Лекция №1 (11.02.09)

Двойной интеграл Римана.

Обозначение:

$$\Pi = [a,b] \times [c,d] \subset R^2.$$

Определение:
Пусть $f(x,y)$ определена на Π, T_x − разбиение отрезка $[a,b]$, T_y − разбиение отрезка $[c,d]$.
Тогда $T = T_x \times T_y = \{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}_{i=1, j=1}^{n,\ m}$ называется разбиением прямоугольника Π.
Если разбиения T_x и T_y − размеченные: $T_x(\xi)$ и $T_y(\eta)$, то $T(\xi,\eta) = T_x(\xi) \times T_y(\eta)$ называется размеченным разбиением Π.
Введём обозначения: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Определение:
Пусть на прямоугольнике Π выбрано размеченное разбиение $T(\xi,\eta)$ и определена $f(x,y)$.
Тогда сумма $\sigma_f\big(T(\xi,\eta)\big) = \sum\limits_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} f(\xi_i, \eta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j$ называется интегральной суммой функции $f(x,y)$ на размеченном разбиении $T(\xi,\eta)$.

Определение:
Величина $d(T) = \max\ \{d(T_x), d(T_y)\}$ называется диаметром разбиения T.

Определение:
Если для $f(x,y)$, определенной на Π, существует $I \in R$, что $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, что $\forall T(\xi,\eta)$, такого, что $d\big(T(\xi,\eta)\big) < \delta_\varepsilon$,

$$\left|\ \sigma_f\big(T(\xi,\eta)\big) - I\ \right| < \varepsilon,$$

то $f(x,y)$ называется интегрируемой по Риману на Π, и это обозначается так: $f(x,y) \in R(\Pi)$, а число I называется интегралом Римана функции $f(x,y)$ на Π. Обычно записывают, что:

$$\lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} f(\xi_i, \eta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j = I,$$

и этот предел записывается так:

$$I = \iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dxdy.$$

Замечание:
Далее полагаем, что $f(x,y)$ ограничена на Π.

Определение:
Обозначим через $\Pi_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Пусть $M_{ij} = \sup\limits_{\Pi_{ij}} f(x,y)$, а $m_{ij} = \inf\limits_{\Pi_{ij}} f(x,y)$. Тогда верхней суммой Дарбу $f(x,y)$ на разбиении T называется $\underline{\underline{S}}(T) = \sum\limits_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} M_{ij}\ \Delta x_i \Delta y_j$, а нижней суммой Дарбу $f(x,y)$ на разбиении T называется $\overline{\overline{S}}(T) = \sum\limits_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j$.

Лемма:

$$\overline{\overline{S}}(T) \le\ \sigma_f\big(T(\xi,\eta)\big) \le \underline{\underline{S}}(T)$$

Доказательство:

$$\forall i,j \quad m_{ij} \le f(\xi_i,\eta_j) \le M_{ij} \quad \Rightarrow \quad m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j \le f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j \le M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} f(\xi_i,\eta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j \Rightarrow \overline{\overline{S}}(T) \le \sigma_f\big(T(\xi,\eta)\big) \le \underline{\underline{S}}(T) \quad \blacksquare$$

Лемма:
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такая разметка (ξ', η') разбиения T, что $\underline{\underline{S}}(T) - \sigma_f\big(T(\xi',\eta')\big) < \varepsilon$ и $\exists$ такая разметка (ξ'', η'') разбиения T, что $\sigma_f\big(T(\xi'',\eta'')\big) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$.

Доказательство:
По свойству точной верхней грани, $\forall i,j \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists (\xi_i', \eta_j') \in \Pi_{ij}$, что $M_{ij} - f(\xi_i',\eta_j') < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$.

$$\text{Следовательно, } M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j - f(\xi_i',\eta_j')\Delta x_i \Delta y_j < \frac{\varepsilon \Delta x_i \Delta y_j}{(b-a)(d-c)},$$
$$\sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j - \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} f(\xi_i',\eta_j')\,\Delta x_i \Delta y_j < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} \Delta x_i \Delta y_j = \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}(T) - \sigma_f\big(T(\xi',\eta')\big) < \varepsilon$$

По свойству точной нижней грани, $\forall i,j \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists (\xi_i'', \eta_j'') \in \Pi_{ij}$, что
$$f(\xi_i'',\eta_j'') - m_{ij} < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$$
$$\text{Следовательно, } f(\xi_i'',\eta_j'')\Delta x_i \Delta y_j - m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j < \frac{\varepsilon \Delta x_i \Delta y_j}{(b-a)(d-c)},$$
$$\sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} f(\xi_i'',\eta_j'')\,\Delta x_i \Delta y_j - \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} \Delta x_i \Delta y_j = \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_f\big(T(\xi'',\eta'')\big) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Определение:
Если T_x' является измельчением T_x и T_y' является измельчением T_y, то $T' = T_x' \times T_y'$ называется измельчением T.

Лемма:
Если T' – измельчение T, то $\overline{\overline{S}}(T) \le \overline{\overline{S}}(T') \le \underline{\underline{S}}(T') \le \underline{\underline{S}}(T)$.

Доказательство:
Рассмотрим $T^* = T_x' \times T_y$. Докажем для простоты лемму для T^* (вместо T').
Обозначим через $m_{ij} = \inf\limits_{\Pi_{ij}} f(x,y)$, $m_{ij}' = \inf\limits_{\Pi_{\text{ij}}'} f(x,y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{\Pi_{ij}} f(x,y)$, $M_{ij}' = \sup\limits_{\Pi_{\text{ij}}'} f(x,y)$

$$\forall j \quad \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n+1} m_{ij}'\,\Delta x_i' \le \sum_{i=1}^{n+1} M_{ij}'\,\Delta x_i' \le \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n+1} m_{ij}'\,\Delta x_i' \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n+1} M_{ij}'\,\Delta x_i' \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i,j=1}^{n+1} m_{ij}'\,\Delta x_i' \Delta y_j \le \sum_{i,j=1}^{n+1} M_{ij}'\,\Delta x_i' \Delta y_j \le \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j$$

$$\overline{\overline{S}}(T) \leq \overline{\overline{S}}(T') \leq \underline{\underline{S}}(T') \leq \underline{\underline{S}}(T) \quad \blacksquare$$

Лемма:

$\forall T_1, T_2 \quad \overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2)$

Доказательство:

$T = (T_{1x} \cup T_{2x}) \times (T_{1y} \cup T_{2y})$

T является измельчением и T_1, и T_2, следовательно:

$$\overline{\overline{S}}(T_1) \leq \overline{\overline{S}}(T) \leq \underline{\underline{S}}(T) \leq \underline{\underline{S}}(T_2) \quad \blacksquare$$

Следствие:

Множество $\left\{\overline{\overline{S}}(T)\right\}$ ограничено сверху, а множество $\left\{\underline{\underline{S}}(T)\right\}$ ограничено снизу.

Определение:

$\sup\limits_T \overline{\overline{S}}(T) = I_*$ — нижний интеграл Дарбу, $\quad \inf\limits_T \underline{\underline{S}}(T) = I^*$ — верхний интеграл Дарбу.

Лемма:

$$I_* \leq I^*$$

Доказательство:

$\overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2) \implies \sup\limits_{T_1} \overline{\overline{S}}(T_1) \leq \underline{\underline{S}}(T_2) \implies I_* \leq \underline{\underline{S}}(T_2) \implies I_* \leq \inf\limits_{T_2} \underline{\underline{S}}(T_2) \implies I_* \leq I^* \quad \blacksquare$

Теорема (критерий Дарбу интегрируемости по Риману):

$$f(x,y) \in R(\Pi) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall T \ \ d(T) < \delta_\varepsilon \qquad \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$$

Доказательство:

1) $f(x,y) \in R(\Pi) \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall T(\xi,\eta) \ d\big(T(\xi,\eta)\big) < \delta_\varepsilon \qquad \left|\sigma_f\big(T(\xi,\eta)\big) - I\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \implies$

$\implies I - \dfrac{\varepsilon}{2} < \sigma_f\big(T(\xi,\eta)\big) < I + \dfrac{\varepsilon}{2}$

По доказанной ранее лемме $\exists$ разбиение (ξ', η'), что $\sigma_f\big(T(\xi',\eta')\big) - \overline{\overline{S}}(T) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\exists$ разбиение (ξ'', η''), что $\underline{\underline{S}}(T) - \sigma_f\big(T(\xi'',\eta'')\big) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (причём диаметры разбиений (ξ', η') и (ξ'', η'') меньше δ_ε)

$\underline{\underline{S}}(T) - \sigma_f\big(T(\xi'',\eta'')\big) < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \sigma_f\big(T(\xi'',\eta'')\big) < I + \dfrac{\varepsilon}{2} \implies \underline{\underline{S}}(T) < I + \varepsilon$

$\sigma_f\big(T(\xi',\eta')\big) - \overline{\overline{S}}(T) < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad I - \dfrac{\varepsilon}{2} < \sigma_f\big(T(\xi',\eta')\big) \implies I - \varepsilon < \overline{\overline{S}}(T)$

Таким образом, $I - \varepsilon < \overline{\overline{S}}(T) < \underline{\underline{S}}(T) < I + \varepsilon \implies \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < 2\varepsilon$.

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall T \ \ d(T) < \delta_\varepsilon \qquad \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon$, но $\overline{\overline{S}}(T) \leq I_* \leq I^* \leq \underline{\underline{S}}(T) \implies I^* - I_* < \varepsilon$

так как неравенство верно для любых сколь угодно малых ε, то $I^* = I_* = I$

$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon, \ \overline{\overline{S}}(T) \leq I \implies \underline{\underline{S}}(T) - I < \varepsilon \implies \exists \lim\limits_{d(T)\to 0} \underline{\underline{S}}(T) = I$

$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon, \ I \leq \underline{\underline{S}}(T) \implies I - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon \implies \exists \lim\limits_{d(T)\to 0} \overline{\overline{S}}(T) = I$

$\overline{\overline{S}}(T) \leq \sigma_f\big(T(\xi,\eta)\big) \leq \underline{\underline{S}}(T), \quad \lim\limits_{d(T)\to 0} \underline{\underline{S}}(T) = I, \quad \lim\limits_{d(T)\to 0} \overline{\overline{S}}(T) = I \implies \lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma_f\big(T(\xi,\eta)\big) = I \implies$

$f(x,y) \in R(\Pi) \quad \blacksquare$

<u>*Лекция №2 (13.02.09)*</u>

<u>*Теорема:*</u>
Если $f(x,y) \in C(\Pi)$, то $f(x,y) \in R(\Pi)$.

<u>*Доказательство:*</u>
$f(x,y) \in C(\Pi)$, Π – компакт $\implies$ $f(x,y)$ равномерно непрерывна на Π, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)$, что $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < \delta_\varepsilon$, $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$.
Для любого разбиения T введём обозначения: $M_{ij} = \max\limits_{\Pi_{ij}} f(x,y)$, а $m_{ij} = \min\limits_{\Pi_{ij}} f(x,y)$; так как $f(x,y) \in C(\Pi)$, то $\forall i,j \quad \exists \big(x_{imin}, y_{jmin}\big) \in \Pi_{ij}$, что $f\big(x_{imin}, y_{jmin}\big) = m_{ij}$ и $\exists \big(x_{imax}, y_{jmax}\big) \in \Pi_{ij}$, что $f\big(x_{imax}, y_{jmax}\big) = M_{ij}$. Тогда для любого разбиения T с диаметром меньше δ_ε верно, что $M_{ij} - m_{ij} = f\big(x_{imax}, y_{jmax}\big) - f\big(x_{imin}, y_{jmin}\big) < \varepsilon$; из критерия Дарбу:

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} \big(M_{ij} - m_{ij}\big)\Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon \sum_{i=1,\ j=1}^{n,\ m} \Delta x_i \Delta y_j = \varepsilon(b-a)(d-c). \quad \blacksquare$$

<u>*Теорема:*</u>
Пусть $f(x,y)$ ограничена на Π: $\exists M$, что $|f(x,y)| < M$, и пусть множество точек разрыва $f(x,y)$ (обозначим его за A) имеет меру ноль: $\mu(A) = 0$; тогда $f(x,y) \in R(\Pi)$.

