МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико–математический факультет

Кафедра Теории функций и функционального анализа

Курс лекций по функциональному анализу

Лектор — Олег Георгиевич Смолянов

Летописец — Павел Витальевич Бибиков (группа 303)
телефон: 137-45-97
e-mail: tsdtp4u@proc.ru

III курс, 5 семестр, 1 поток (2007 – 2008 гг.)

Лекция 1.

1. Метрические пространства.

Определение 1.1. Пусть E — произвольное множество. *Метрикой (расстоянием) на* E называется функция $\rho\colon E \times E \to \mathbb{R}^+$, обладающая следующим свойствам:

1) $\rho(x,z) \geqslant 0$, $\rho(x,z) = 0 \Leftrightarrow x = z$;

2) $\rho(x,z) = \rho(z,x)$;

3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

Метрическое пространство — это пара (E,ρ), где ρ — метрика на E.

Примеры.

1. $E = \mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}$.

2. Пусть Ω — произвольное множество. Положим $E = \mathcal{B}(\Omega)$ — множество всех ограниченных функций на Ω, а также $\rho(f,g) = \sup\limits_{\omega\in\Omega}|f(\omega)-g(\omega)|$.

3. $E = C[a;b]$, $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in[a;b]}|f(x) - g(x)|$.

4. $E = \mathbb{Q}$. Определим *p-адическую норму* следующим образом. Пусть p — фиксированное простое число. Рациональное число $0 \neq r \in \mathbb{Q}$ представим в виде $r = p^\gamma \frac{m}{n}$, где $\gamma \in \mathbb{Z}$ и $(m;n) = 1$. *p-адической нормой* назовем величину $|r|_p = \frac{1}{p^\gamma}$, тогда *$p$-адическая метрика* вводится следующим образом: $\rho_p(r_1,r_2) = |r_1 - r_2|_p$. Заметим, что в этом случае аксиома 3 выполнена в усиленной форме, а именно, $\rho(x,z) \leqslant \max(\rho(x,y);\rho(y,z))$. Метрические пространства с такими метриками называются *ультраметрическими.*

Определение 1.2. Пусть (E_1,ρ_1) и (E_2,ρ_2) — метрические пространства. Их *прямым произведением* называется метрическое пространство $(E_1 \times E_2, \rho)$, где метрика ρ вводится так, чтобы она индуцировала метрики ρ_1 и ρ_2 на пространствах E_1 и E_2 соответственно.

Замечание. Для прямого произведения нет канонической метрики, т.е. метрику ρ можно задавать разными способами, например, следующими:

$$\rho((x_1;x_2);(y_1;y_2)) = \rho_1(x_1;y_1) + \rho_2(x_2;y_2);$$
$$\rho((x_1;x_2);(y_1;y_2)) = \max\{\rho_1(x_1;y_1);\rho_2(x_2;y_2)\};$$
$$\rho((x_1;x_2);(y_1;y_2)) = \sqrt{\rho_1^2(x_1;y_1) + \rho_2^2(x_2;y_2)}.$$

Определение 1.3. Пусть (E, ρ) — метрическое пространство и $G \subset E$. Тогда пара $(G, \rho\mid_G)$ называется *подпространством метрического пространства* (E, ρ).

Определение 1.4. *Открытым шаром с центром в точке* $x \in E$ *и радиусом* $r > 0$ называется множество $S(x, r) = \{z \in E \mid \rho(x; z) < r\}$.

Замкнутым шаром с центром в точке $x \in E$ *и радиусом* $r \geqslant 0$ называется множество $F(x, r) = \{z \in E \mid \rho(x; z) \leqslant r\}$.

Определение 1.5. Множество $G \subset E$ называется *открытым*, если G — объединение семейства открытых шаров, или, что все равно, $\forall\, x \in G\ \exists\, r > 0 : S(x, r) \subset G$. В частности, открытый шар — это открытое множество.

Пусть τ_ρ — множество открытых подмножеств пространства (E, ρ). Это множество обладает следующими свойствами:

1) $\varnothing \in \tau_\rho$;
2) $E \in \tau_\rho$;
3) $\{V_\alpha\} \in \tau_\rho \Rightarrow \bigcup\limits_\alpha V_\alpha \in \tau_\rho$;
4) $V_1, \ldots, V_n \in \tau_\rho \Rightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{n} V_j \in \tau_\rho$.

Определение 1.6. Множество T называется *топологическим пространством*, если в нем выделена совокупность τ подмножеств, обладающая свойствами 1)–4). В этом случае τ называется *топологией на* T, а ее элементы — *открытыми множествами*.

Замечание. Любая метрика порождает топологию согласно определению 1.5, но не наоборот. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем считать, что в метрическом пространстве введена именно такая топология.

Упражнение 1. Проверьте условия 1) – 4) для системы открытых подмножеств метрического пространства.

Упражнение 2. Привести пример метрического пространства, в котором есть открытый шар, являющийся замкнутым множеством, но не замкнутым шаром, и пример метрического пространства, в котором есть замкнутый шар, являющийся открытым множеством, но не открытым шаром.

Определение 1.7. Множество $F \subset E$ называется *замкнутым*, если множество $E \setminus F$ открыто. В частности, замкнутый шар — замкнутое множество.

Окрестностью точки x топологического пространства называется всякое множество, содержащее открытое подмножество, которому принадлежит точка x.

Определение 1.8. *Базой* (или *фундаментальной системой*) окрестностей точки x называется такое множество $\mathcal{V}$ окрестностей точки x, что $\forall\, G \ni x\ \exists\, W \in \mathcal{V} : W \subset G$, где G — открытое множество.

Рассмотрим примеры фундаментальных систем окрестностей точки x метрического пространства.

Примеры.

1. $\mathcal{V} = \{S(x, r) \mid r \in \mathbb{R}^+\}$.
2. $\mathcal{V} = \{S(x, r) \mid r \in \mathbb{Q}^+\}$.
3. $\mathcal{V} = \{S(x, 1/n) \mid r \in \mathbb{N}\}$.
4. $\mathcal{V} = \{F(x, 1/n) \mid r \in \mathbb{N}\}$.

Определение 1.9. Пусть $A \subset E$ — произвольное множество. Точка $x \in E$ называется *точкой прикосновения множества* A, если для каждой окрестности $V(x)$ точки x имеем: $V(x) \cap A \neq \varnothing$. *Замыканием множества* A называется множество всех его точек прикосновения. Обозначение: $\bar{A}$.

Точка $x \in E$ называется *предельной точкой множества* A, если для каждой окрестности $V(x)$ точки x пересечение $V(x) \cap A$ бесконечно.

Предложение 1.1. *Множество A замкнуто $\Leftrightarrow$ $A = \bar{A}$.*

Доказательство. 1. Пусть A замкнуто, тогда $E \setminus A$ открыто. Значит, $E \setminus A$ — окрестность точки x для любой точки $x \in E \setminus A$, кроме того, $(E \setminus A) \cap A = \varnothing$, а значит, x не точка прикосновения.

2. Обратно, пусть $A = \bar{A}$. Тогда каждая точка $x \in E \setminus A$ — не точка прикосновения. Поэтому существует окрестность $V(x)$ точки x, такая, что $V(x) \cap A = \varnothing$. Т.к. $x \in V(x)$, то $\bigcup\limits_{x \in E \setminus A} V(x) = E \setminus A$. Значит, множество $E \setminus A$ открыто, а множество A замкнуто. □

Определение 1.10. Последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* x (обозначение: $x_n \to x$), если $\forall\, V(x)\ \exists\, n : \forall\, k > n\ x_k \in V(x)$ (где $V(x)$ — окрестность точки x). В метрическом пространстве это эквивалентно следующему условию: $\rho(x_n; x) \to 0$.

Определение 1.11. Пусть E — метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset E$ называется *фундаментальной*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n : \forall\, k_1, k_2 > n\ \rho(x_{k_1}; x_{k_2}) < \varepsilon$. В произвольном топологическом пространстве понятие фундаментальной последовательности не имеет смысла.

Замечание. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна. Однако обратное неверно: например, это неверно в метрическом пространстве $(\mathbb{Q}, \rho_p)$.

Определение 1.12. Метрическое пространство называется *полным*, если любая его фундаментальная последовательность сходится.

Например, пространство $\mathcal{B}(E)$ полно.

Определение 1.13. *Пополнением метрического пространства* (E, ρ) называется полное метрическое пространство $(\bar{E}, \bar{\rho})$, содержащее (E, ρ) в качестве подпространства и всюду плотного подмножества (т.е. замыкание E в $\bar{E}$ совпадает с $\bar{E}$).

Определение 1.14. Пространства (E, ρ_E) и (G, ρ_G) называются *изоморфными*, если $\exists\, f\colon E \to G$, где f — биекция, сохраняющая расстояния, т.е. $\rho_G(f(x), f(z)) = \rho_E(x, z)$.

Лекция 2.

Теорема 1.1. *Всякое метрическое пространство E обладает пополнением, единственным с точностью до изоморфизма, тождественного на E.*

Доказательство. Докажем сначала, что если E полно и $A \subset E$ замкнуто, то пространство $(A, \rho\,|_A)$ тоже полно[1].

