right]. \tag{6}$$

Лемма 7.2. *Полученная функция $K(A)$ действительно является функцией точек поверхности, т. е. не зависит от выбора векторных полей a и b.*

□ Если у нас есть функции $K_1(A)$ и $K_2(A)$, и существует такая точка A, что $K_1(A) \neq K_2(A)$. Тогда они не совпадают и в некоторой окрестности S этой точки. Тогда $\Delta\varphi_1 = \iint\limits_S K_1(A)d\sigma \neq \iint\limits_S K_2(A)d\sigma = \Delta\varphi_2$, но $\Delta\widetilde{\varphi}$ — внутренний инвариант поверхности. Противоречие. ■

Поскольку $\Delta\varphi + \Delta\widetilde{\varphi} = 0$, получаем так называемую *формулу Гаусса – Бонне*:

$$\iint\limits_S K d\sigma + \oint k_g ds = 2\pi \tag{7}$$

[10]Если (P, Q) — векторное поле класса $\mathbf{C}^1\left(\overline{D}\right)$, то $\oint\limits_{\partial D} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

Теорема 7.3. *В случае двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ функция $K(A)$ совпадает с гауссовой кривизной поверхности.*

$\square$ Вычислим функцию K в каждой точке A. Сдвинем начало координат в точку A и повернём поверхность так, что плоскость xOy станет касательной, а направления Ox и Oy — главные. Тогда поверхность можно задать как $z = f(u^1, u^2)$, где $u^1 = x$ и $u^2 = y$. Вычислим функцию $K(A)$ в точке $A = (0,0)$. Имеем $m_1 = (1, 0, f'_x)$, $m_2 = (0, 1, f'_y)$. Поскольку плоскость xOy касается поверхности, то $f'_x = f'_y = 0$ и $\det G = 1$. Теперь выберем векторные поля. Положим

$$a := \frac{m_1}{|m_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}\,(1, 0, f'_x)\,, \tag{8}$$

а векторное поле b получим с помощью ортогонализации векторов m_1, m_2.

Приступим к вычислению $K(A)$. Поскольку $f'_x(A) = 0$, а $f''_{xx}(A) = \lambda_1$, имеем

$$\frac{\partial a}{\partial u^1} = \frac{\partial a}{\partial x} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}\right)'_x \cdot (1, 0, f'_x) + \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}\,(0, 0, f''_{xx}) = (0, 0, f''_{xx}) = (0, 0, \lambda_1)\,. \tag{9}$$

Так как направления Ox и Oy главные, то $f''_{xy} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial a}{\partial u^2} = \frac{\partial a}{\partial y} = 0 + \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}\left(0, 0, f''_{xy}\right) = \vec{0} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial a}{\partial u^2}, \frac{\partial b}{\partial u^1}\right) = 0. \tag{10}$$

Остаётся найти третью координату вектора $\frac{\partial b}{\partial y}$. Имеем $b = \alpha m_1 + \beta m_2$, где α и β — функции, зависящие от точки. Имеем

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \alpha'_y m_1 + \alpha \frac{\partial m_1}{\partial y} + \beta'_y m_2 + \beta \frac{\partial m_2}{\partial y}. \tag{11}$$

В этом равенстве в точке A координаты z у векторов m_1 и m_2 нулевые. Кроме того, $\frac{\partial m_1}{\partial y} = 0$, так как в точке A направления Ox и Oy главные и $f''_{xy} = 0$. Следовательно $\frac{\partial b}{\partial y}(A) = \beta\left(*, *, f''_{yy}\right) = \beta\,(*, *, \lambda_2)$. Найдём коэффициент β: в точке A имеем $b = m_2$, поэтому $\beta(A) = 1$. Значит, $\frac{\partial b}{\partial y} = (*, *, \lambda_2)$. Таким образом, $K(A) = \lambda_1 \lambda_2 = K$. $\blacksquare$