<u>*Доказательство:*</u>
$\mu(A) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists P_\varepsilon \supset A \ \ \mu(P_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{128}$. Тогда (как было доказано во втором семестре) $\exists T_h^{'} =$ $= T_{xh} \times T_{yh}$, где T_{xh} и T_{yh} – разбиения с шагом h $\big($то есть $\forall i \ \ \Delta x_i = h$ и $\forall j \ \ \Delta y_j = h\big)$, что $\exists \bigcup\limits_{(i,j)\in I} \Pi_{ij} \supset P_\varepsilon$, что $\mu\left(\bigcup\limits_{(i,j)\in I} \Pi_{ij}\right) < 32 * \dfrac{\varepsilon}{128} = \dfrac{\varepsilon}{4}$ (I – это некоторое множество наборов пар ин – дексов $(i,j)\big)$

Далее, для любого разбиения T с диаметром $d(T) < h \quad \exists \bigcup\limits_{(i,j)\in I'} \Pi_{ij}^{'} \supset A$, что $\mu\left(\bigcup\limits_{(i,j)\in I'} \Pi_{ij}^{'}\right) < 4 * \dfrac{\varepsilon}{4} =$ $= \varepsilon$;

Так как $f(x,y) \in C\left(\bigcup\limits_{(i,j)\notin I'} \Pi_{ij}\right)$, то $\forall (i,j) \notin I'$ на прямоугольнике Π_{ij} $f(x,y)$ достигает своего максимума и минимума. Запишем критерий Дарбу для $\forall T$ с диаметром $d(T) < h$:

$$\underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{(i,j)\in I'} \left(\sup_{\Pi_{ij}} f(x,y) - \inf_{\Pi_{ij}} f(x,y)\right)\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{(i,j)\notin I'} \left(\max_{\Pi_{ij}} f(x,y) - \min_{\Pi_{ij}} f(x,y)\right)\Delta x_i \Delta y_j$$

так как $f(x,y) \in C\left(\bigcup\limits_{(i,j)\notin I'} \Pi_{ij}\right)$, а $\bigcup\limits_{(i,j)\notin I'} \Pi_{ij}$ – компакт, то $f(x,y)$ равномерно непрерывна на $\bigcup\limits_{(i,j)\notin I'} \Pi_{ij} \implies \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, что $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)$, что $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < \delta_\varepsilon$,

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

Пусть $\delta_\varepsilon < h$ и $d(T) < \delta_\varepsilon$; тогда:

$$\sum_{(i,j)\in I'} \left(\sup_{\Pi_{ij}} f(x,y) - \inf_{\Pi_{ij}} f(x,y)\right)\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{(i,j)\notin I'} \left(\max_{\Pi_{ij}} f(x,y) - \min_{\Pi_{ij}} f(x,y)\right)\Delta x_i \Delta y_j <$$

$$< 2M \sum_{(i,j)\in I'} \Delta x_i \Delta y_j + \varepsilon \sum_{(i,j)\notin I'} \Delta x_i \Delta y_j < 2M\varepsilon + \varepsilon(b-a)(d-c) = \varepsilon\big(2M + (b-a)(d-c)\big) \quad \blacksquare$$

Определение:
Пусть $G \subset R^2$ — замкнутая ограниченная область, и пусть $f(x,y)$ определена и ограничена на G. Пусть П — прямоугольник, содержащий G. Введём функцию $\hat{f}(x,y)$:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in G \\ 0, & (x,y) \in \Pi \backslash G \end{cases}$$

Будем называть $f(x,y)$ интегрируемой по Риману на G и обозначать это так: $f(x,y) \in R(G)$, если $\hat{f}(x,y) \in R(\Pi)$.

Число $\iint\limits_{\Pi} \hat{f}(x,y)\, dxdy$ будем называть интегралом $f(x,y)$ по G и обозначать так:

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\, dxdy$$

Теорема (геометрический смысл двойного интеграла):

Пусть G — замкнутая ограниченная область, пусть $\mu(\partial G) = 0$. Тогда $\iint\limits_{G} 1\, dxdy = \mu(G)$.

Доказательство:
Пусть $\Pi \supset G$ и пусть $\hat{1}$ — функция на П из предыдущего определения (то есть $\hat{1}$ — это функция $\hat{f}(x,y)$ для функции $f(x,y) = 1$).
$\forall T$ прямоугольника П введём $Q(T) \subset G$: $Q(T) = \bigcup\limits_{(i,j)\in I} \Pi_{ij}$ и $P(T) \supset G$: $P(T) = \bigcup\limits_{(i,j)\in J} \Pi_{ij} \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ так как $\mu(\partial G) = 0$, то G — квадрируема (по второму критерию квадрируемости), то по пер — вому критерию квадрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall T \text{ с } d(T) < \delta_\varepsilon \quad \mu\big(P(T)\big) - \mu\big(Q(T)\big) < \varepsilon$$

но в свою очередь, $\mu\big(P(T)\big) = \underline{\underline{S}}(T)$ для функции $\hat{1}$, а $\mu\big(Q(T)\big) = \overline{\overline{S}}(T)$ для функции $\hat{1}$; значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall T \text{ с } d(T) < \delta_\varepsilon \quad \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(T) < \varepsilon,$$

значит, $\hat{1} \in R(\Pi)$, и $1 \in R(G)$; кроме того, $\lim\limits_{d\to 0} \mu\big(P(T)\big) = \lim\limits_{d\to 0} \mu\big(Q(T)\big) = \mu(G)$; а так как

$$\lim_{d\to 0} \underline{\underline{S}}(T) = \lim_{d\to 0} \overline{\overline{S}}(T) = \iint\limits_{G} 1\, dxdy,$$

$$\text{то } \iint\limits_{G} 1\, dxdy = \mu(G). \quad \blacksquare$$

Теорема:
Пусть $f(x,y)$ ограничена на G, $\mu(\partial G) = 0$ и пусть множество точек разрыва $f(x,y)$ имеет пло — щадь 0 $\quad \Longrightarrow \quad f(x,y) \in R(G)$.

Доказательство:
У $\hat{f}(x,y)$ на $\Pi \supset G$ множество точек разрыва лежит в объединении ∂G и точек разрыва функции $f(x,y)$, а так как $\mu(\partial G) = 0$ и множество точек разрыва $f(x,y)$ имеет площадь 0, то множество точек разрыва функции $\hat{f}(x,y)$ имеет меру 0; кроме того, $\hat{f}(x,y)$ ограничена на $\Pi \supset G$, следова — тельно, $\hat{f}(x,y) \in R(\Pi)$, а по определению, тогда и $f(x,y) \in R(G)$. $\blacksquare$

Лекция №3 (20.02.09)

n-кратный интеграл Римана.

Общий план введения n-кратного интеграла Римана:

0) определения граничных, внутренних, внешних точек, точек прикосновения, предельных точек в R^n полностью аналогичны определениям в R^2;
1) определение объёма (меры) $n-$ мерного параллелепипеда П;
2) определение многогранной фигуры как конечного объединения $n-$ мерных параллелепи $-$ педов и объёма многогранной фигуры как суммы объёмов этих параллелепипедов;
3) определение нижней меры произвольного $A \subset R^n$ как точной верхней грани множества мер всех $n-$ мерных фигур, являющимися подмножествами A:

$$\mu_*(A) = \sup_{Q \subset A} \mu(Q)$$

и определение верхней меры произвольного $A \subset R^n$ как точной нижней грани множества мер всех $n-$ мерных фигур, подмножеством которых является A:

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset P} \mu(P)$$

4) если $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, то A называется кубируемой, число $\mu(A) = \mu_*(A) = \mu^*(A)$ называется мерой A, и аналогично двумерному случаю доказываются два критерия кубируемости:

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q_\varepsilon \subset A \;$ и $\; \exists A \subset P_\varepsilon \quad |\mu(P_\varepsilon) - \mu(Q_\varepsilon)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad A -$ кубируема;
- $A -$ кубируема $\quad \Leftrightarrow \quad \mu(\partial A) = 0\;$ (где $\partial A -$ граница множества A);

5) даются определения: интегральной суммы на П по разбиению T $\left(\text{обозначается } \sigma_f(T, \Pi)\right)$, ин $-$ тегрируемости f на П $\left(\text{существование предела } \lim\limits_{d(T) \to 0} \sigma_f(T, \Pi)\right)$, обозначаемой так: $f \in R(\Pi)$; этот предел обозначается так:

$$\int_{\Pi} .. \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

6) аналогично двукратному интегралу, даётся определение интегралу по произвольной замкнутой области из R^n, и обозначается он так:

$$\int_{G} .. \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

7) доказываются несколько теорем о классах интегрируемых функций, одна из них:

Теорема:

Если $f(x_1, \dots, x_n)$ ограничена на G, объём множества точек её разрыва равен нулю, то $f \in R(G)$.

Свойства n-кратного интеграла Римана.

1) $f(x_1, \dots, x_n) \in R(G) \implies f(x_1, \dots, x_n)$ ограничена на G;
2) $f(x_1, \dots, x_n) \in R(G), \;\; G_1$ и $G_2 -$ ограниченные замкнутые области, такие, что $G_1 \cup G_2 = G, \;\; G_1$ и G_2 не имеют общих внутренних точек, а $\mu(G_1 \cap G_2) = 0 \implies f \in R(G_1), f \in R(G_2)$ и

$$\int_{G} .. \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{G_1} .. \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n + \int_{G_1} .. \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

3) если $f \in R(G), g \in R(G)$, то $\forall \alpha, \beta \in R \quad \alpha f + \beta g \in R(G)$ и

$$\int_{G} .. \int (\alpha f + \beta g)\, dx_1 \dots dx_n = \alpha \int_{G} .. \int f\, dx_1 \dots dx_n + \beta \int_{G} .. \int g\, dx_1 \dots dx_n$$

4) $f \in R(G), g \in R(G) \implies fg \in R(G)$;
5) $f \in R(G) \implies |f| \in R(G)$;
6) $f \in R(G), f \geq \varepsilon > 0$ на $G \implies \dfrac{1}{f} \in R(G)$;

7) $f \in R(G) \implies \left| \int\limits_G \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \right| \leq \int\limits_G \ldots \int |f(x_1, \ldots, x_n)|\, dx_1 \ldots dx_n$

8) $f \in R(G), g \in R(G), f \leq g$ на $G \implies \int\limits_G \ldots \int f\, dx_1 \ldots dx_n \leq \int\limits_G \ldots \int g\, dx_1 \ldots dx_n$

9) если $f \in R(G), A -$ множество точек, где $g \neq f$, g ограничена на G и $\mu(A) = 0$, то $g \in R(G)$ и

$$\int\limits_G \ldots \int f\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_G \ldots \int g\, dx_1 \ldots dx_n$$

10) $G -$ замкнута и ограничена, $\mu(\partial G) = 0 \implies \int\limits_G \ldots \int 1\, dx_1 \ldots dx_n = \mu(G)$

Сведение n-кратного интеграла Римана к повторному.