Пусть $\{x_n\} \subset A$ — фундаментальная последовательность. Тогда эта последовательность фундаментальна и в E, поэтому $\exists\, x \in E : x_n \to x$. Т.к. $A = \bar{A}$, то $x \in A$, поэтому A полно.

Возьмем теперь пространство $\mathcal{B}(E)$ всех ограниченных функций на E с метрикой $\rho(f; g) = \sup\limits_{x\in E} |f(x) - g(x)|$. Докажем, что оно полно. В самом деле, пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{B}(E)$, тогда при всех $z \in E$ последовательность $\{f_n(z)\}$ тоже фундаментальна, т.к. для всех z имеем: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n : \forall\, k, r > n$

$$\varepsilon > \rho(f_k; f_r) = \sup_{x\in E} |f_k(x) - f_r(x)| \geqslant |f_k(z) - f_r(z)|.$$

Отсюда следует, что $\forall\, z \in E \;\; \exists\, f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, поэтому, переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $r \to \infty$, при всех z имеем: $|f_k(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$. Значит, $\rho(f_k; f) = \sup\limits_{z\in E} |f_k(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$, и пространство $\mathcal{B}(E)$ полно.

[1] Если $(A, \rho\,|_A)$ полно, то A замкнуто в E, даже если E не является полным.

Вложим E в $\mathcal{B}(E)$. А именно, пусть $x_0 \in E$, тогда $E \ni x_1 \mapsto f_{x_1} \in \mathcal{B}(E)$, где $f_{x_1}(x) = \rho(x; x_1) - \rho(x; x_0)$. Понятно, что $f_{x_1} \in \mathcal{B}(E)$, т.к. по неравенству треугольника $|f_{x_1}(x)| \leqslant \rho(x_0; x_1)$.

Проверим, что $\rho_E(x_1; x_2) = \rho_{\mathcal{B}(E)}(f_{x_1}; f_{x_2})$. В самом деле,

$$\rho_{\mathcal{B}(E)}(f_{x_1}; f_{x_2}) = \sup_{x \in E} |\rho(x; x_1) - \rho(x; x_2)| \leqslant \rho(x_1; x_2).$$

Кроме того, равенство достигается (например, при $x = x_1$).

Таким образом, можно считать, что (E, ρ_E) — это подпространство в $(\mathcal{B}(E), \rho_{\mathcal{B}(E)})$. Рассмотрим $\bar{E}$, тогда $E \subset \bar{E}$ и $\bar{E}$ полно. Понятно, что $\bar{E}$ — это искомое пополнение. Докажем, что оно единственно (с точностью до изоморфизма, тождественного на E).

Пусть G — другое пополнение E. Докажем, что $\exists\, F \colon \bar{E} \to G$, причем $F(x) = x$ при всех $x \in E$. Для каждой точки $z \in \bar{E}$ найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset E$, что $x_n \to z$. Тогда $\{x_n\}$ фундаментальна в $\bar{E}$ и в E, а значит, и в G. Поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = F(z)$.

Упражнение 3. Докажите корректность определения функции F, т.е. тот факт, что она не зависит от выбора последовательности, сходящейся к z.

Если $z_1, z_2 \in \bar{E}$, то $\rho_G(F(z_1); F(z_2)) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_E(x_n^1; x_n^2) = \rho_E(z_1; z_2)$ (поскольку расстояние непрерывно по совокупности аргументов в силу неравенства треугольника). Таким образом, F — изометрия и отображение «на» (т.к. G тоже полно и E плотно в G). □

Определение 1.15. *Диаметром множества* F называется величина $\operatorname{diam} F = \sup\limits_{x,y \in F} \rho(x; y)$.

Теорема 1.2 (Теорема о вложенных шарах). *Пусть E полно и $\{F_j\}$ — такая последовательность замкнутых множеств, что $E \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_j \supset \ldots$ и $\operatorname{diam} F_j \to 0$. Тогда $\bigcap\limits_j F_j \neq \varnothing$.*[2]

Доказательство. Пусть $x_j \in F_j$, тогда последовательность $\{x_j\}$ фундаментальна, а значит, $\exists \lim\limits_{j\to\infty} x_j = x$. Т.к. F_j замкнуты, то $\forall\, j\ x \in F_j$, а значит, $x \in \bigcap\limits_j F_j$. □

Теорема 1.3 (Бэр). *Пусть E полно и $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты. Тогда $\exists\, n : F_n \supset S(x, r)$.*

[2] На самом деле, сформулированное предложение является критерием полноты метрического пространства.

Доказательство. Предположим противное. Возьмем шар $S(x_0, 1)$. Тогда множество $S(x_0, 1)\setminus F_1$ открыто и непусто, а значит, $\exists\, S(x_1, r_1) \subset S(x_0, 1)\setminus \setminus F_1$ (где $r_1 < 1/2$), а значит, $S(x_0, r_1/2) \subset S(x_0, 1)\setminus F_1$. Тогда $S(x_1, r_1/2)\setminus \setminus F_2 \neq \varnothing$, поэтому $\exists\, S(x_2, r_2) \subset S(x_1, r_1/2)\setminus F_2$ (где $r_2 < 1/4$). Продолжая, получаем последовательность вложенных шаров:

$$S(x_0, 1) \supset S(x_1, r_1) \supset S(x_1, r_1/2) \supset S(x_2, r_2) \supset \ldots,$$

причем $S(x_n, r_n) \cap F_n = \varnothing$, поэтому $\bar{S}(x_n, r_n/2) \cap F_n = \varnothing$. Таким образом, мы получаем последовательность замкнутых вложенных шаров $\bar{S}(x_1, r_1/2) \supset \bar{S}(x_2, r_2/2) \supset \ldots$, причем $\operatorname{diam} \bar{S}(x_n, r_n/2) \to 0$ (т.к. $r_n < < 2^{-n}$). По предыдущему следствию $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{S}(x_n, r_n/2) \neq \varnothing$ и не содержится в F_i при всех i — противоречие. □

Топологическое пространство, в котором справедлива теорема 1.3, называется *бэровским.* Т.о., всякое полное метрическое пространство — бэровское.

Упражнение 4. Привести пример неполного метрического пространства, являющегося тем не менее бэровским.

2. Компактность.

Определение 2.1. Подмножество K топологического пространства E называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие.

Подмножество K топологического пространства E называется *относительно компактным*, если множество $\bar{K}$ компактно.

Множество K топологического пространства E называется *счетно-компактным*, если всякое бесконечное подмножество K имеет предельную точку из K.

Множество K топологического пространства E называется *секвенциально-компактным*, если из любой последовательности из K можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу из K.

Множество K метрического пространства E называется *предкомпактным* (или *вполне ограниченным*), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, S(x_j, \varepsilon) : \bigcup\limits_{j=1}^{n} S(x_j, \varepsilon) \supset \supset K$. В этом случае последовательность $\{x_j\}$ называется *ε-сетью.*

Упражнение 5. Очевидно, что из вполне ограниченности следует ограниченность. Покажите, что обратное неверно.

Лекция 3.

Теорема 2.1. *1. В топологическом пространстве счетная компактность следует из секвенциальной компактности, а также из компактности.*

2. В метрическом пространстве компактность равносильна секвенциальной компактности, а также счетной компактности, а также предкомпактности и полноте одновременно.

Доказательство. Сначала докажем п.1.

Докажем, что из секвенциальной компактности следует счетная компактность. Пусть K — секвенциально компактное множество в топологическом пространстве, и A — его бесконечное подмножество. Возьмем бесконечную последовательность $\{x_n\} \subset A$ и выделим из нее сходящуюся подпоследовательность: $\exists\, x_{n_k} \to x \in K$. Значит, x — предельная точка множества A.

Теперь докажем, что из компактности следует секвенциальная компактность. Предположим противное: пусть $A \subset K$ — бесконечное множество, у которого в K нет предельных точек. Значит, $\forall\, x \in K \;\; \exists\, V(x) :$ $|V(x) \cap A| < \infty$.[3] Т.к. $K \subset \bigcup\limits_{x} V(x)$, то $\exists\, x_1, \ldots, x_n : \bigcup\limits_{k=1}^{n} V(x_k) \supset K \supset A$ — противоречие, т.к. A бесконечно.

Теперь докажем п.2.

Докажем, что из счетной компактности следует секвенциальная компактность. Пусть $\{x_n\} \subset K \subset E$. Возможны два случая.

1) Множество различных элементов последовательности $\{x_n\}$ конечно. Тогда найдется точка $x \in \{x_n\}$, встречающаяся бесконечное количество раз, а значит, подпоследовательность x_{n_j}, где $x_{n_j} = x$, будет сходиться к точке x.

2) Множество различных элементов последовательности $\{x_n\}$ бесконечно. Тогда найдется предельная точка $z \in K$ этой последовательности. А значит, $\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_{n_k} \in S(z, 1/k)$. Можно считать, что $n_1 < n_2 < \ldots$, поэтому $x_{n_k} \to z$ (т.к. $\rho(x_{n_k}; z) \to 0$).

Докажем теперь, что из секвенциальной компактности следуют полнота и предкомпактность.

1) Пусть K секвенциально компактно и $K \supset \{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Тогда $\exists\, x_{n_j} \to x \in K$. Докажем, что в этом случае $x_n \to x$. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\exists\, k_0 : \forall\, m, r > k_0 \;\; \rho(x_m; x_r) < \varepsilon/2,$$

[3]Если M — множество, то $|M|$ — число его элементов.