Определение:

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена на $\Pi = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, и пусть $\forall i = 1, \ldots, n$
$\forall \left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots x_n^0\right) \in [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

$$f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots x_n^0\right) \in R[a_i, b_i]$$

Тогда число вида $\int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\int\limits_{a_{i_{n-1}}}^{b_{i_{n-1}}} \left(\ldots \int\limits_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \right) dx_{i_2} \ldots \right) dx_{i_{n-1}} \right) dx_{i_n}$ называется пов − торным интегралом от функции f по Π $\left(\text{т. е. } (i_1\ i_2 \ldots\ i_{n-1}\ i_n) - \text{перестановка из } (1\ 2\ \ldots\ n-1\ n)\right)$

Лекция №4 (27.02.09)

Теорема:

$\Pi=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$, $\Pi_i=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_{i-1},b_{i-1}]\times[a_{i+1},b_{i+1}]\times\ldots\times[a_n,b_n]$

пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in R(\Pi)$ и пусть $\forall\left(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_{i+1}^0,\ldots x_n^0\right)\in\Pi_i\quad\exists\int\limits_{a_i}^{b_i}f\left(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\ldots x_n^0\right)dx_i$

тогда $\exists$ $$\int\limits_{\Pi_i}..\int\left(\int\limits_{a_i}^{b_i}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_i\right)dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n=\int\limits_{\Pi}..\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

Доказательство:

Рассмотрим двумерный случай: $\Pi=[a,b]\times[c,d]$, $\exists\int\limits_c^d f(x,y)dy\quad\forall x\in[a,b]$

$\Pi_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times\left[y_{j-1},y_j\right]-$ прямоугольники разбиения Π, ξ_i- разметка разбиения $[a,b]$

$$m_{ij}\Delta y_j\le\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}f(\xi_i,y)dy\le M_{ij}\Delta y_j$$

$$\sum_j m_{ij}\Delta y_j\le\int\limits_c^d f(\xi_i,y)dy\le\sum_j M_{ij}\Delta y_j$$

$$\sum_j m_{ij}\Delta y_j\Delta x_i\le\int\limits_c^d f(\xi_i,y)dy\Delta x_i\le\sum_j M_{ij}\Delta y_j\Delta x_i$$

$$\sum_{i,j}m_{ij}\Delta y_j\Delta x_i\le\sum_i\int\limits_c^d f(\xi_i,y)dy\Delta x_i\le\sum_{i,j}M_{ij}\Delta y_j\Delta x_i$$

$$\overline{\overline{S}}_f(\Pi)\le\sigma_{\int_c^d f(x,y)dy}\left(T(\xi)\right)\le\underline{\underline{S}}_f(\Pi)\;\Rightarrow\;\forall\varepsilon>0\;\exists\delta_\varepsilon>0\;\forall T\text{ с }d(T)<\delta_\varepsilon$$

$$\left|\sigma_{\int_c^d f(x,y)dy}\left(T(\xi)\right)-\iint\limits_\Pi f(x,y)\,dxdy\right|<\varepsilon\;\Rightarrow\;\iint\limits_\Pi f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx\quad\blacksquare$$

Теорема:

Пусть G $-$ замкнутая ограниченная область в R^{n-1}, $\varphi:G\to R$, $\psi:G\to R$, $\varphi,\psi\in C(G),\varphi\le\psi$ на G, и пусть $\Omega=\{(x_1,\ldots,x_n):(x_1,\ldots,x_{n-1})\in G,\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})\le x_n\le\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})\}$; пусть

$f(x_1,\ldots,x_n)\in R(\Omega)$ и $\forall(x_1,\ldots,x_{n-1})\in G\quad\exists\int\limits_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n$. Тогда:

$$\exists\int\limits_G..\int\left(\int\limits_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\right)dx_1\ldots dx_{n-1}=\int\limits_\Omega..\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

Доказательство:

Опять ограничимся рассмотрением двумерного случая: $G:[a,b]\subset R$, $\varphi(x)\le y\le\psi(x)$ на G

$$F(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ 0, & (x,y)\in\Pi\backslash\Omega\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\int\limits_c^d F(x,y)dy\quad\forall x\in[a,b]$$

по определению $\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_\Pi F(x,y)\,dxdy$, а по предыдущей теореме:

$$\iint\limits_{\Pi} F(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d F(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx \quad \blacksquare$$

Теорема:
Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \in R(G)$, $g(x_1,\dots,x_n)$ ограничена на G и

$$\mu(\{(x_1,\dots,x_n) \in G, f(x_1,\dots,x_n) \neq g(x_1,\dots,x_n)\}) = 0.$$

Тогда $g(x_1,\dots,x_n) \in R(G)$.

Определение:
$f(x_1,\dots,x_n) \in R(\Pi)$, $g(x_1,\dots,x_n)$ ограничена на Π и

$$\mu(\{(x_1,\dots,x_n) \in \Pi, f(x_1,\dots,x_n) \neq g(x_1,\dots,x_n)\}) = 0$$

пусть $\forall (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \ \ \exists \int\limits_{a_i}^{b_i} g(x_1,\dots,x_n)dx_i$. Тогда:

$$\int\limits_{\Pi_i} .. \int \left(\int\limits_{a_i}^{b_i} g(x_1,\dots,x_n)\,dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1}dx_{i+1} \dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\Pi_i} .. \int \left(\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1}dx_{i+1} \dots dx_n$$

Теорема (о среднем):
Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \in R(G), M = \sup\limits_G f(x_1,\dots,x_n)\,, m = \inf\limits_G f(x_1,\dots,x_n)\,, g(x_1,\dots,x_n) \in R(G)$,

$g(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ на $G \implies \exists \mu \in [m,M]$, что $\int\limits_G .. \int fg\,dx_1 \dots dx_n = \mu \int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n$

если помимо того $f(x_1,\dots,x_n) \in C(G)$, то $\exists (x_1^0,\dots,x_n^0) \in G$, что $\mu = f(x_1^0,\dots,x_n^0)$.

Доказательство:

$$m \sum_{(i)} g(\bar{\xi}_{i_1,\dots,i_n})\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_n} \leq \sum_{(i)} f(\bar{\xi}_{i_1,\dots,i_n}) g(\bar{\xi}_{i_1,\dots,i_n})\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_n} \leq M \sum_{(i)} g(\bar{\xi}_{i_1,\dots,i_n})\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_n}$$

(под (i) подразумевается набор индексов $i_1, .., i_n$)
переходим в неравенстве к пределу $d \to 0$:

$$m \int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n \leq \int\limits_G .. \int fg\,dx_1 \dots dx_n \leq M \int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n$$

Так как $g(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ на G, то $\int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n \geq 0$. Если $\int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n = 0$, то из двой – ного неравенства следует, что $\int\limits_G .. \int fg\,dx_1 \dots dx_n = 0$, и тогда под равенство

$$\int\limits_G .. \int fg\,dx_1 \dots dx_n = \mu \int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n$$

подходит любое μ, поэтому в качестве μ можно выбрать любое число из отрезка $[m,M]$; если же $\int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n > 0$, то поделим двойное неравенство на $\int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n$:

$$m \leq \left(\int\limits_G .. \int fg\,dx_1 \dots dx_n \right) / \left(\int\limits_G .. \int g\,dx_1 \dots dx_n \right) \leq M$$

то есть число $\mu = \left(\int_G \dots \int fg \, dx_1 \dots dx_n \right) / \left(\int_G \dots \int g \, dx_1 \dots dx_n \right)$, лежит на отрезке $[m, M]$.

А если ещё $f(x_1, \dots, x_n) \in C(G)$, то по свойству непрерывной на компакте функции, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает все промежуточные значения из отрезка $[m, M]$, а следовательно, и μ. ■

Лекция №5 (06.03.09)

Определение:

Для замкнутой ограниченной области G с $\mu(\partial G) = 0$ назовём обобщённым разбиением следующее представление:

$$G = \bigcup_{k=1}^{N} G_k\text{, где } \forall k\ \ \mu(\partial G_k) = 0,\ \ G_k - \text{замкнуто и } \forall k_1, k_2 \quad G_{k_1} \cap G_{k_2} \subset \partial G_{k_1} \cap \partial G_{k_2}$$

набор точек $\{\overline{\xi_k}\}, \overline{\xi_k} \in G_k\ \forall k$ назовём разметкой обобщённого разбиения,

$T(G)$ − размеченное разбиение

Определение:

Пусть $f(\bar{x})$ ограничена на G, $\forall T(G)$ назовём обобщённой интегральной суммой следующую сумму:

$$\sigma_{\text{об}}(f) = \sum_{k=1}^{N} f(\overline{\xi_k})\mu(G_k)$$

Диаметром обобщённого разбиения $T(G)$ назовём: $\quad d\big(T(G)\big) = \max\limits_{1\le k\le N}\left(\max\limits_{\substack{\bar{x}\in G_k\\ \bar{y}\in G_k}} \rho(\bar{x},\bar{y})\right)$

Будем говорить, что $f(\bar{x})$ обобщённо интегрируема и называть число $I_{\text{об}}$ обобщённым интегралом $f(\bar{x})$ по G, если $\exists \lim\limits_{d(T(G))\to 0} \sigma_{\text{об}}(f) = I_{\text{об}}$ (интегрируемость обозначается так: $f(\bar{x}) \in R_{\text{об}}(G)$)

Теорема:

$$f \in R(G) \quad \Leftrightarrow \quad f \in R_{\text{об}}(G) \ \text{ и } \ I_{\text{об}} = I.$$

Доказательство:

1) докажем сначала справа налево:

пусть $\exists \lim\limits_{d\to 0} \sigma_{\text{об}}(f) = I_{\text{об}}$. рассмотрим тогда $\sigma(f)$ и оценим её:

$$|\sigma_{\text{об}}(f) - \sigma(f)| \le \sum_{(i,j):\Pi_{ij}\cap\partial G\ne\emptyset} 2M_{ij}\,\mu\big(\Pi_{ij}\big) \le 2M \sum_{(i,j):\Pi_{ij}\cap\partial G\ne\emptyset} \mu\big(\Pi_{ij}\big),$$

$$\text{где } M_{ij} = \sup_{\bar{x}\in\Pi_{ij}} f(\bar{x}),\ \ M = \sup_{\bar{x}\in G} f(\bar{x})$$

$$\text{при } d\to 0 \quad \sum_{(i,j):\Pi_{ij}\cap\partial G\ne\emptyset} \mu\big(\Pi_{ij}\big) \to \mu(\partial G) = 0 \ \Rightarrow\ 2M \sum_{(i,j):\Pi_{ij}\cap\partial G\ne\emptyset} \mu\big(\Pi_{ij}\big) \to 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{d\to 0}\sigma(f) = \lim_{d\to 0}\sigma_{\text{об}}(f) = I.$$

2) теперь докажем в обратную сторону:

пусть $\exists \lim\limits_{d\to 0}\sigma(f) = I$, пусть ∂T − это граница разбиения области G;

тогда $\partial T = (\partial G \cup \{\text{отрезки} - \text{стороны прямоугольников разбиения}\}) \ \Rightarrow\ \mu(\partial T) = 0 \ \Rightarrow\ \forall\varepsilon > 0$ $\exists$открытая многоугольная фигура Q, что $\mu(Q) < \dfrac{\varepsilon}{M}$ и $\partial T \subset Q$; пусть $\bar{Q}$ − замыкание Q, то есть $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$; тогда $\exists\delta = \inf\limits_{\substack{\overline{x_1}\in\partial T\\ \overline{x_2}\in\Pi\backslash\bar{Q}}} \rho(\overline{x_1},\overline{x_2}) > 0$ (то есть δ по определению является расстоянием между множествами ∂T и $\Pi\backslash\bar{Q}$);