а также

$$\exists\, j_0 : \forall\, j > j_0 \;\; \rho(x_{n_j}; x) < \varepsilon/2.$$

Среди таких j найдется j_1, для которого $n_{j_1} > k_0$. Тогда

$$\forall\, m > k_0 \;\; \rho(x_m; x) \leqslant \rho(x_m; x_{n_{j_1}}) + \rho(x_{n_{j_1}}; x) < \varepsilon.$$

2) Пусть теперь K секвенциально компактно и не предкомпактно, т.е. $\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, x_1, \ldots, x_n \in K \;\; \bigcup\limits_{j=1}^{n} S(x_j, \varepsilon) \not\supset K$. Но тогда найдется бесконечное множество элементов $\{z_j\} \subset K$, таких, что $\forall\, j_1, j_2 \;\; \rho(z_{j_1}; z_{j_2}) \geqslant \varepsilon$, а значит, из последовательности $\{z_j\}$ нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность — противоречие.

Наконец, докажем, что из полноты и предкомпактности следует компактность. Предположим противное: Пусть K не компактно, тогда $\exists\, V_\alpha : \bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \supset K$ и нельзя выделить конечное подпокрытие. Т.к. K — предкомпактно, то $\forall\, k > 0 \;\; \exists\, x_1^k, \ldots, x_{n(k)}^k : \bigcup\limits_{j=1}^{n(k)} (F(x_j^k, 1/k) \cap K) \supset K$ (как обычно, $F(x, r)$ — это замкнутый шар радиуса r с центром в точке x), а значит, $\exists\, F(x_{j_1}^1, 1) : F(x_{j_1}^1, 1) \cap K$ не покрывается конечным числом $\{V_\alpha\}$. Аналогично, при $k = 2$ имеем:

$$\bigcup_{j=1}^{n(2)} (F(x_j^2, 1/2) \cap F(x_{j_1}^1, 1) \cap K) \supset F(x_{j_1}^1, 1) \cap K,$$

а значит, $\exists\, F(x_{j_2}^2, 1/2) : F(x_{j_2}^2, 1/2) \cap F(x_{j_1}^1, 1) \cap K$ не покрывается конечным числом $\{V_\alpha\}$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем последовательность замкнутых вложенных множеств $\bigcap\limits_{n=1}^{r} F(x_{j_n}^n, 1/n) \cap K$, диаметры которых стремятся к 0. Т.к. K полно, то $\exists\, x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(x_{j_n}^n, 1/n) \cap K$. Но тогда $\exists\, V_{\alpha(x)} \ni x$ и $\exists\, \varepsilon(x) : S(x, \varepsilon(x)) \subset V_{\alpha(x)}$, поэтому $\exists\, n : 1/n < \varepsilon(x)/2$ и $F(x_{j_n}^n, 1/n) \subset S(x, \varepsilon(x)) \subset V_{\alpha(x)}$ — противоречие. $\square$

Определение 2.2. Пусть (E, ρ) — метрическое пространство. Отображение $f \colon E \to E$ называется *сжимающим*, если $\exists\, \alpha \in (0; 1) : \forall\, x_1, x_2 \in E$ $\rho(f(x_1); f(x_2)) \leqslant \alpha \rho(x_1; x_2)$.

Всякое сжимающее отображение непрерывно (проверьте это).

Теорема 2.2 (Пикар)**.** *Всякое сжимающее отображение f полного метрического пространства (E, ρ) в себя обладает ровно одной неподвижной точкой.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in E$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$. Легко видеть, что она фундаментальна:

$$\rho(x_n; x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}); f(x_n)) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}; n_n) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n \rho(x_0; x_1),$$

поэтому

$$\rho(x_{n+k}; x_n) \leqslant \rho(x_n; x_{n+1}) + \ldots + \rho(x_{n+k-1}; x_{n+k}) \leqslant \frac{\alpha^{n+k}}{1-\alpha}\rho(x_0; x_1) \to 0.$$

Значит, $\exists\, z \in E : z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Докажем, что точка z неподвижна. В самом деле,

$$\rho(z; f(z)) = \rho(\lim x_n; \lim f(x_n)) = \rho(\lim x_n; \lim x_{n+1}) = \lim \rho(x_n; x_{n+1}) = 0,$$

так что $z = f(z)$.

Докажем, что неподвижная точка единственна. Пусть z_1 и z_2 — неподвижные точки. Тогда

$$\rho(z_1; z_2) = \rho(f(z_1); f(z_2)) \leqslant \alpha\rho(z_1; z_2),$$

откуда $(1-\alpha)\rho(z_1; z_2) = 0$, а значит, $\rho(z_1; z_2) = 0$ и $z_1 = z_2$. $\square$

Упражнение 6. Привести пример неполного метрического пространства, в котором теорема Пикара неверна.

Упражнение 7. Привести пример неполного метрического пространства, в котором теорема Пикара верна.

Упражнение 8. Доказать, что отображение f метрического пространства E, для которого $\rho(f(z_1); f(z_2)) < \rho(z_1; z_2)$, может не иметь неподвижной точки, даже если пространство E полно.

Упражнение 9. Если E компактно, то отображение f, для которого $\rho(f(z_1); f(z_2)) < \rho(z_1; z_2)$, обладает ровно одной неподвижной точкой.

Лекция 4.

3. Непрерывность.

Определение 3.1. Отображение $f\colon E \to G$ называется *непрерывным в точке* x, если для каждой окрестности $V(f(x))$ точки $f(x)$ существует такая окрестность $W(x)$ точки x, что $f(W(x)) \subset V(f(x))$.

Определение 3.2. Отображение $f\colon E \to G$ называется *непрерывным на множестве* E, если f непрерывно во всех точках множества E.

Предложение 3.1. *Отображение $f\colon E \to G$ непрерывно на $E \Leftrightarrow$ прообраз любого открытого множества в G открыт в E.*

Доказательство. Пусть множество $V \subset G$ — открытое, и $x \in f^{-1}(V)$. Тогда по определению непрерывности отображения f в точке x имеем: $\forall\, V(f(x))\ \exists\, W(x) : f(W(x)) \subset V(f(x))$. Значит, $W(x) \subset f^{-1}(V)$ и $f^{-1}(V)$ представляется в виде объединения открытых множеств, а именно, $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(V)} W(x)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $x \in E$ и $V(f(x))$ — произвольная открытая окрестность точки $f(x)$ в G. Тогда множество $W = f^{-1}(V(f(x)))$ открыто и $x \in W$. Значит, $f(W) = V(f(x))$, что и доказывает непрерывность отображения f в точке x. □

Предложение 3.2. *Отображение f непрерывно $\Leftrightarrow$ прообраз любого замкнутого множества в G замкнут в E.*

Доказательство. Это утверждение следует из предыдущего предложения и следующей выкладки:

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(G \setminus (G \setminus F)) = (f^{-1}(G)) \setminus (f^{-1}(G \setminus F))$$

(т.к. множество $f^{-1}(G \setminus F)$ открыто). □

Определение 3.3. Пусть E — топологическое пространство. В точке $x \in E$ выполняется *первая аксиома счетности*, если существует не более чем счетная фундаментальная система окрестностей точки x.

Пространство, в каждой точке которого выполнена первая аксиома счетности, называется *пространством с первой аксиомой счетности.*

Теорема 3.1. *Отображение f топологического пространства с первой аксиомой счетности в топологическое пространство непрерывно в точке $x \in E \Leftrightarrow \forall\,\{x_n\} \subset E : x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.*

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно и $x_n \to x$. Тогда $\forall\, W(f(x))\ \exists\, V(x) : f(V(x)) \subset W(f(x))$. Поскольку $\exists\, n_0 : \forall\, n > n_0\ x_n \in \in V(x)$, то $f(x_n) \in W(f(x))$, так что $f(x_n) \to f(x)$. (В этой части первая аксиома счетности не используется.)

Докажем утверждение в другую сторону. Предположим противное: пусть $\exists\, W(f(x)) : \forall\, V(x)\ \exists\, z \in f(V(x)) : z \notin W(f(x))$. Т.к. $\forall\, n\ \exists\, x_n : x_n \in \in V(x)$ и $f(x_n) = z_n \notin W(f(x))$, то $x_n \to x$, но $z_n \nrightarrow f(x)$ — противоречие. $\square$

Предложение 3.3. *Пусть E и G — топологические пространства, и отображение $f\colon E \to G$ непрерывно и $K \subset E$ — компакт. Тогда $f(K)$ — компакт*

Доказательство. В самом деле, если $\bigcup\limits_{\alpha} W_\alpha \supset f(K)$, то $\bigcup\limits_{\alpha} f^{-1}(W_\alpha) \supset \supset f^{-1}(f(K)) \supset K$. Т.к. K — компакт, то $\exists\, \{W_{\alpha_j}\} : \bigcup\limits_{j=1}^{n} f^{-1}(W_{\alpha_j}) \supset K$. Но в таком случае $\bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{\alpha_j} \supset f(K)$, что и требовалось. $\square$

Определение 3.4. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если у любых двух его точек есть непересекающиеся окрестности.

Лемма 3.1. *Пусть G — хаусдорфово пространство и $K \subset G$ — компакт. Тогда K замкнуто.*

Доказательство. $\forall\, z \in K\ \exists\, V(z) : V(z) \cap V_z(x) = \varnothing$, где $x \notin K$. Поскольку $\bigcup\limits_{z \in K} V(z) \supset K$, то $\exists\, \{V(z_j)\} : \bigcup\limits_{j=1}^{n} V(z_j) \supset K$. Поскольку множество $\bigcap\limits_{j=1}^{n} V_{z_j}(x) = W(x)$ открыто и $W(x) \cap K = \varnothing$, то K замкнуто. $\square$

Предложение 3.4. *Пусть $f\colon E \to G$ — непрерывная биекция, E компактно, а G хаусдорфово. Тогда G тоже компактно и отображение f^{-1} тоже непрерывно.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 3.2 и леммы 3.1, поскольку $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ — замкнутое в G множество (т.к. если $F \subset E$ замкнуто в компакте, то и само F компакт). $\square$

Определение 3.5. Пусть (E, ρ_E) и (G, ρ_G) — метрические пространства. Отображение $f\colon E \to G$ *равномерно непрерывно*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x_1, x_2 \in E\ \ \rho(x_1; x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1); f(x_2)) < \varepsilon$.

Предложение 3.5. *Непрерывное отображение компактного метрического пространства в произвольное метрическое пространство равномерно непрерывно.*

Доказательство. Если отображение f не является равномерно непрерывным, то $\exists\,\varepsilon > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n, z_n : \rho(x_n; z_n) < 1/n$, но $\rho(f(x_n); f(z_n)) >$ $> \varepsilon$. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, т.е. $x_{n_k} \to x$. Тогда $z_{n_k} \to x$, т.к. $\rho(x_{n_k}; z_{n_k}) \to 0$. Поэтому последовательность x_{n_1}, z_{n_1}, x_{n_2}, z_{n_2},... тоже сходится к x. Но последовательность $f(x_{n_1})$, $f(z_{n_1})$, $f(x_{n_2})$, $f(z_{n_2})$,... даже не является фундаментальной и потому сходиться не может. □

4. Нормированные пространства.

Определение 4.1. Пусть E — векторное пространство (над $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{C}^1$). Функция $p\colon E \to \mathbb{R}^1$ называется *полунормой на* E, если выполнены следующие аксиомы:

1) $p(x) \geqslant 0$;

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;

3) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$.

Если аксиому 1) усилить, а именно, потребовать к тому же, чтобы $p(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, то функция p будет называться *нормой на* E.

Во всяком нормированном пространстве вводится расстояние с помощью равенства $\rho(x, z) = p(x - z)$.

Определение 4.2. *Локально выпуклое пространство* — это пара $(E, \mathcal{P})$, где $\mathcal{P}$ — семейство полунорм на E.

Нормированное пространство — это пара (E, p), где p — норма на E. Нормированное пространство наделяется *канонической метрикой*: $\rho(x_1; x_2) = p(x_1 - x_2)$. Если полученное метрическое пространство будет полным, то нормированное пространство E называется *банаховым*.

Примеры.

1. $E = \mathbb{R}^1$, $\|x\| = |x|$.
2. $E = C[a; b]$, $\|f\| = \max\limits_{t \in [a;b]} |f(t)|$.
3. $E = C_2[a; b]$, $\|f\| = \Big(\int\limits_a^b |f(t)|^2\, dt \Big)^{1/2}$.

4. $E = c_0$ — пространство всех последовательностей, сходящихся к 0, $\|\{x_n\}\| = \max\limits_n |x_n|$.

5. $E = l_\infty$ — пространство всех ограниченных последовательностей, $\|\{x_n\}\| = \sup\limits_n |x_n|$.

Упражнение 10. Докажите, что нормированные пространства в примерах 1, 2, 4, 5 банаховы, а в примере 3 нет.

Определение 4.3. Пусть $f\colon E \to G$ — линейное непрерывное отображение. *Нормой* f называется величина $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_G$. В случае, когда $G = \mathbb{R}^1$, отображение f называется *линейным функционалом.* Множество всех непрерывных функционалов на пространстве E образуют линейное пространство (нормированное), которое называется *сопряженным к* E. Обозначение — E^*.

Лекция 5.

Определение 4.4. Пусть E — нормированное пространство. Линейное отображение $A\colon E \to G$ называется *ограниченным*, если образ любого ограниченного множества ограничен.

Множество называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре.

Нормой отображения A называется величина $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$.

Предложение 4.1. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Упражнение 11. Докажите это предложение.

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}(E, G)$ всех непрерывных линейных отображений из E в G. Введенная выше функция $\|\cdot\|$ действительно является нормой. Проверим, например, неравенство треугольника. Имеем:

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|(A_1 + A_2)x\|_G \leqslant \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} (\|A_1x\|_G + \|A_2x\|_G) \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A_1x\|_G + \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|A_2x\|_G = \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Предложение 4.2. *Если отображение* A *линейно, от его ограниченность равносильна непрерывности.*

Доказательство. Пусть A ограничено, тогда $A(S(0,1)) \subset S(0,r)$, поэтому $\forall\,\varepsilon\;\; A(S(0,\varepsilon/r)) \subset A(0,\varepsilon)$.

Обратно, пусть A непрерывно, тогда $\forall\, r > 0\;\; \exists\, \varepsilon > 0 : A(S(0,\varepsilon)) \subset \subset S(0,r)$, а значит, $A(S(0,1)) \subset S(0,r/\varepsilon)$ и $\|A\| \leqslant r/\varepsilon$. $\square$

Предложение 4.3. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(E,G)$. *Тогда* $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$ *и* $\|A\| = \inf\{M > 0 \mid \forall\, x\;\; \|Ax\| \leqslant M\|x\|\}$.

Доказательство. Т.к. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$, то $\forall\, x \neq 0\;\; \left\|\frac{Ax}{\|x\|}\right\| \leqslant \|A\|$, откуда $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$. Поэтому, если $M_0 = \inf\{M > 0 \mid \forall\, x\;\; \|Ax\| \leqslant M\|x\|\}$, то $M_0 \leqslant \|A\|$. Но если $M_0 < \|A\|$, то $\exists\, \varepsilon > 0 : M_1 = M_0 + \varepsilon < \|A\|$. Тогда $\forall\, x \neq 0\;\; \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant M_1$, а значит, $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant M_1 < \|A\|$ — противоречие. Т.о., $\|A\| = M_0$. $\square$

Теорема 4.1. *Если G — банахово пространство, а E — нормированное пространство, то пространство $\mathcal{L}(E,G)$ банахово.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E,G)$ — фундаментальная по норме последовательность. Тогда $\forall\, x \in E\;\; \|A_n x - A_k x\| \leqslant \|A_n - A_k\|\|x\|$, поэтому при всех $x \in E$ последовательность $\{A_n x \subset G\}$ фундаментальна, а значит, $\forall\, x \in E\;\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$. Докажем, что $A \in \mathcal{L}(E,G)$. В самом деле, понятно, что A линейно в силу линейности предела и отображений A_n, поэтому необходимо доказать только непрерывность.

$\forall\, \varepsilon > 0\;\; \exists\, n_0 : \forall\, n,k > n_0\;\; \|A_n - A_k\| < \varepsilon$, поэтому $\forall\, x\;\; \|A_n x - A_k x\| \leqslant \leqslant \varepsilon\|x\|$ и $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что функционал $A_n - A$ непрерывен. Но функционал A_n также непрерывен, поэтому $A = A_n - (A - A_n)$ тоже будет непрерывным. Кроме того, понятно, что функционал A — предел последовательности $\{A_n\}$, т.к. $\|A_n - A\| \to 0$. $\square$

В частности, при $G = \mathbb{R}^1$ получаем, что пространство E^* всегда банахово (в силу полноты пространства $\mathbb{R}^1$).

Определение 4.5. Множество E называется *выпуклым*, если $\forall\, x_1, x_2 \in \in E,\;\; \forall\, \tau_1, \tau_2 \geqslant 0 : \tau_1 + \tau_2 = 1\;\; \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 \in E$.

Теорема 4.2 (Банах–Штейнхаус)**.** *Пусть E полно, G нормировано и $\{A_\alpha\} \subset \mathcal{L}(E,G)$ и $\forall\, x \in E\;\; \sup\limits_\alpha \|A_\alpha x\|_G < \infty$. Тогда $\sup\limits_\alpha \|A_\alpha\| < \infty$.*

Доказательство. Для каждого натурального n рассмотрим множество $M_n = \{x \in E \mid \forall\, \alpha\;\; \|A_\alpha x\| \leqslant n\}$. Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = E$. Представим множества M_n в следующем виде: $M_n = \bigcap\limits_{\alpha}\{x \in E \mid \|A_\alpha x\| \leqslant n\} = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha^{-1}(F(0,n))$. Т.к. A_α непрерывны, то множества M_n замкнуты, и по теореме Бэра $\exists\, n : M_n \supset S(z,r)$.