рассмотрим $\forall T(G)$ с $d\big(T(G)\big) < \delta$; тогда если для некоторого k $G_k \cap \partial T \ne \emptyset$, то $G_k \subset Q$;

рассмотрим верхнюю обобщённую интегральную сумму:

$$\underline{\underline{S}}_{\text{об}} = \sum_{k=1}^{n} M_k\mu(G_k) = \sum_{k:G_k\cap\partial T\ne\emptyset} M_k\mu(G_k) + \sum_{k:G_k\cap\partial T=\emptyset} M_k\mu(G_k) \le M\mu(Q) + \sum_{k:G_k\cap\partial T=\emptyset} M_k\mu(G_k),$$

$$\text{где } M = \sup_{\bar{x}\in G} f(\bar{x})$$

(мы заменили каждый $\mu(G_k)$ на $\mu(Q)$ и поставили знак $\le$, так как если $G_k \cap \partial T \ne \emptyset$, то $G_k \subset Q$);

далее, $M\mu(Q) + \sum_{k: G_k \cap \partial T = \emptyset} M_k \mu(G_k) \le M\frac{\varepsilon}{M} + \sum_{i,j}\left(\sum_{\substack{k: G_k \cap \partial T = \emptyset \\ G_k \subset \Pi_{ij}}} M_k \mu(G_k)\right) \le \varepsilon + \sum_{i,j} M_{ij}\,\mu\big(\Pi_{ij}\big) \le \underline{\underline{S}} + \varepsilon$

абсолютно аналогично доказываем, что $\overline{\overline{S}} - \varepsilon \le \overline{\overline{S}}_{\text{об}}$;

так как по условию $f \in R(G)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, что $\forall T$ с $d(T) < \delta_\varepsilon \quad \underline{\underline{S}} - \overline{\overline{S}} < \varepsilon$; так как, кроме того, $\underline{\underline{S}}_{\text{об}} \le \underline{\underline{S}} + \varepsilon$ и $\overline{\overline{S}} - \varepsilon \le \overline{\overline{S}}_{\text{об}}$, следовательно, $\underline{\underline{S}}_{\text{об}} - \overline{\overline{S}}_{\text{об}} < 3\varepsilon$; а так как для любого размеченного обобщенного разбиения $\overline{\overline{S}}_{\text{об}} \le \sigma_{\text{об}}(f) \le \underline{\underline{S}}_{\text{об}}$, то мы можем сделать вывод, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta_{1\varepsilon} > 0, \text{что}\ \ \forall T\ \text{ с }\ d(T) < \delta_{1\varepsilon} \qquad |\sigma_{\text{об}}(f) - I| < 3\varepsilon,$$

$$\text{где } I = \lim_{d(T)\to 0} \sigma_f(T),$$

$$\text{следовательно, } \exists \lim_{d(T(G))\to 0} \sigma_{\text{об}}(f) = I \quad \blacksquare$$

<u>Замена переменных в кратном интеграле.</u>

Некоторые свойства гладких отображений в R^n.

<u>Утверждение 1:</u>

Пусть $G \subset R^n -$ замкнутая ограниченная выпуклая область, пусть $\varphi: G \to R$ и $\varphi \in C^1(G)$; тогда: $\forall \overline{x_1}, \overline{x_2} \in G \quad \exists \bar{c} \in G$, что $\varphi(\overline{x_2}) - \varphi(\overline{x_1}) = \langle \overline{x_2} - \overline{x_1},\ \ grad\ \varphi(\bar{c}) \rangle$

<u>Доказательство:</u>

рассмотрим $h(t) = \varphi\big(\overline{x_1} + t(\overline{x_2} - \overline{x_1})\big), t \in [0;1]$

запишем теорему Лагранжа для $h(t)$:

$$h(1) - h(0) = h^{'}(c) * (1 - 0) = h^{'}(c),\ \ c \in [0;1];\quad \text{кроме того, } h(0) = \varphi(\overline{x_1}),\ \ h(1) = \varphi(\overline{x_2}):$$

$$\varphi(\overline{x_2}) - \varphi(\overline{x_1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}\bigg|_{t=c} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x_{2k} - x_{1k})\bigg|_{t=c} = \langle \overline{x_2} - \overline{x_1},\ \ grad\ \varphi(\bar{c}) \rangle. \quad \blacksquare$$

Лекция №6 (13.03.09)

Утверждение 2:
Пусть $G \subset R^n$ − замкнутая выпуклая ограниченная область, $\bar{\varphi}: G \to R^n, \bar{\varphi} \in C^1(G)$; тогда:
$$\exists c > 0 \ \ \forall \overline{x_1}, \overline{x_2} \in G \quad \|\bar{\varphi}(\overline{x_1}) - \bar{\varphi}(\overline{x_2})\| \le C\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|$$

Доказательство:
$$\|\bar{\varphi}(\overline{x_1}) - \bar{\varphi}(\overline{x_2})\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi_k(\overline{x_1}) - \varphi_k(\overline{x_2})\right)^2} \le \sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(\overline{x_1}) - \varphi_k(\overline{x_2})| = \sum_{k=1}^{n}|\langle\overline{x_1} - \overline{x_2}, \ \ grad\ \varphi_k(\xi_k)\rangle| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n}\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\| * \|grad\ \varphi_k(\xi_k)\| \le C\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|, \ \text{ где } C = n * \max_{\substack{i=1,..,n \\ \bar{x}\in G}}\|grad\ \varphi_k(\bar{x})\| \quad \blacksquare$$

Определение:
Пусть $\bar{\varphi}(\bar{x}): G \to R^n, G \subset R^n, \bar{\varphi} \in C^1(G)$, Я$_{\bar{\varphi}}$ − матрица Якоби отображения $\bar{\varphi}$; тогда:
$$\Delta\bar{y} = \text{Я}_{\bar{\varphi}}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} * \Delta\bar{x} - \text{ первый дифференциал отображения } \bar{\varphi} \text{ в точке } \bar{x}_0.$$

Утверждение 3:
$G \subset R^n$ − замкнутая выпуклая ограниченная область, $\bar{\varphi}: G \to R^n, \bar{\varphi} \in C^1(G)$; тогда:
$$\exists\alpha(\Delta\bar{x}): R^n \to R, \text{что } \lim_{\|\Delta\bar{x}\|\to 0}\alpha(\Delta\bar{x}) = 0 \ \text{ и } \ \left\|\bar{\varphi}(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \bar{\varphi}(\bar{x}) - \text{Я}_{\bar{\varphi}}\Big|_{\bar{x}} * \Delta\bar{x}\right\| \le |\alpha(\Delta\bar{x})| * \|\Delta\bar{x}\|$$

Доказательство:
$$\left\|\bar{\varphi}(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \bar{\varphi}(\bar{x}) - \text{Я}_{\bar{\varphi}}\Big|_{\bar{x}} * \Delta\bar{x}\right\| \le \sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \varphi_k(\bar{x}) - \langle\Delta\bar{x}, grad\ \varphi_k(\bar{x})\rangle|$$
из доказательства утверждения 1, $\exists\bar{\xi}_k = \bar{x} + \theta_k\Delta\bar{x}, \theta_k \in [0; 1]$, что:
$$\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \varphi_k(\bar{x}) - \langle\Delta\bar{x}, grad\ \varphi_k(\bar{x})\rangle| = \sum_{k=1}^{n}\left|\langle\Delta\bar{x}, grad\ \varphi_k(\bar{\xi}_k)\rangle - \langle\Delta\bar{x}, grad\ \varphi_k(\bar{x})\rangle\right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left|\langle\Delta\bar{x}, grad\ \varphi_k(\bar{\xi}_k) - grad\ \varphi_k(\bar{x})\rangle\right| = \|\Delta\bar{x}\|\sum_{k=1}^{n}\left\|grad\ \varphi_k(\bar{\xi}_k) - grad\ \varphi_k(\bar{x})\right\|$$
$$\bar{\xi}_k = \bar{x} + \theta_k\Delta\bar{x}, \ \ G - \text{компакт} \ \Longrightarrow \ \ \exists\alpha(\Delta\bar{x}): \sum_{k=1}^{n}\left\|grad\ \varphi_k(\bar{\xi}_k) - grad\ \varphi_k(\bar{x})\right\| = |\alpha(\Delta\bar{x})|$$
$$\bar{\varphi} \in C^1(G) \ \Longrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_\varepsilon > 0 \ \ \forall\ \Delta\bar{x}: \|\Delta\bar{x}\| < \delta_\varepsilon \quad \sum_{k=1}^{n}\left\|grad\ \varphi_k(\bar{\xi}_k) - grad\ \varphi_k(\bar{x})\right\| < \varepsilon \ \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lim_{\|\Delta\bar{x}\|\to 0}\alpha(\Delta\bar{x}) = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема (свойство объёма при гладких отображениях):
Пусть $G \subset R^n$ − замкнутая ограниченная выпуклая область, $\mu(\partial G) = 0, \bar{\varphi}: G \to R^n, \bar{\varphi} \in C^1(G)$, $\Omega = \bar{\varphi}(G), \bar{\varphi}$ − биекция; тогда:
$$\mu(\partial\Omega) = 0 \ \ \text{и} \ \ \mu(\Omega) \le \int_G ..\int \left|J_{\bar{\varphi}}\right| dx_1 \dots dx_n$$

Доказательство:
Доказываем опять же для двумерного случая:
$$\bar{\varphi}(\partial G) = \partial\Omega; \Pi \supset G, \Pi - \text{квадрат}, \Pi_{ij} - \text{квадраты}, d - \text{сторона } \Pi_{ij}$$
1) I − множество индексов, $(i,j) \in I$, если $\Pi_{ij} \cap \partial G \neq \emptyset$, $(i,j) \notin I$, если $\Pi_{ij} \cap \partial G = \emptyset$
по утверждению 2, $\exists C > 0$, что $\forall\overline{x_1}, \overline{x_2} \in G \quad \|\bar{\varphi}(\overline{x_1}) - \bar{\varphi}(\overline{x_2})\| \le C\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|$, то есть при отображении $\bar{\varphi}$ расстояние между точками увеличивается не более чем в C раз;

Π_{ij} лежит в круге радиусом $\dfrac{d}{\sqrt{2}} \implies \bar{\varphi}(\Pi_{ij})$ лежит в круге радиусом $\dfrac{Cd}{\sqrt{2}}$, то есть площадью $\dfrac{\pi C^2 d^2}{2}$

$\mu(\partial G) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \ \forall \{\Pi_{ij}\}$ с $d < \delta_\varepsilon \quad \sum\limits_{(i,j)\in I} d^2 < \varepsilon \implies \bar{\varphi}(\partial G)$ лежит в множестве с площадью $\dfrac{\pi C^2 \varepsilon}{2}$