Множество M_n выпукло, содержит шар $S(z,r)$ и симметрично относительно точки 0. Т.к. M_n симметрично, то $M_n \supset S(-z,r)$, а т.к. M_n выпукло, то $M_n \supset \frac{1}{2}S(-z,r) + \frac{1}{2}S(z,r) = S(0,r)$. Т.о., M_n содержит шар $S(0,r)$ радиуса r с центром в 0. Отсюда следует, что $\forall\,\alpha\ \ \forall\, x : \|x\| \leqslant r \Rightarrow \|A_\alpha x\| \leqslant n$, поэтому $\sup\limits_{\|x\|\leqslant r} \|A_\alpha x\| \leqslant n$, т.е. $\forall\,\alpha\ \ \|A_\alpha\| \leqslant \frac{n}{r}$. □

Лекция 6.

Теорема 4.3 (Хан–Банах). *Пусть E — произвольное линейное пространство, и $p\colon E \to \mathbb{R}^1$ — такая функция на нем, что выполняются следующие свойства:*

1) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$;

2) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$.

Пусть также $E_1 \subset E$ — подпространство и $f\colon E_1 \to \mathbb{R}^1$ — линейный функционал на нем, причем $\forall\, x \in E_1\ \ f(x) \leqslant p(x)$. Тогда $\exists\, \bar{f}\colon E \to \mathbb{R}^1$ — такое линейное отображение, что $\forall\, x \in E\ \ \bar{f}(x) \leqslant p(x)$ и $\forall\, x \in E_1\ \ \bar{f}(x) = f(x)$.

Доказательство. Оно состоит из двух частей — аналитической и теоретико-множественной. Первая часть — аналитическая.

Пусть $z \in E \setminus E_1$ и $E^z = \operatorname{conv}(E_1, z)$ — линейная оболочка. Докажем, что существует искомое продолжение функционала f на пространство E^z. $\forall\, v \in E^z\ \ v = tz + x$, где $z \in E_1$, а $t \in \mathbb{R}^1$. Понятно, что $\bar{f}(tz + x) = t\bar{f}(z) + f(x) \leqslant p(tz + x)$. Найдем величину $C = \bar{f}(z)$. Возможны два случая.

1) $t > 0$. Тогда $tC + f(x) \leqslant p(tz + x)$, а значит, $C \leqslant p(z + x/t) - f(x/t)$ для всех x.

2) $t < 0$. Тогда $tC + f(x) \leqslant p(tz + x)$ для всех x. разделив обе части неравенства на $-t > 0$, получим: $-C - f(x/t) \leqslant -\frac{1}{t}p(tz+x) = p(-z-x/t)$, т.е. $C \geqslant -f(x/t) - p(-z - x/t)$.

Но $\forall\, x_1, x_2\ \ -p(-x_2 - z) - f(x_2) \leqslant -f(x_1) + p(z + x_1)$. В самом деле,

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \leqslant p(x_1 - x_2) = p((x_1 + z) - (x_2 + z)) \leqslant \leqslant p(x_1 + z) + p(-x_2 - z).$$

Поэтому можно выбрать произвольное C, удовлетворяющее двойному неравенству

$$-p(-z - x_1/t) - f(x_1/t) \leqslant C \leqslant -f(x_2/t) + p(z + x_2/t) \qquad (\forall\, x_1, x_2).$$

Для завершения доказательства нам потребуется лемма Куратовского–Цорна.

Определение 4.6. Множество Ω называется *упорядоченным* (или *частично упорядоченным*), если на нем введено *отношение порядка* «$\leqslant$», удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $x \leqslant x$ (*рефлексивность*);

2) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (*транзитивность*);

3) $x \leqslant y$, $y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (*антисимметричность*).

Множество Ω называется *линейно упорядоченным*, если каждые два его элемента сравнимы (т.е. если $\forall\, x, z \in \Omega$ или $x \leqslant z$ или $z \leqslant x$).

Пусть $\Omega_1 \subset \Omega$. Тогда элемент $\omega \in \Omega$ называется *мажорантой* Ω_1, если $\forall\, x \in \Omega_1\;\; x \leqslant \omega$.

Элемент $a \in \Omega$ называется *максимальным элементом* Ω, если $\forall\, x \in \Omega$ $x \geqslant a \Rightarrow x = a$.

Лемма 4.1 (Куратовский–Цорн)**.** *Если для каждого линейно упорядоченного подмножества $\Omega_1 \subset \Omega$ существует мажоранта $\omega \in \Omega$, то в Ω есть максимальные элементы.*[4]

Теперь мы готовы завершить доказательство. Пусть $\Omega = (G, f_G)$, где $E_1 \subset G \subset E$ и f_{G_1} — продолжение f на G_1 для которого $\forall\, x \in G\;\; f_G(x) \leqslant p(x)$. Введем на Ω следующее отношение порядка: $(G_1, f_{G_1}) \leqslant (G_2, f_{G_2})$, если $G_1 \subset G_2$ и f_{G_2} — продолжение f_{G_1} на G_2. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega$ — линейно упорядоченное подмножество, тогда найдется мажоранта $\omega = (G_{\Omega_1}, f_{\Omega_1})$, где $G_{\Omega_1} = \bigcup\limits_{G_\alpha \in \Omega_1} G_\alpha$ и f_{Ω_1} — продолжение f на G_{Ω_1}, определенное следующим образом: если $x \in G_\alpha$, то $f_{\Omega_1}(x) = f_{G_\alpha}(x)$ (из линейной упорядоченности Ω_1 вытекает корректность этого определения). По лемме Цорна в Ω есть максимальный элемент $(G_{\max}, f_{\max})$.

В силу первой части доказательства $G_{\max} = E$. Действительно, если $G_{\max} \neq E$, то $\exists\, z \in E \setminus G_{\max}$, и согласно первой части, $f_{\max}$ можно продолжить на подпространство $\operatorname{conv}(G_{\max}, z)$ в противоречие с максимальностью $(G_{\max}, f_{\max})$. $\square$

[4] Ее доказательство можно найти, например, в книге Н. Бурбаки «Теория множеств».

Следствие 4.1. *Пусть E — нормированное пространство и $f\colon E_1 \to \mathbb{R}^1$ — непрерывный линейный функционал на пространстве $E_1 \subset E$, причем $\|f\| = C > 0$. Тогда $\exists\, \bar{f}\colon E \to \mathbb{R}^1 : \bar{f}\mid_{E_1} = f$ и $\|\bar{f}\| = \|f\|$.*

Доказательство. Пусть $p(x) = C\|x\|$, тогда $\forall\, x \in E_1 \;\; |f(x)| \leqslant C\|x\| = p(x)$, а значит, по теореме Хана-Банаха $\exists\, \bar{f}\colon E \to \mathbb{R}^1 : \bar{f}\mid_{E_1} = f$, причем $\bar{f}(x) \leqslant C\|x\|$. Но неравенство $\bar{f}(x) \leqslant C\|x\|$ влечет $-\bar{f}(x) = \bar{f}(-x) \leqslant C\|x\|$, а из этих двух неравенств вытекает, что $|\bar{f}(x)| \leqslant C\|x\|$, т.е. что $\|\bar{f}\| \leqslant C$. Значит, $\|\bar{f}\| = C$ (поскольку $\|\bar{f}\| \geqslant \|f\|$ ввиду того, что $\bar{f}\mid_{E_1} = f$). □

Предложение 4.4. $\forall\, x \in E \;\; \exists\, f^x \in E^* : \|f^x\| = 1$ *и* $f^x(x) = \|x\|$.

Доказательство. Положим $E_1 = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^1\}$ и $f_0\colon E_1 \to \mathbb{R}^1$, $f_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Тогда $\|f_0\| = 1$. Тогда продолжение этого функционала без увеличения нормы будет искомым. □

Рассмотрим пространство E^{**}. Можно считать, что $E \subset E^{**}$; а именно, рассмотрим отображение $x \mapsto F_x \in E^{**}$, где $F_x(g) = g(x)$. Это отображение — вложение: если $x \neq 0$, то $F_x \neq 0$ по предыдущему предложению. Поскольку $|F_x(g)| = |g(x)| \leqslant \|g\|\|x\|$, то $\|F_x\| \leqslant \|x\|$, причем равенство достигается при $g = f^x$. Значит, $\|F_x\| = \|x\|$. Т.о., вложение $E \hookrightarrow E^{**}$, $x \mapsto F_x$ является изометрическим на образ $f(E)$.

Определение 4.7. Пространство E называется *рефлексивным*, если образ E при этом вложении совпадает с E^{**}.

Определение 4.8. Нормированные пространства E_1 и E_2 называются *изоморфными*, если существует линейная биекция между этими пространствами, сохраняющая норму.

Определение 4.9. *Пополнением нормированного пространства E* называется такое нормированное пространство $\bar{E} \supset E$, что E всюду плотно в $\bar{E}$.

Теорема 4.4. *Для любого нормированного пространства E существует его пополнение $\bar{E}$, однозначное с точностью до изоморфизма, тождественного на E.*

Доказательство. Вложим E в банахово пространство E^{**} и рассмотрим его замыкание $\bar{E}$ в E^{**}. Оно и будет искомым. Доказательство единственности аналогично доказательству единственности в теореме о пополнении метрического пространства. □

Определение 4.10. *Графиком отображения* $f\colon E \to G$ называется множество $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E,\ f(x) \in G\} \subset E \times G$.

Норма в произведении $E \times G$ вводится так, чтобы ее сужения на подпространства $E \times \{0\}$ и $\{0\} \times G$, изоморфные (как линейные пространства) соответственно, пространствам E и G, совпадали с нормами, порожденными нормами пространств E и G.

Примеры.

1. $\|(x, z)\| = \|x\| + \|z\|$;
2. $\|(x, z)\| = \max\{\|x\|, \|z\|\}$;
3. $\|(x, z)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|z\|^2}$.

Предложение 4.5. *Если отображение f непрерывно, то его график замкнут.*

Упражнение 12. Докажите это предложение.

Лекция 7.

Теорема 4.5 (Банах)**.** *Если f — линейное непрерывное биективное отображение, то отображение f^{-1} непрерывно.*

Теорема Банаха равносильна следующему утверждению.

Теорема 4.6. *Пусть E и G — банаховы пространства и $f\colon E \to G$ — линейное отображение, график Γ_f которого замкнут. Тогда отображение f непрерывно.*

Доказательство равносильности теорем 4.5 и 4.6. Докажем, сначала, что теорема 4.5 влечет теорему 4.6. Т.к. график отображения f является замкнутым линейным пространством в $E \times G$, то он является банаховым пространством. Рассмотрим отображение $F\colon (x, f(x)) \mapsto x$. Оно линейно, биективно и непрерывно, поэтому по теореме Банаха об обратном отображении получаем, что и F^{-1} непрерывно. Значит, непрерывно отображение f как композиция непрерывных отображений $x \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x)$ (первое из них — это F^{-1}, а второе — проекция $E \times G$ на G).

Теперь докажем, что из теоремы 4.6 следует теорема 4.5. Пусть отображение $f\colon E \to G$ линейно и непрерывно, тогда $\Gamma_f \subset E \times G$ замкнут. Пусть $\varphi = f^{-1}$, тогда $\Gamma_\varphi = \{(z, \varphi(z))\} = \{(f(x), x)\} \subset G \times E$. Отображение $E \times G \to G \times E$, $(x, z) \mapsto (z, x)$ биективно и непрерывно, причем Γ_f отображается на Γ_φ. Значит, Γ_φ замкнут вместе с Γ_f и φ непрерывно по теореме 4.6. $\square$

Теорема 4.7. *Пусть $f\colon E \to G$ — линейное непрерывное сюръективное отображение банаховых пространств. Тогда образ всякого открытого подмножества из E открыт в G.*

Доказательство. Пусть $V \subset E$ — открытое подмножество. Сначала докажем теорему для случая, когда $V = S(0, r)$ — открытый шар.

Докажем, что $\overline{f(S(0,\varepsilon))} \supset S(0,\eta)$. В самом деле,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot \overline{f(S(0,\varepsilon))} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot f(S(0,\varepsilon)) = \\ = f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot S(0,\varepsilon)\Big) = f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} S(0,n\varepsilon)\Big) = f(E) = G.$$

По теореме Бэра $\exists\, n : \overline{n \cdot f(S(0,\varepsilon))} \supset S(x,r)$. Т.к. слева стоит выпуклое симметричное множество, то $\overline{f(S(0,n\varepsilon))} \supset S(0,r)$ и $\overline{f(S(0,\varepsilon))} \supset$ $\supset S(0,r/n)$.

Докажем, что $f(S(0,2\varepsilon)) \supset S(0,\eta)$. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_j\}$, такую, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon$, и произвольное $z \in S(0,\eta)$. Найдем такое $x \in$ $\in S(0,2\varepsilon)$, что $z = f(x)$. По доказанному ранее $\forall\, j \ \exists \eta_j : \overline{f(S(0,\varepsilon_j))} \supset$ $\supset S(0,\eta_j)$, причем $\eta_j \to 0$. Поэтому $\exists\, x_0 \in S(0,\varepsilon) : \|z - f(x_0)\| < \eta_1$, т.е. $z - f(x_0) \in S(0,\eta_1)$. Аналогично, $\exists\, x_1 \in S(0,\varepsilon_1) : \|z - f(x_0) - f(x_1)\| <$ $< \eta_2$, т.е. $z - f(x_0) - f(x_1) \in S(0,\eta_2)$, и т.д. Таким образом, мы получаем последовательность $\{x_n\}$, где $x_0 \in S(0,\varepsilon)$, $x_j \in S(0,\varepsilon_j)$ и $z - \sum\limits_{j=0}^{n} f(x_j) \in$ $\in S(0,\eta_{n+1})$. Последовательность $\Big\{\sum\limits_{j=0}^{n} x_j\Big\}$ фундаментальна в E, т.к.

$$\Big\|\sum_{j=0}^{n+k} x_j - \sum_{j=0}^{n} x_j\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{j=n+1}^{n+k} x_j\Big\| \leqslant \sum_{j=n+1}^{n+k} \|x_j\| < \sum_{j=n+1}^{n+k} \varepsilon_j < \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon_j \to 0.$$

Поэтому $\exists\, E \ni x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{n} x_j$. Кроме того, $\sum\limits_{j=0}^{n} f(x_j) \to z$, и в силу непрерывности f получаем: $f\Big(\sum\limits_{j=0}^{n} x_j\Big) = \sum\limits_{j=0}^{n} f(x_j) \to f(x_\infty)$, откуда $z =$ $= f(x_\infty)$.

Таким образом, $\forall\, \delta > 0 \ \exists\, r(\delta) : f(S(0,\delta)) \supset S(0, r(\delta))$, откуда получаем, что $f(S(x,\delta)) \supset S(f(x), r(\delta))$.

Теперь докажем теорему для произвольного открытого подмножества V. Пусть $z \in f(V)$, тогда $z = f(x)$, где $x \in V$. Т.к. $\exists\, \delta > 0 : S(x,\delta) \subset V$, то $S(f(x), r(\delta)) \subset f(S(x,\delta)) \subset V$. $\square$

5. Локально выпуклые пространства.

Определение 5.1. *Локально выпуклое пространство* — это пара $(E, \mathcal{P})$, где $\mathcal{P}$ — семейство полунорм на E.

Определение 5.2. На локально выпуклом пространстве $(E, \mathcal{P})$ можно *задать топологию*: множество $V \subset E$ назовем открытым, если

$$\forall\, x \in E\; \exists\, n \in \mathbb{N},\ p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0 : \bigcap_{j=1}^{n} \{z \mid p_j(x-z) < \varepsilon_j\} \subset V.$$

Если E и $G \subset E^*$ — линейные пространства, то $p \in \mathcal{P}_G \Leftrightarrow \exists\, f \in G : \forall\, x \in E\ \ p_f(x) \equiv p(x) = |f(x)|$. Тогда пространство $(E, \mathcal{P}_G)$ будет локально выпуклым.

Определение 5.3. Топология на пространстве $(E, \mathcal{P}_G)$ называется *слабой топологией на E, порожденной G*, и обозначается через $\sigma(E, G)$.

Если E нормировано и $G = E^*$, то топология $\sigma(E, E^*)$ называется *слабой топологией нормированного пространства E*.

Для пространства E^* возьмем $G = \{F_x \mid x \in E\}$, тогда топология $\sigma(E^*, E^{**})$ называется **слабой на E^**.

Лекция 8.

Лемма 5.1. *Пусть f_{12} и f_{13} — линейные отображения, причем* $\ker f_{13} \supset \ker f_{12}$*. Тогда существует такое линейное отображение f_{23}, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[rr, "f_{12}"] \arrow[dr, "f_{13}"'] & & K_2 \arrow[dl, "f_{23}"] \\
& K_3 &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $K_2 = f_{12}(K_1) \oplus K$. Тогда положим

$$f_{23}(x) = \begin{cases} f_{13}(f_{12}^{-1}(x)), & \text{если } x \in f_{12}(K_1); \\ 0, & \text{если } x \in K. \end{cases}$$

Это определение корректно ввиду того, что $\ker f_{13} \supset \ker f_{12}$. ☐

Теорема 5.1. *Пусть E — линейное пространство и f — линейный функционал на E. Тогда он непрерывен в слабой топологии $(E, \sigma(E, G))$ $\Leftrightarrow$ $f \in G$*[5].

Доказательство. Если $x \in E$ таково, что $p_g(x) < \varepsilon$, где $g \in G$, то $|g(x)| = p_g(x) < \varepsilon$, а значит, g непрерывен в 0.

Обратно, пусть $g \in (E, \sigma(E, G))^*$. Тогда g непрерывен в 0, поэтому $\forall \varepsilon \ \exists V(0) \subset V : \forall x \in V \ \ |g(x)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\exists g_k : \{x \in E \mid p_{g_i}(x) < 1\} = \{x \in E \mid |g_i(x)| < 1\} \subset V.$$

Поэтому, если $|g_k(x)| < 1$, то $|g(x)| < \varepsilon$, а значит, т.к. $\ker g \supset \bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker g_k$, то $\exists \lambda_k : g = \sum \lambda_k g_k$, откуда $g \in G$.