2) пусть $\forall \Pi_{ij}$, состоящего только из внутренних точек G, $\overline{x_{ij}}$ – левый нижний угол Π_{ij}, а $\overline{x_{ij}} + \overline{\Delta x}$ – произвольная точка Π_{ij}, тогда $P_{ij} = \bar{\varphi}(\overline{x_{ij}}) + Я_{\bar{\varphi}} \big|_{\overline{x_{ij}}} \overline{\Delta x}$ – параллелограмм площадью $\left| J_{\bar{\varphi}} \big|_{\overline{x_{ij}}} \right| d^2$ (формула площади известна из курса линейной алгебры);
в утверждении 3 мы ввели функцию $\alpha(\Delta\bar{x})$, зависящую от вектора $\Delta\bar{x}$, но её можно определённым образом преобразовать, чтобы она зависела только от его нормы $\|\Delta\bar{x}\|$, в дальнейшем пользуемся именно этой новой функцией $\alpha(\|\Delta\bar{x}\|)$;
построим фигуру $\widetilde{P_{ij}}$ – множество точек, отстоящих от P_{ij} на расстояние $\le \alpha(\sqrt{2}d)\sqrt{2}d$,
тогда $\bar{\varphi}(\Pi_{ij}) \subset \widetilde{P_{ij}}$, и из утверждения 3:

$$\left\| \bar{\varphi}(\overline{x_{ij}} + \Delta\bar{x}) - \bar{\varphi}(\overline{x_{ij}}) - Я_{\bar{\varphi}} \big|_{\overline{x_{ij}}} * \Delta\bar{x} \right\| \le |\alpha(\Delta\bar{x})| * \|\Delta\bar{x}\| \le |\alpha(\sqrt{2}d)| * \sqrt{2}d$$

$$\Omega_{\mathrm{ij}} = \bar{\varphi}(\Pi_{ij})$$

$$\mu(\Omega_{\mathrm{ij}}) \le \mu(\widetilde{P_{ij}}) \le \left| J_{\bar{\varphi}} \big|_{\overline{x_{ij}}} \right| d^2 + 4|\alpha(\sqrt{2}d)| * \sqrt{2}d * c * d + 4\pi\alpha^2(\sqrt{2}d) * d^2 =$$

$$= \left| J_{\bar{\varphi}} \big|_{\overline{x_{ij}}} \right| d^2 + |\alpha(\sqrt{2}d)| * d^2 * c_1 \quad (c_1 = 4\sqrt{2}c + 4\pi)$$

$$\sum_{\substack{(i,j)\notin I \\ \Pi_{ij} - \text{внутри } G}} \mu(\Omega_{\mathrm{ij}}) \le \sum_{\substack{(i,j)\notin I \\ \Pi_{ij} - \text{внутри } G}} \left| J_{\bar{\varphi}} \big|_{\overline{x_{ij}}} \right| d^2 + c_1 |\alpha(\sqrt{2}d)| d^2 \sum_{\substack{(i,j)\notin I \\ \Pi_{ij} - \text{внутри } G}} 1 \le \sum_{\substack{(i,j)\notin I \\ \Pi_{ij} - \text{внутри } G}} \left| J_{\bar{\varphi}} \big|_{\overline{x_{ij}}} \right| d^2 +$$

$$+ c_2 |\alpha(\sqrt{2}d)|$$

$$\sum_{\substack{(i,j)\notin I \\ \Pi_{ij} - \text{внутри } G}} \mu(\Omega_{\mathrm{ij}}) \ \to \ \mu(\Omega) \ \text{ при } \ d \to 0$$

$$\sum_{\substack{(i,j)\notin I \\ \Pi_{ij} - \text{внутри } G}} \left| J_{\bar{\varphi}} \big|_{\overline{x_{ij}}} \right| d^2 \ \to \ \iint\limits_G |J_{\bar{\varphi}}| dxdy \ \text{ при } \ d \to 0$$

$$\text{следовательно,} \ \mu(\Omega) \le \iint\limits_G |J_{\bar{\varphi}}| dxdy. \quad \blacksquare$$

Следствие 1:

Теорема верна и для невыпуклых G.

Доказательство:

Π_{ij} – выпуклый; возьмём только внутренние $\Pi_{ij} \implies \mu(\Omega_{\mathrm{ij}}) \le \iint\limits_{\Pi_{ij}} |J_{\bar{\varphi}}| dxdy \implies \sum\limits_{\Pi_{ij} - \text{внутри } G} \mu(\Omega_{\mathrm{ij}}) \le$

$$\le \sum_{\Pi_{ij} - \text{внутри } G} \left(\iint\limits_G |J_{\bar{\varphi}}| dxdy \right); \text{устремим } d \text{ к } 0 \implies \mu(\Omega) \le \iint\limits_G |J_{\bar{\varphi}}| dxdy \quad \blacksquare$$

Следствие 2:

Если дополнительно $|J_{\bar{\varphi}}| \ge \delta > 0$ на G; тогда $\mu(\Omega) = \int\limits_G .. \int |J_{\bar{\varphi}}| dx_1 \dots dx_n$

Доказательство:

$$\{G_i\}_{i=1}^{k} - \text{ разбиение } G;\ \Omega_{\text{i}} = \overline{\varphi}(G_i),\ \ \overline{\overline{S}}(T) = \sum_{n=1}^{k} m_i \mu(G_i)\,, m_i = \min_{G_i} \left| J_{\overline{\varphi}} \right|$$

$$\left| J_{\overline{\varphi}} \right| \geq \delta > 0 \implies \exists \overline{\varphi}^{-1};\ \mu(G_i) \leq \int\limits_{\Omega_{\text{i}}} ..\int \left| J_{\overline{\varphi}^{-1}} \right| d\widehat{x_1} \dots d\widehat{x_n} \leq M_i \mu(\Omega_{\text{i}}),\ \ M_i = \max_{\Omega_{\text{i}}} \left| J_{\overline{\varphi}^{-1}} \right|$$

$$M_i = \max_{\Omega_{\text{i}}} \left| J_{\overline{\varphi}^{-1}} \right| = \left(\min_{\text{G}_{\text{i}}} \left| J_{\overline{\varphi}} \right| \right)^{-1} = \frac{1}{m_i}$$

$$\overline{\overline{S}}(T) = \sum_{n=1}^{k} m_i \mu(G_i) \leq \sum_{n=1}^{k} m_i \frac{1}{m_i} \mu(\Omega_{\text{i}}) = \mu(\Omega)$$

$$\mu(\Omega) \leq \int\limits_{G} ..\int \left| J_{\overline{\varphi}} \right| dx_1 \dots dx_n \leq \mu(\Omega)$$

$$\mu(\Omega) = \int\limits_{G} ..\int \left| J_{\overline{\varphi}} \right| dx_1 \dots dx_n \ \ \blacksquare$$

Лекция №7 (25.03.09)

Теорема:
$G \subset R^n$ — замкнутая ограниченная область, $\mu(\partial G) = 0, \bar{\varphi}: G \to R^n, \bar{\varphi} \in C^1(G), \left| J_{\bar{\varphi}} \right| \geq \delta > 0$ на G, $\Omega = \bar{\varphi}(G)$; пусть $f(\bar{y}) \in R(\Omega)$ и $f(\bar{\varphi}(\bar{x}))\left| J_{\bar{\varphi}} \right| \in R(G)$; тогда

$$\int_\Omega ..\int f(\bar{y})\, d\bar{y} = \int_G ..\int f(\bar{\varphi}(\bar{x}))\left| J_{\bar{\varphi}} \right| d\bar{x}$$

Доказательство:

$$\{\Omega_i\}_{i=1}^k \text{ — разбиение } \Omega,\ \ \{G_i = \bar{\varphi}^{\,-1}(\Omega_i)\}_{i=1}^k \text{ — разбиение } G, m_i = \inf_{\Omega_i} f(\bar{y}), M_i = \sup_{\Omega_i} f(\bar{y})$$

по предыдущей теореме:

$$m_i\mu(\Omega_i) \leq \int_{G_i} ..\int f(\bar{\varphi}(\bar{x}))\left| J_{\bar{\varphi}} \right| d\bar{x} \leq M_i\mu(\Omega_i)$$

$$\overline{\overline{S}}(T) = \sum_{i=1}^k m_i\mu(\Omega_i) \leq \int_G ..\int f(\bar{\varphi}(\bar{x}))\left| J_{\bar{\varphi}} \right| d\bar{x} \leq \sum_{i=1}^k M_i\mu(\Omega_i) = \underline{\underline{S}}(T)$$

устремляем $d(T)$ к 0:

$$\int_\Omega ..\int f(\bar{y})\, d\bar{y} \leq \int_G ..\int f(\bar{\varphi}(\bar{x}))\left| J_{\bar{\varphi}} \right| d\bar{x} \leq \int_\Omega ..\int f(\bar{y})\, d\bar{y}$$

$$\int_\Omega ..\int f(\bar{y})\, d\bar{y} = \int_G ..\int f(\bar{\varphi}(\bar{x}))\left| J_{\bar{\varphi}} \right| d\bar{x} \quad \blacksquare$$

Кратные несобственные интегралы

Определение:
Пусть D — открытое связное множество в $R^n, n \geq 2$; последовательность $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ из открытых ог — раниченных связных множеств, что $\overline{D_n} \subset D_{n+1}\ \ \forall n$ и $\bigcup_{n=1}^\infty D_n = D$, называется исчерпыванием D.

Определение:
Пусть D — открытое связное множество в R^n, $f(\bar{x})$ определена на D, и для любого ограниченного замкнутого подмножества D, имеющего объём, $f(\bar{x})$ интегрируема по Риману на нём; если для любого исчерпывания $\{D_n\}_{n=1}^\infty$, что $\exists\mu(\overline{D_n})$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_{\overline{D_n}} ..\int f(\bar{x})\, d\bar{x}\right) = I$, то говорят, что f несобс — твенно интегрируема на D, и пишут, что $I = \int_D ..\int f(\bar{x})\, d\bar{x}$

Теорема:
Пусть $f(\bar{x})$ из определения ≥ 0 на D; тогда существование несобственного интеграла $\int_D ..\int f(\bar{x})\, d\bar{x}$ равносильно ограниченности последовательности $\left\{\int_{\overline{D_n}} ..\int f(\bar{x})\, d\bar{x}\right\}_{n=1}^\infty$ для какого — либо исчерпывания $\{D_n\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство:
1) докажем сначала слева направо:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_{\overline{D_n}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}\right) \Longrightarrow \text{последовательность} \left\{\int\limits_{\overline{D_n}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{ограничена}$$

2) теперь справа налево:

пусть $\left\{\int\limits_{\overline{D_n}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена; так как $f(\bar{x}) \geq 0$ на D, то эта последовательность моно – тонна, следовательно, у неё есть предел I; рассмотрим теперь другое исчерпывание $\{D_m^{'}\}_{m=1}^{\infty}$;
тогда $\forall m \;\; \exists n$, что $\overline{D_m^{'}} \subset D_n$; докажем это:
если это не так, то получается, что $\exists m \;\; \forall n \;\; \exists \overline{x_n} \in \overline{D_m^{'}}, \overline{x_n} \notin D_n$;
так как $\overline{D_m^{'}}$ – компакт (потому что $\overline{D_m^{'}}$ замкнуто и ограничено), то $\exists$ подпоследовательность $\overline{x_{n_k}}$,
что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \overline{x_{n_k}} = \overline{x_0} \in \overline{D_m^{'}}$; $\overline{x_0} \in \overline{D_m^{'}}$, значит, $\overline{x_0} \in D$, а $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n \implies \exists n_1$, что $\overline{x_0} \in D_{n_1}$.
Тогда из – за того, что $\overline{D_n} \subset D_{n+1}, \forall n \geq n_1 \;\; \overline{x_0} \in D_n$; учитывая, что D_n – открытое множество, полу – чим, что $\exists B_\delta(\overline{x_0}) \subset D_n$; тогда получается, что в $B_\delta(\overline{x_0})$ бесконечно много элементов $\overline{x_{n_k}} \in D_n$, что противоречит нашему предположению о том, что $\exists m \;\; \forall n \;\; \exists \overline{x_n} \in \overline{D_m^{'}}, \overline{x_n} \notin D_n$;
так как $\overline{D_m^{'}} \subset D_n$ и $f(\bar{x}) \geq 0$ на D, то $\int\limits_{\overline{D_m^{'}}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x} \leq \int\limits_{\overline{D_n}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x} \leq I$; тогда, так как пос – ледовательность $\int\limits_{\overline{D_m^{'}}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}$ ограничена и монотонна, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(\int\limits_{\overline{D_m^{'}}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}\right) =$
$= I^{'} \leq I$; но проведя рассуждения аналогичным образом, взяв в качестве первого исчерпывания $\{D_m^{'}\}_{m=1}^{\infty}$, а в качестве второго – $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, получим, что $I^{'} \leq I \implies I^{'} = I$ ■

<u>Теорема (признак сравнения):</u>
Пусть $0 \leq f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$ на D; тогда:

1) если $\exists \int\limits_{D}..\int g(\bar{x})\,d\bar{x}$, то $\exists \int\limits_{D}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}$;

2) а если $\nexists \int\limits_{D}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}$, то $\nexists \int\limits_{D}..\int g(\bar{x})\,d\bar{x}$

<u>Доказательство:</u>
по теореме для собственных интегралов, если $0 \leq f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$ на D, то:

$$\int\limits_{\overline{D_n}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x} \leq \int\limits_{\overline{D_n}}..\int g(\bar{x})\,d\bar{x}$$

переходим к пределу $n \to \infty$

если $\exists \int\limits_{\overline{D_n}}..\int g(\bar{x})\,d\bar{x}$, то последовательность $\int\limits_{\overline{D_n}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}$ ограничена и возрастает,
(возрастает из – за условия $f(\bar{x}) \geq 0$), следовательно, у неё есть предел; а если
$\int\limits_{\overline{D_n}}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}$ расходится, то расходится к $+\infty$, значит и $\int\limits_{\overline{D_n}}..\int g(\bar{x})\,d\bar{x}$ расходится к $+\infty$ ■

<u>Теорема:</u>
Если $f(\bar{x})$ удовлетворяет условиям, заданным в определении несобственного кратного интеграла и $\exists \int\limits_{D}..\int |f(\bar{x})|\,d\bar{x}$, тогда $\exists \int\limits_{D}..\int f(\bar{x})\,d\bar{x}$.

Доказательство:

так как по условию $\forall D_n$ $\exists \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x}$, следовательно, $\exists \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x}$, $\exists \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int f_+\, d\bar{x}$ и $\exists \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int f_-\, d\bar{x}$ $\left(\text{где } f_+ = \dfrac{|f| + f}{2} \text{ и } f_- = \dfrac{|f| - f}{2}\right)$; так как $0 \le f_+ \le |f|$ и $0 \le f_- \le |f|$, то по признаку сравнения, существуют несобственные интегралы по D от f_+ и f_-, а следовательно, и от $f = f_+ - -f_-$ ■

Теорема:

Если $f(\bar{x})$ удовлетворяет условиям, заданным в определении несобственного кратного интеграла и $\exists \int\limits_{D} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x}$, то $\exists \int\limits_{D} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x}$.

Доказательство:

докажем от противного:

пусть для $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\int\limits_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} \to +\infty$, $D_n -$ такие, что

$$\int\limits_{\overline{D_{n+1}}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} \ge 3 \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} + 2n + 4 \implies \int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} \ge 2 \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} + 2n + 4$$

$(Q_n = D_{n+1} \backslash D_n)$;

$|f| = f_+ + f_-$ (f_+ и f_- из доказательства предыдущей теоремы), и пусть

$$\int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int f_+(\bar{x})\, d\bar{x} \ge \int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int f_-(\bar{x})\, d\bar{x} \quad (*)$$

тогда:

$$2 \int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int f_+(\bar{x})\, d\bar{x} \ge 2 \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} + 2n + 4$$

$$\int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int f_+(\bar{x})\, d\bar{x} \ge \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} + n + 2$$

Вспомогательная мысль:

пусть $m_i = \inf\limits_{\bar{x} \in Q_{n_i}} f_+(\bar{x})$, тогда:

$0 \le \int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int f_+(\bar{x})\, d\bar{x} - \sum\limits_i m_i \mu(Q_{n_i}) \le 1$ (если выбрать достаточно мелкое разбиение), так как $\sum\limits_i m_i \mu(Q_{n_i}) = \inf\limits_{T(Q_n)} \sigma_{\text{об}}(f)$, следовательно, уменьшая диаметр разбиения, мы можем уменьшить разность $\int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int f_+(\bar{x})\, d\bar{x} - \sum\limits_i m_i \mu(Q_{n_i})$ меньше любого положительного числа, в том числе и 1;

следовательно, из двух неравенств:

$$\int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int f_+(\bar{x})\, d\bar{x} - \sum_i m_i \mu(Q_{n_i}) \le 1$$

$$\int\limits_{\overline{Q_n}} .. \int f_+(\bar{x})\, d\bar{x} \ge \int\limits_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} + n + 2$$

получаем:

$$\sum_i m_i \mu\left(Q_{n_i}\right) \geq \int_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} + n + 1$$

тогда убираем нулевые слагаемые из суммы $\sum_i m_i \mu\left(Q_{n_i}\right)$ (они получились из − за того, что на тех Q_{n_i}, где $\exists \bar{x}$, что $f(\bar{x}) < 0$, $f_+(\bar{x})$ принимает нулевое значение, а следовательно, и $m_i = 0$), убираем из Q_{n_i} те, где $m_i = 0$, и рассматриваем функцию $f_+(\bar{x})$ на оставшемся множестве;

пусть $\widetilde{Q_n} = \bigcup_{m_i > 0} Q_{n_i}$;

тогда делаем в неравенстве предельный переход $d \to 0$:

$$\int_{\widetilde{Q_n}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} \geq \int_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x} + n + 1$$

пусть $\widetilde{D_n} = D_n \cup \widetilde{Q_n}$;

заметим, что $\int_{\overline{D_n}} .. \int (f(\bar{x}) + |f(\bar{x})|)\, d\bar{x} \geq 0$, следовательно, $\int_{\overline{D_n}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} \geq - \int_{\overline{D_n}} .. \int |f(\bar{x})|\, d\bar{x}$;

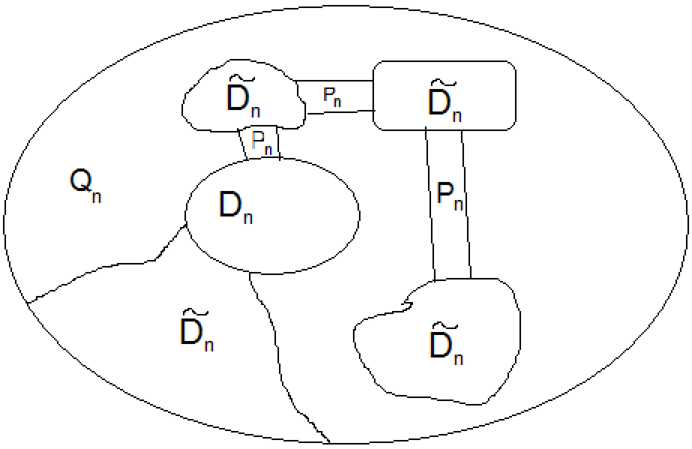
сложим неравенства и получим, что $\int_{\overline{\widetilde{D_n}}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} \geq n + 1 \implies \left| \int_{\overline{\widetilde{D_n}}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} \right| \geq n + 1,$

(если бы на месте, отмеченном звёздочкой, неравенство было бы таким: $\int_{\overline{Q_n}} .. \int f_+(\bar{x})\, d\bar{x} \leq$

$\leq \int_{\overline{Q_n}} .. \int f_-(\bar{x})\, d\bar{x}$, то мы бы получили, что $\int_{\overline{\widetilde{D_n}}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} \leq -n - 1$, и всё равно

$\left| \int_{\overline{\widetilde{D_n}}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} \right| \geq n + 1$)

теперь осталось сделать наши $\widetilde{D_n}$ связными множествами, чтобы их набор действительно был исчерпыванием;



так как $\widetilde{D_n}$ состоит из конечного набора связных областей, то соединим их множеством P_n так, чтобы $\widetilde{D_n} \cup P_n = D_n^*$ было связным и $\mu(\overline{P_n}) \leq \dfrac{1}{\sup_{\overline{D_{n+1}}} |f(\bar{x})|}$, тогда получим, что

$$\left| \int_{\overline{D_n^*}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} \right| \geq n \text{ и } \int_{\overline{D_n^*}} .. \int f(\bar{x})\, d\bar{x} \to \infty, \text{что противоречит условию.} \quad \blacksquare$$

Лекция №8 (27.03.09)

Криволинейные интегралы.

Определение:

$\bar{\gamma}(t)\colon [a,b] \to l \subset R^n,\ \ a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,\ \ \{\bar{\gamma}(t_i)\}_{i=0}^{n}$ — разбиение кривой, $\{\xi_i\}$, $t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$; $\{\bar{\gamma}(\xi_i) = \zeta_i\}_{i=1}^{n}$ — разметка разбиения; $\Delta l_i = [l_{i-1}, l_i]$ — часть кривой от $\bar{\gamma}(t_{i-1})$ до $\bar{\gamma}(t_i)$; $T_l(\zeta) = \left\{\{l_i\}_{i=1}^{k}, \{\zeta_i\}_{i=1}^{k}\right\}$ — размеченное разбиение l.

Определение:

Пусть $l \subset R^n$ — простая спрямляемая кривая, $\exists \bar{\gamma}(t)\colon [a,b] \to l, \bar{\gamma}(t) \in C^1[a,b], \bar{\gamma}'(t) \neq 0$, пусть $f(\bar{x})$ определена на l; если $\forall\ T_l(\zeta)\ \ \exists \lim\limits_{\max|\Delta l_i| \to 0} \sum\limits_{i=0}^{k} f(\zeta_i)\,|\Delta l_i| = I$, то говорят, что существует криволи – нейный интеграл первого рода от $f(\bar{x})$ по кривой l, равный I, и обозначается это так:

$$\int\limits_{l} f(\bar{x})dl = I$$

Определение:

пусть $l = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_j$; l_j удовлетворяет условиям предыдущего определения $\forall j$; тогда:

$$\int\limits_{l} f(\bar{x})dl = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{l_j} f(\bar{x})dl$$

Определение:

Пусть $l \subset R^n$ — простая спрямляемая кривая, $\exists \bar{\gamma}(t)\colon [a,b] \to l, \bar{\gamma}(t) \in C^1[a,b], \bar{\gamma}'(t) \neq 0$, $\bar{\gamma}(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$; пусть $\{f_i(\bar{x})\}_{i=1}^{n}$ определены на l; если $\forall\ T_l(\zeta)$

$$\exists \lim_{\max|\Delta l_j| \to 0} \sum_{j=1}^{k} \big(f_1(\zeta_j)\Delta x_{1j} + \dots + f_n(\zeta_j)\Delta x_{nj}\big) = I,$$

где Δx_{ij} — приращение i – ой координаты при прохождении j – го отрезка кривой:

$$\Delta x_{ij} = x_i(t_j) - x_i(t_{j-1});$$

то говорят, что существует криволинейный интеграл второго рода по кривой в направлении от $A = \bar{\gamma}(a)$ до $B = \bar{\gamma}(b)$ от дифференциальной формы $f_1(\bar{x})dx_1 + \dots + f_n(\bar{x})dx_n$, равный I:

$$\int\limits_{A}^{B} f_1(\bar{x})dx_1 + \dots + f_n(\bar{x})dx_n = I$$

Утверждение:

1) криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода,
2) криволинейный интеграл второго рода меняет знак при смене направления обхода.