Существование таких λ_k следует из леммы 5.1. В самом деле, возьмем $K_1 = E$, $K_2 = \mathbb{R}^n$, $K_3 = \mathbb{R}^1$, $f_{12}(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$ и $f_{13} = g$. Тогда $\exists f_{23} : f_{23}((x_1, \ldots, x_n)) = \sum \lambda_k x_k$, что и требовалось. □

Теорема 5.2. *Пусть E — нормированное пространство и $B \subset E$. Тогда B ограничено в топологии $\sigma(E, E^*)$ $\Leftrightarrow$ B ограничено по норме.*

Доказательство. Пусть B ограничено по норме и $g \in E^*$. Тогда $\forall x \in B \ \ |g(x)| \leqslant \|g\| \cdot \|x\|$, откуда $\|x\| < \infty$ и $\sup\limits_{x \in B} |g(x)| < \infty$.

Докажем обратное утверждение. Вложим E в E^{**} и применим ко множеству $B \subset E \subset E^{**}$ теорему Банаха–Штейнхауса. Тогда B ограничено в топологии $\sigma(E, E^*)$ $\Leftrightarrow \forall f \in E^* \ \sup\limits_{x \in B} |f(x)| < \infty$, т.е. $\sup\limits_{x \in B} |F_x(f)| < \infty$, т.к. B поточечно ограничено на банаховом пространстве E^*. Значит, B ограничено по норме в E^{**}. Но вложение $E \hookrightarrow E^{**}$ является изометрией, поэтому B ограничено и в пространстве E. □

Теорема 5.3. *Пусть E — нормированное пространство и $V \subset E$ — выпуклое подмножество в нем. Тогда V замкнуто по норме $\Leftrightarrow$ V замкнуто в топологии $\sigma(E, E^*)$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, т.к. топология по норме сильнее слабой.

Докажем обратное утверждение. Для этого рассмотрим следующее понятие.

Определение 5.4. *Функционалом Минковского множества W* называется функционал $p_W(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x/\lambda \in W\}$.

[5] По другому утверждение теоремы можно записать так: $(E, \sigma(E, G))^* = G$.

Функционал Минковского обладает следующими свойствами.

1) $p_W(0) = 0$ (обратное неверно!);

2) $p_W(\alpha x) = \alpha p_W(x)$, где $\alpha > 0$;

3) $p_W(x_1 + x_2) \leqslant p_W(x_1) + p_W(x_2)$.

Докажем свойство 3) (остальные очевидны). Нам будет достаточно доказать его в случае, когда $\forall\, x \in E\;\; W \cap \{\lambda x\}$ открыто в $\{\lambda x\}$ и $0 \in W$. Пусть $x_1, x_2 \in E$, тогда $\forall\, \varepsilon > 0\;\; \frac{x_j}{p_W(x_j)+\varepsilon} \in W$ $(j = 1, 2)$. Т.к. W выпукло, то при $\tau_j = \frac{p_W(x_j)+\varepsilon}{p_W(x_1)+p_W(x_2)+2\varepsilon}$ и $z_j = \frac{x_j}{p_W(x_j)+\varepsilon}$ имеем: $\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 \in V$. Но тогда

$$p_W(\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2) = p_W\left(\frac{x_1 + x_2}{p_W(x_1) + p_W(x_2) + 2\varepsilon}\right) < 1,$$

откуда $p_W(x_1 + x_2) < p_W(x_1) + p_W(x_2) + 2\varepsilon$, что и требовалось.

Теперь докажем обратное утверждение теоремы. Можно считать, что $0 \in V$. Тогда $\exists\, S(z, \varepsilon) : S(z, \varepsilon) \cap V = \varnothing$, поэтому $(V + S(0, \varepsilon/2)) \cap$ $\cap\, (S(z, \varepsilon/2)) = \varnothing$. Положим $W = V + S(0, \varepsilon/2)$. Тогда W — это выпуклое открытое множество, поскольку $W = \bigcup\limits_{v \in V} (S(0, \varepsilon/2) + v)$. Пусть p_W — функционал Минковского множества W, тогда $\exists\, \delta > 0 : p_W(z) \geqslant 1 + \delta$.

На одномерном пространстве $\{\lambda z\}$ определим функционал $f(\lambda z) =$ $= \lambda p_W(z)$. Тогда $\forall\, x \in \{\lambda z\}\;\; f(x) \leqslant p_W(x)$. Значит, по теореме Банаха–Штейнхауса функционал f можно продлить до функционала $\bar{f}$ на E, такого, что $\bar{f}(x) \leqslant p_W(x)$. Этот функционал непрерывен: пусть $S(0, \varepsilon/2) \subset$ $\subset W$, тогда $\forall\, x \in S(0, \varepsilon/2)\;\; p_W(x) < 1$, поэтому $\bar{f}(x) \leqslant p_W(x) < 1$ и $\bar{f}(-x) < 1$, откуда $|\bar{f}(x)| < 1$.

Рассмотрим множество $U = \{x \in E \mid \bar{f}(x) > 1 + \delta/2\}$. Тогда $z \in U$ и $U \cap W = \varnothing$ (т.к. $\bar{f}(x) < p_W(x)$, откуда $U \subset \{x \in E \mid p_W(x) > 1 +$ $+\, \delta/2\}$, а последнее множество не пересекается с W). Но отсюда следует, что $U \cap V = \varnothing$, т.е. V содержит вместе с каждой точкой некоторую ее окрестность в слабой топологии топологии, что и означает открытость V. $\square$

Лекция 9.

6. Гильбертовы пространства.

Определение 6.1. Пусть E — линейное пространство над $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{C}^1$. *Скалярным произведением на E* называется функция b: $E \times E \to \mathbb{C}^1$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $b(\lambda x, z) = \lambda b(x, z)$ и $b(x, \lambda z) = \bar{\lambda} b(x, z)$;

2) $b(x_1+x_2,z)=b(x_1,z)+b(x_2,z)$ и $b(x,z_1+z_2)=b(x,z_1)+b(x,z_2)$;

3) $b(x,z)=\overline{b(z,x)}$;

4) $b(x,x)\geqslant 0$, причем $b(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Если пространство E вещественное, аксиомы немного другие, а именно, в аксиоме 1) $b(x,\lambda z)=\lambda b(x,z)$, и в аксиоме 3) $b(x,z)=b(z,x)$.

Если (E,b) — евклидово пространство, то на нем можно ввести норму, а именно, $\|x\|^2=b(x,x)$.

В дальнейшем скалярное произведение будем обозначать через (x,z).

Предложение 6.1 (Неравенство Коши–Буняковского–Шварца)**.**

$$|(x,z)|\leqslant \|x\|\|z\|.$$

Доказательство. При $z=0$ утверждение очевидно. Пусть теперь $z\neq 0$. Поскольку неравенство

$$0\leqslant (x-\lambda z,x-\lambda z)=\|x\|^2-2(x,z)\lambda+\lambda^2\|z\|^2$$

верно при всех λ, то дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в правой части, должен быть отрицательным. А он как раз равен $(x,z)^2 - \|x\|^2\|z\|^2$. □

Замечание. В этом доказательстве предполагалось, что пространство E вещественно. Доказательство для комплексного случая будет дано в теореме 7.5.

Определение 6.2. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым.* В дальнейшем мы будем обозначать его через H.

Примеры.

1. Пространство $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathfrak{B},\nu)$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,\nu(dx)$ является гильбертовым.

2. Пространство l_2 суммируемых последовательностей со скалярным произведением $(\{x_n\},\{z_n\})=\sum x_n z_n$ является гильбертовым (на самом деле, это частный случай пространства $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathfrak{B},\nu)$, когда $\Omega=\mathbb{N}$, а ν — считающая мера).

Определение 6.3. Вектора $a,b\in H$ называются *ортогональными*, если $(a,b)=0$.

Вектор a называется *нормированным*, если $\|a\|=1$.

Предложение 6.2. *Если $\{x_j\}\subset E$ — линейно независимая система векторов, то $\exists\,\{e_j\}\subset E : e_j$ — ортонормированная система векторов и $\forall\, k\ \ \langle e_1,\dots,e_k\rangle=\langle x_1,\dots,x_k\rangle$.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*: положим $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ и

$$e_n = \frac{x_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_n, e_j)e_j}{\left\|x_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_n, e_j)e_j\right\|}.$$

Легко видеть, что система векторов $\{e_j\}$ искомая. $\square$

Определение 6.4. Ортонормированная система векторов $\{e_i\}$ пространства E называется *тотальной*, если $\overline{\langle e_i \rangle} = E$.

Ортонормированная система векторов $\{e_i\}$ пространства E называется *замкнутой*, если $\forall\, x \in E \ \ \|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x, e_i)^2$.

Ортонормированная система векторов $\{e_i\}$ пространства E называется *полной*, если $\forall\, x \in E : (x, e_n) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ортонормированная система векторов $\{e_j\}$ называется *базисом* пространства E, если $\forall\, x \in E \ \ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$.

Лекция 10.

Предложение 6.3 (Неравенство Бесселя)**.** $\forall\, x \in E \ \ \|x\|^2 \geqslant \sum\limits_{n}(x, e_n)^2$.

Доказательство. В самом деле,

$$0 \leqslant \left\|x - \sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{k}(x, e_n)^2,$$

откуда следует, что при всех k выполнено неравенство $\sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)^2 \leqslant \|x\|^2$, а значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)^2 \leqslant \|x\|^2$. $\square$

Предложение 6.4. $\inf\limits_{\{\alpha_n\}} \left\|x - \sum \alpha_n e_n\right\| = \left\|x - \sum (x, e_n)e_n\right\|$.