Доказательство:

1) при смене направления обхода в интегральной сумме меняется лишь порядок слагаемых, что не меняет её значения, и, как следствие, не меняет и значение интеграла;
2) при смене направления обхода в интегральной сумме все Δx_{ij} меняют знак на противоположный, следовательно, и интеграл меняет знак на противоположный. ■

Определение:

пусть $l = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_j$; l_j удовлетворяет условиям предыдущего определения $\forall j$; тогда:

$$\int\limits_{l} \sum_{s=1}^{n} f_s(\bar{x}) dx_s = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{l_j} \sum_{s=1}^{n} f_s(\bar{x}) dx_s$$

Определение:

пусть l — простая замкнутая кривая: $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(b)$; тогда $\oint\limits_{l} f(\bar{x}) dl$ называется криволинейным ин – тегралом первого рода от функции f по замкнутой кривой l.

Определение:

пусть l — простая замкнутая кривая: $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(b)$; A (начало кривой) — любая точка l, положи – тельное направление обхода — направление того касательного вектора из двух, который образует с внешней нормалью согласованный с системой координат базис; тогда $\oint\limits_{l} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\bar{x}) dx_k$ назы – вается криволинейным интегралом второго рода от дифференциальной формы $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\bar{x}) dx_k$ по замкнутой кривой l.

Теорема (выражение криволинейных интегралов через интегралы с параметром):

Пусть $l \subset R^n$ — простая спрямляемая кривая, $\exists \bar{\gamma}(t) \colon [a,b] \to l, \bar{\gamma}(t) \in C^1[a,b], \bar{\gamma}^{'}(t) \neq 0$, пусть заданы функция $f(\bar{x})$ и дифференциальная форма $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\bar{x}) dx_k$, и от них существуют, соответственно, интегралы первого и второго рода по l; тогда:

$$1)\ \int\limits_{l} f(\bar{x}) dl = \int\limits_{a}^{b} f\big(\bar{\gamma}(t)\big) \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Big({x_k'}^{2}(t)\Big)}\, dt$$

$$2)\ \int\limits_{A}^{B} \sum_{k=1}^{n} f_k(\bar{x}) dx_k = \int\limits_{a}^{b} \sum_{k=1}^{n} f_k\big(\bar{\gamma}(t)\big) x_k'(t)\, dt$$

Доказательство:

1) $dl = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (dx_k)^2} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \Big({x_k'}^{2}(t)\Big)}\, dt \Rightarrow \int\limits_{l} f(\bar{x}) dl = \int\limits_{a}^{b} f\big(\bar{\gamma}(t)\big) \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \Big({x_k'}^{2}(t)\Big)}\, dt$

2) так как $\bar{\gamma}(t) \in C^1[a,b]$, то верна формула:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dg(x) = \int\limits_{a}^{b} f(x) g'(x)\, dx$$

а, следовательно:

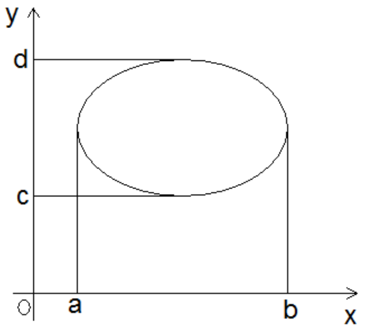
$$\int\limits_{A}^{B} \sum_{k=1}^{n} f_k(\bar{x}) dx_k = \int\limits_{a}^{b} \sum_{k=1}^{n} f_k\big(\bar{\gamma}(t)\big) x_k'(t)\, dt \quad \blacksquare$$

Теорема (формула Грина):

$G \subset R^2$ — замкнутая ограниченная выпуклая область, $\partial G = \bar{\gamma}(t)$ — кусочно непрерывно диффе — ренцируема; пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на G, $\exists \dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\exists \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, непрерывные на G; тогда:

$$\oint_{\partial G} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

<u>*Доказательство:*</u>



пусть верхняя часть ∂G задана функцией $y = \psi(x)$, а нижняя — функцией $y = \varphi(x)$; правая часть — графиком $x = \theta(y)$, левая — функцией $x = \rho(y)$; в данном случае направление, согласованное с внешней нормалью — это направление против часовой стрелки; по второму пункту предыдущей теоремы:

$$\oint_{\partial G} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P\big(x,\varphi(x)\big)dx + \int_b^a P\big(x,\psi(x)\big)dx +$$

$$+ \int_c^d Q(\theta(y),y)dy + \int_d^c Q(\rho(y),y)dy = \int_a^b \Big(P\big(x,\varphi(x)\big) - P\big(x,\psi(x)\big)\Big)dx +$$

$$+ \int_c^d \big(Q(\theta(y),y) - Q(\rho(y),y)\big)dy = \int_a^b \left(-\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx + \int_c^d \left(\int_{\rho(y)}^{\theta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)dy = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy +$$

$$+ \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \quad \blacksquare$$

<u>*Следствие 1:*</u>

Для конечного объединений областей G, удовлетворяющих условиям формулы Грина, также верна формула Грина.

<u>*Следствие 2:*</u>

Если A и B — области, удовлетворяющие условиям формулы Грина, $B \subset A$, то формула Грина верна и для $A \backslash B$.

Лекция №9 (03.04.09)

Определение:

$\forall\gamma \subset R^n, n \geq 3, \gamma -$ простая замкнутая кривая, определим направление обхода для интеграла второго рода следующим образом: $A, B, C \in \gamma$, направление обхода $- ABCA$ или $ACBA$.

Теорема (о независимости криволинейного интеграла от пути):

Пусть область $\Omega \subset R^n$ ограниченная и выпуклая, и дан набор функций $\{Q_i(\bar{x})\}_{i=1}^n$ $\forall i$ $Q_i(\bar{x}) \in C(\Omega)$; кроме того, дана кривая $\gamma \subset \Omega, A$ и $B -$ начало и конец γ; тогда $\int\limits_\gamma \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i$ зависит только от A и B и не зависит от γ (для любых A и B) $\Leftrightarrow$ $\exists u(\bar{x}) \in C^1(\Omega)$, что $du = \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i$

Доказательство:

1) доказываем слева направо:

дано, что $\forall A, B \in \Omega$ $\int\limits_\gamma \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i = I(A, B)$; фиксируем точку A, а $B = \bar{x}$; тогда:

$$\int\limits_{\gamma_{A\bar{x}}} \sum_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i = u(\bar{x})$$

тогда $\forall B_1, B_2 \in \Omega$ $\int\limits_{\gamma_{B_1B_2}} \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i = \int\limits_{\gamma_{AB_1B_2}} \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i - \int\limits_{\gamma_{AB_1}} \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i = u(B_2) - u(B_1)$

возьмём две точки из Ω: $\bar{x}(x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{x} + \Delta x_i(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n)$:

$\int\limits_{\gamma_{\bar{x},\bar{x}+\Delta x_i}} \sum\limits_{j=1}^n Q_j(\bar{x})dx_j$ (используем выпуклость Ω) $= \int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} Q_i(\bar{x})dx_i$ (так как изменяется только x_i) $=$
$= u(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_n)$

поделим обе части равенства на Δx_i и устремим его к нулю:

$$Q_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \implies du = \sum_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i$$

2) доказываем справа налево:

дана $u(\bar{x})$, что $du = \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i$

тогда $\int\limits_{\gamma_{AB}} \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{i=1}^n \Big(Q_i\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)x_i'(t)\Big)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{i=1}^n \Big(u\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)\Big)_t' dt =$
$= u\big(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)\big) - u\big(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\big) = u(B) - u(A)$. ■

Следствие:

В условиях теоремы $\oint\limits_{\gamma\subset\Omega} \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i = 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists u(\bar{x}) \in C^1(\Omega)$, что $du = \sum\limits_{i=1}^n Q_i(\bar{x})dx_i$

Определение:

Пусть область $\Omega \subset R^2 -$ замкнутая, ограниченная и выпуклая, $\mu(\partial\Omega) = 0$; рассмотрим отображение $\bar{\varphi}: \Omega \to R^n, n \geq 3, \bar{\varphi} \in C^1(\Omega)$, и ранг матрицы Якоби $\bar{\varphi}$ равен 2 везде; тогда образ $\bar{\varphi}$ $\Phi \subset R^n$ назовём гладкой невырожденной поверхностью, а $\bar{\varphi} -$ параметризацией этой поверхности:

$$\bar{\varphi} = \big(x_1(u, v), \dots, x_n(u, v)\big)$$

Определение:
Пусть область $\Omega \subset R^2$ — замкнутая, ограниченная и выпуклая, $\mu(\partial\Omega) = 0$; $\bar{\varphi}: \Omega \to R^n$, рассмотрим произвольное разбиение Ω прямоугольной сеткой; пусть $\{\Omega_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — прямоугольники разбиения, полностью лежащие в Ω, u_{ij} — левый нижний угол Ω_{ij}; пусть Π_{ij} — параллелограмм в R^n, образованный векторами $\left.\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u}\right)\right|_{(u_i,v_j)} \Delta u_i$ и $\left.\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial v}\right)\right|_{(u_i,v_j)} \Delta v_j$ с началом в точке $\bar{\varphi}(u_i, v_j)$; если $\forall T$ области Ω с $d \to 0$ $\exists \lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i,j}^{n} \mu(\Pi_{ij}) = S(\Phi)$, то $S(\Phi)$ называется площадью поверхности Φ.

Замечание:
так как $\mu(\partial\Omega) = 0$, то определение корректно относительно выбора $\{\Omega_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$

Теорема:
У всех вышерассматриваемых Φ $\exists S(\Phi)$ и

$$S(\Phi) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

$$\text{где } E = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2, G = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2, F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

Доказательство:
Распишем $\mu(\Pi_{ij})$ как площадь параллелограмма по формуле $S = ab\sin\alpha$, где a и b — стороны параллелограмма, а α — угол между ними, $\sin\alpha$ посчитаем по формуле $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, а $\cos\alpha$ найдем из определения скалярного произведения: $\cos\alpha = \dfrac{\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}$:

$$\mu(\Pi_{ij}) = \left\|\frac{\partial x_k}{\partial u}\right\| \Delta u_i \left\|\frac{\partial x_k}{\partial v}\right\| \Delta v_j \sqrt{1 - \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2}{\left\|\frac{\partial x_k}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial x_k}{\partial v}\right\|^2}} = \sqrt{\left\|\frac{\partial x_k}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial x_k}{\partial v}\right\|^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2}\, \Delta u_i \Delta v_j =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \sqrt{E(u_i, v_j) G(u_i, v_j) - F^2(u_i, v_j)}\, \Delta u_i \Delta v_j$$

устремляем диаметр разбиения к нулю и получаем:

$$S(\Phi) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \qquad \blacksquare$$

Лекция №10 (17.04.09)

Поверхностные интегралы

Определение:

Пусть область $\Omega \subset R^2$ — замкнутая, ограниченная и выпуклая, $\mu(\partial\Omega) = 0$; рассмотрим отображение $\bar{\varphi}: \Omega \to R^3, \bar{\varphi} \in C^1(\Omega)$, и ранг матрицы Якоби $\bar{\varphi}$ равен 2 везде; $\bar{\varphi}(\Omega) = S$ — поверхность в R^3, у S нет кратных точек, то есть $\bar{\varphi}$ — биекция.
$\varphi(\partial\Omega) \equiv \partial S$ назовём границей $S, \partial S$ — простая замкнутая кривая в R^3.

Определение:

Пусть $f(x,y,z) \in C(S)$, пусть Ω_{ij} — разбиение Ω на прямоугольники, взяты только те, что $\Omega_{ij} \subset \Omega$; (u_i, v_j) — левый нижний угол Ω_{ij}; Π_{ij} — параллелограмм на векторах $\bar{\varphi}_u' |_{(u_i,v_j)}\Delta u_i$ и $\bar{\varphi}_v' |_{(u_i,v_j)}\Delta v_j$ с началом в точке $\bar{\varphi}(u_i,v_j)$; если $\exists \lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i,j} f\left(x(u_i,v_j), y(u_i,v_j), z(u_i,v_j)\right)\mu(\Pi_{ij}) = I$, то говорят, что существует поверхностный интеграл первого рода от $f(x,y,z)$ по поверхности S:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = I$$

Замечание:

Заметим, что $\sum\limits_{i,j} f\left(\bar{\varphi}(u_i,v_j)\right)\mu(\Pi_{ij}) = \sum\limits_{i,j} f\left(\bar{\varphi}(u_i,v_j)\right)\sqrt{EG-F^2}\Big|_{(u_i,v_j)} \Delta u_i \Delta v_j$; устремим $d \to 0$:

$$\sum_{i,j} f\left(\bar{\varphi}(u_i,v_j)\right)\sqrt{EG-F^2}\Big|_{(u_i,v_j)} \Delta u_i \Delta v_j \to \iint\limits_\Omega f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

Замечание:

Пусть $\{S_k\}_{k=1}^n$ — поверхности, удовлетворяющие условию самого первого определения лекции; пусть $(S_k \cap S_m) \subset (\partial S_k \cap \partial S_m) \quad \forall k, m$; пусть $S = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k$; тогда:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{S_k} f(x,y,z)\,ds_k$$

Определение:

пусть $\bar{\varphi}: \Omega \to S, \ \forall \big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big) \in S$; тогда $\bar{n}\big(\bar{\varphi}(u,v)\big) = \dfrac{[\bar{\varphi}_u', \bar{\varphi}_v']}{\|[\bar{\varphi}_u', \bar{\varphi}_v']\|}$ — нормаль к поверх — ности S; заметим, что $\bar{n} \in C(\Omega)$ и что $\forall \bar{\psi}(t,s): \Omega' \to S \quad \bar{n}\left(\bar{\psi}(t,s)\right) = \pm\bar{n}\big(\bar{\varphi}(u,v)\big)$, $\langle \bar{n}\left(\bar{\psi}(t,s)\right), \bar{n}\big(\bar{\varphi}(u,v)\big)\rangle \equiv 1$ либо -1 везде на S, поэтому говорят, что выбор нормали задает сторону поверхности S.

Замечание:

$$(u,v) \to (v,u) \quad \Longrightarrow \quad \bar{n}(u,v) = -\bar{n}(v,u)$$

Определение:

$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C(S)$; если

$$\exists \lim_{d\to 0} \sum_{i,j} \left(P\left(\bar{\varphi}(u_i,v_j)\right)\langle \bar{n}(u_i,v_j), \overline{e_x}\rangle + Q\left(\bar{\varphi}(u_i,v_j)\right)\langle \bar{n}(u_i,v_j), \overline{e_y}\rangle + R\left(\bar{\varphi}(u_i,v_j)\right)\langle \bar{n}(u_i,v_j), \overline{e_z}\rangle\right)\mu(\Pi_{ij}),$$

то говорят, что существует поверхностный интеграл второго рода по стороне поверхности S, заданной нормалью $\bar{n}(u,v)$ от дифференциальной формы
$P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$

и обозначается он так:

$$\iint\limits_{S^{(\overline{n})}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

Примечание:

$$\langle \overline{n}(u_i, v_j), \overline{e_x} \rangle = \frac{\begin{vmatrix} y_u^{'} & y_v^{'} \\ z_u^{'} & z_v^{'} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\langle \overline{n}(u_i, v_j), \overline{e_y} \rangle = \frac{\begin{vmatrix} z_u^{'} & z_v^{'} \\ y_u^{'} & y_v^{'} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\langle \overline{n}(u_i, v_j), \overline{e_x} \rangle = \frac{\begin{vmatrix} x_u^{'} & x_v^{'} \\ y_u^{'} & y_v^{'} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Замечание:

$$\iint\limits_{S^{(\overline{n})}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(P\cos(\overline{n}\,\hat{}\,\overline{e_x}) + Q\cos(\overline{n}\,\hat{}\,\overline{e_y}) + R\cos(\overline{n}\,\hat{}\,\overline{e_z})\right)ds \; =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left(P\begin{vmatrix} y_u^{'} & y_v^{'} \\ z_u^{'} & z_v^{'} \end{vmatrix} + Q\begin{vmatrix} z_u^{'} & z_v^{'} \\ x_u^{'} & x_v^{'} \end{vmatrix} + R\begin{vmatrix} x_u^{'} & x_v^{'} \\ y_u^{'} & y_v^{'} \end{vmatrix}\right) du\, dv$$

Определение:

Пусть $\{S_k\}_{k=1}^{n}$ − поверхности, удовлетворяющие условию самого первого определения лекции; пусть $(S_k \cap S_m) \subset (\partial S_k \cap \partial S_m) \quad \forall k, m$; выбор нормалей на S_k согласован; $\forall k, m \;\; \partial S_k \cap \partial S_m \neq \emptyset$; пусть $S = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k$; тогда:

$$\iint\limits_{S^{(\overline{n})}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{S_k^{(\overline{n})}} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

Лекция №11 (24.04.09)

Теорема (формула Стокса):
Пусть область $\Omega \subset R^2$ — замкнутая, ограниченная и выпуклая, $\partial\Omega$ — кусочно — гладкая, простая, замкнутая, невырожденная кривая; $\overline{\varphi}: \Omega \to R^3, \overline{\varphi} \in C^1(\Omega), P, Q, R \in C^1(S)$, пусть направление обхода на ∂S и нормаль к S согласованы с параметризацией; тогда:

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \oiint_{S^{(\overline{n})}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Доказательство:
Рассмотрим только случай $Q \equiv 0, R \equiv 0$ (всё остальное доказывается аналогично)

$$\partial\Omega = \big(u(t), v(t)\big), \quad t \in [0,1]$$

распишем левую часть формулы:

$$\oint_{\partial S} P(x,y,z)\, dx = \int_0^1 P\Big(x\big(u(t),v(t)\big), y\big(u(t),v(t)\big), z\big(u(t),v(t)\big)\Big)\, dx\big(u(t),v(t)\big) =$$

$$= \oint_{\partial\Omega} P\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) dx(u,v) = \oint_{\partial\Omega} Px_u' du + Px_v' dv$$

по формуле Грина:

$$\oint_{\partial\Omega} Px_u' du + Px_v' dv = \iint_{\Omega} ((Px_v')_u' - (Px_u')_v')\, du\, dv = \iint_{\Omega} (Px_{vu}'' + P_u' x_v' - Px_{uv}'' - P_v' x_u')\, du\, dv =$$

$$= \iint_{\Omega} (P_u' x_v' - P_v' x_u')\, du\, dv = \iint_{\Omega} \Big(\big(P_x' x_u' + P_y' y_u' + P_z' z_u'\big) x_v' - \big(P_x' x_v' + P_y' y_v' + P_z' z_v'\big) x_u'\Big)\, du\, dv$$

$$= \iint_{\Omega} \big(P_x' x_u' x_v' + P_y' y_u' x_v' + P_z' z_u' x_v' - P_x' x_v' x_u' - P_y' y_v' x_u' - P_z' z_v' x_u'\big)\, du\, dv =$$

$$= \iint_{\Omega} \big(P_y' y_u' x_v' + P_z' z_u' x_v' - P_y' y_v' x_u' - P_z' z_v' x_u'\big)\, du\, dv$$

распишем правую часть формулы:

$$\oiint_{S^{(\overline{n})}} \frac{\partial P}{\partial z} dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\big(\overline{n} \widehat{\ } \overline{e_y}\big) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\big(\overline{n} \widehat{\ } \overline{e_z}\big)\right) ds =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \begin{vmatrix} z_u' & z_v' \\ x_u' & x_v' \end{vmatrix} - \frac{\partial P}{\partial y} \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix}\right) du\, dv, \text{ что и равно расписанной левой части} \quad \blacksquare$$

Определение:
Пусть V — замкнутая ограниченная выпуклая область в R^3; тогда ∂V — замкнутая поверхность.

Замечание:
Пусть l — простая замкнутая кривая $\subset \partial V$; тогда l разбивает ∂V на две поверхности с границей l, если параметризация на обеих частях согласована, то говорят, что на V задана нормаль.

Теорема (формула Гаусса-Остроградского):
пусть V — замкнутая, ограниченная, выпуклая область в $R^3, \partial V$ — кусочно — гладкая невырож — денная поверхность, $P, Q, R \in C^1(V)$, пусть задана внешняя нормаль $\overline{n}$ к V; тогда:

$$\oiint_{\partial V^{(\overline{n})}} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

Доказательство:
рассмотрим только случай $P \equiv 0, Q \equiv 0$, пусть Ω — проекция V на плоскость Oxy; S_1^+ — внешняя

сторона нижней части ∂V, является графиком функции $z = \psi_1(x, y)$; S_2^+ — внешняя сторона верх — ней части ∂V, является графиком функции $z = \psi_2(x, y)$; $S_3^+ = \partial V \setminus (S_1^+ \cup S_2^+)$, S_3^+ разбивает ∂V на две части; тогда распишем левую часть формулы:

$$\oiint\limits_{\partial V^{(\bar{n})}} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_2^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_3^+} R\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S_1} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds + \iint\limits_{S_2} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds + \iint\limits_{S_3} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds$$

для S_3 $(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z) = \dfrac{\pi}{2}$, значит, $\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z) = 0$:

$$\iint\limits_{S_1} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds + \iint\limits_{S_2} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds + \iint\limits_{S_3} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds = \iint\limits_{S_1} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds + \iint\limits_{S_2} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds$$

посчитаем необходимые косинусы; для этого найдём нормали:

$$\text{нормаль к } S_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & {\psi_1}'_x \\ 0 & 1 & {\psi_1}'_y \\ \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + {\psi_1}'^2_x + {\psi_1}'^2_y}}$$

косинус угла этой нормали с $\bar{e}_z$ равен $\dfrac{1}{\sqrt{1 + {\psi_1}'^2_x + {\psi_1}'^2_y}}$, но на S_1 внешняя нормаль имеет отрицательную компоненту z, поэтому наш косинус мы берём с минусом:

$$\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z) = -\frac{1}{\sqrt{1 + {\psi_1}'^2_x + {\psi_1}'^2_y}}$$

аналогично, на верхней части (S_2):

$$\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z) = \frac{1}{\sqrt{1 + {\psi_2}'^2_x + {\psi_2}'^2_y}}$$

для S_1 $\quad ds = \sqrt{EG - F^2}\,dx\,dy$, в данном случае поверхность задана как $\big(x, y, \psi_1(x, y)\big)$ и

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\left(1 + {\psi_1}'^2_x\right)\left(1 + {\psi_1}'^2_y\right) - {\psi_1}'^2_x {\psi_1}'^2_y} = \sqrt{1 + {\psi_1}'^2_x + {\psi_1}'^2_y}$$

для S_2 аналогично:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + {\psi_2}'^2_x + {\psi_2}'^2_y}$$

$$\iint\limits_{S_1} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds + \iint\limits_{S_2} R\cos(\bar{n}\hat{\ }\bar{e}_z)\,ds = -\iint\limits_{\Omega} R\big(x, y, \psi_1(x, y)\big)dx\,dy + \iint\limits_{\Omega} R\big(x, y, \psi_2(x, y)\big)dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \Big(R\big(x, y, \psi_2(x, y)\big) - R\big(x, y, \psi_1(x, y)\big)\Big)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \;\blacksquare$$

Замечание:

Формула Гаусса — Остроградского верна для конечного объединения выпуклых ограниченных областей, пересекающихся только по границе.