Доказательство. Несложно убедиться, что

$$\left\|x - \sum \alpha_n e_n\right\|^2 = \left\|x - \sum (x, e_n)e_n\right\| + \left\|\sum (x, e_n)e_n - \sum \alpha_n e_n\right\|,$$

откуда следует искомое неравенство. $\square$

Теорема 6.1. *Имеет место следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} \textit{(1) тотальность} & \Longleftrightarrow & \textit{(2) замкнутость} \\ \Updownarrow & & \Downarrow \\ \textit{(4) базисность} & \Longrightarrow & \textit{(3) полнота} \end{array}$$

Доказательство. Сначала докажем, что (2) $\Leftrightarrow$ (4). Пусть система векторов $\{e_n\}$ замкнута. Тогда $\left\|x - \sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)^2 \to 0$ при $k \to \infty$, поэтому $x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n = \sum(x, e_n)e_n$.

Обратно, пусть система векторов $\{e_n\}$ является базисом, тогда получаем, что $x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n$, откуда $\left\|x - \sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)^2 \to 0$, а значит, $\|x\|^2 = \sum(x, e_n)^2$.

Теперь докажем, что (1) $\Leftrightarrow$ (4). Пусть система векторов $\{e_n\}$ тотальна. Тогда $\forall\, x \in E$, $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, k \in \mathbb{N}, \{\alpha_n\}_{n-1}^{k} : \left\|x - \sum\limits_{n=1}^{k}\alpha_n e_n\right\| < \varepsilon$. В силу предложения 6.4, отсюда следует, что $\left\|x - \sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n\right\| < \varepsilon$, а значит, $x = \sum(x, e_n)e_n$.

Обратная импликация очевидна.

Наконец, докажем, что (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть система векторов $\{e_n\}$ является базисом и $\forall\, x, n\ \ (x, e_n) = 0$. Тогда $x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n = 0$. $\square$

Теорема 6.2 (Рисс–Фишер)**.** *Если пространство E гильбертово, то* (3) $\Rightarrow$ (4).

Доказательство. Поскольку $\sum(x, e_n)^2 < \infty$, то для всякого $x \in E$ имеем: $\left\|\sum\limits_{n=k_1}^{k_2}(x, e_n)e_n\right\| = \sum\limits_{n=k_1}^{k_2}(x, e_n)^2 \to 0$ при $k_1, k_2 \to \infty$. Т.к. E гильбертово, $\exists\, z \in E : z = \sum(x, e_n)e_n$. Остается доказать, что $z = x$. Это следует из следующей цепочки равенств и полноты:

$$(z - x, e_l) = (z, e_l) - (x, e_l) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n, e_l\right) - (x, e_l) = 0,$$

что и требовалось. $\square$

Определение 6.5. Пространство называется *сепарабельным*, если оно обладает счетным всюду плотным множеством.

Теорема 6.3. *Любые два бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны*

Доказательство. Докажем, что в сепарабельном гильбертовом пространстве бесконечной размерности есть ортонормированный базис. Поскольку пространство сепарабельно, то в нем есть счетное всюду плотное множество $\{x_n\}$. Пусть $z_1 = x_{n_1}$ — первый ненулевой элемент этой системы. Далее, $z_2 = x_{n_2}$ — первый среди последующих элементов этой системы, независимый с z_1. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим систему независимых векторов $\{z_n\}$, причем мы всегда сумеем выбрать следующий элемент z_k в силу бесконечномерности пространства. Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта, мы получаем тотальную ортонормированную систему векторов $\{e_n\}$. Т.к. пространство гильбертово, то по доказанному ранее эта система является базисом.

Докажем теперь утверждение теоремы. Пусть E_1 и E_2 — два пространства. Согласно доказанному выше, выберем в них ортонормированные базисы $\{e_n^1\}$ и $\{e_n^2\}$. Тогда $\forall\, x \in E_1 \;\; x = \sum (x, e_n^1) e_n^1$. Положим $F\colon E_1 \to E_2$, $x \mapsto F(x) = \sum (x, e_n^1) e_n^2$. В силу неравенства Бесселя указанный ряд сходится, поэтому отображение определено корректно. Докажем, что оно является автоморфизмом. В самом деле,

$$(x_1, x_2) = \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{k} (x_1, e_n^1) e_n^1, \sum_{n=1}^{k} (x_2, e_n^1) e_n^1 \Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (x_1, e_n^1)(x_2, e_n^1) = \sum (x_1, e_n^1)(x_2, e_n^1) = (F(x_1), F(x_2))^6.$$

□

Лемма 6.1 (Равенство параллелограмма)**.** $\forall\, x, z \in E$ *имеет место следующее равенство:* $\|\frac{1}{2}(x - z)\|^2 + \|\frac{1}{2}(x + z)\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2$. □

Лемма 6.2. *Пусть* $d > \delta \geqslant 0$, $S = \{x \in E \mid d \leqslant \|x\|^2 \leqslant d + \delta\}$ *и* $A \subset S$ *— выпуклое множество. Тогда* $\forall\, x_1, x_2 \in A \;\; \|x_1 - x_2\| \leqslant \sqrt{12 d\delta}$.

Доказательство. Т.к. $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in A$, то $\|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\| \geqslant d$. Кроме того, согласно правилу параллелограмма,

$$\Big\| \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \Big\|^2 = \frac{1}{2}\|x_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x_2\|^2 - \Big\| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Big\|^2 \leqslant (d + \delta)^2 - d^2 \leqslant 3d\delta,$$

откуда $\|x_1 - x_2\| \leqslant \sqrt{12 d\delta}$. □

[6]Это равенство называется *равенством Парсеваля.*

Лекция 11.

7. Теорема Рисса.

Замечание. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем считать, что основным полем является *либо* $\mathbb{R}$, *либо* $\mathbb{C}$.

Предложение 7.1. *Пусть V — выпуклое замкнутое множество гильбертова пространства и $h \notin V$. Тогда $\exists!\, x_h \in V : c = \|h - x_h\| = \inf\limits_{z\in V} \|h - z\|$.*

Определение 7.1. Элемент x_h называется *проекцией элемента h на V* и обозначается через $\mathrm{pr}_\mathrm{V}\, h$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{z_n\} \subset V$ такова, что $\|h - z_n\| \to c$, т.е. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 : \forall\, n \geqslant n_o \;\; z_n \in \{x : c \leqslant \|x - h\| \leqslant c + \varepsilon\} \cap V$. По лемме 6.2 получаем, что $\|z_n - z_k\| \leqslant \sqrt{12c\varepsilon}$ при $n, k \geqslant n_0$, а значит, последовательность $\{z_n\}$ фундаментальна. Поэтому $\exists\, x_h = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Легко видеть, что элемент x_h искомый, т.е. $\|h - x_h\| = c$.

Докажем единственность. Пусть есть два элемента x_h и $\bar{x}_h$, удовлетворяющие условию. Тогда по лемме 6.2 имеем: $\|\bar{x}_h - x_h\| \leqslant \sqrt{12c\varepsilon}$ при всех $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $\bar{x}_h = x_h$. □

Предложение 7.2. $\mathrm{Re}(h - x_h, z - x_h) \leqslant 0$ *при всех $z \in V$.*

Доказательство. Т.к. множество V выпукло, то при всех $\lambda \in [0; 1)$ имеем: $x_h + \lambda(z - x_h) \in V$. В таком случае $\|h - (x_h + \lambda(z - x_h))\|^2 \geqslant \|h - x_h\|^2$, что равносильно следующему неравенству:

$$\|h - x_h\|^2 + \lambda^2 \|z - x_h\|^2 - 2\lambda\, \mathrm{Re}(h - x_h, z - x_h) \geqslant \|h - x_h\|^2.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Re}(h - x_h, z - x_h) \leqslant \frac{\lambda}{2}\|z - x_h\|^2$. Устремляя λ к 0, получаем требуемое. □

Теорема 7.1. *Пусть $G \subset H$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства. Тогда $\forall\, h \in H \;\; \exists!\, x_h = \mathrm{pr}_\mathrm{G}\, h \in G : h - \mathrm{pr}_\mathrm{G}\, h \perp G$.*

Доказательство. Пусть $x_h = \mathrm{pr}_\mathrm{G}\, h$. При $z = 0$ по предыдущему предложению получаем, что $\mathrm{Re}(h - x_h, -x_h) \leqslant 0$. Отсюда следует, что при всех z выполнено неравенство $\mathrm{Re}(h - x_h, z) \leqslant 0$. Если теперь $(h - x_h, z) = re^{i\theta}$, где $r \geqslant 0$, то $\mathrm{Re}(h - x_h, e^{i\theta} z) = r \leqslant 0$. Поэтому $r = 0$, что и требовалось. □

Замечание. На самом деле, условие теоремы является и достаточным, т.е. по условию теоремы вектор x_h определяется однозначно.

Теорема 7.2 (Рисс). *Пусть E — гильбертово пространство и $f \in E^*$. Тогда $\exists!\, h_f \in E : \forall\, x \in E \;\; f(x) = (x, h_f)$, причем $\|f\| = \|h_f\|$.*

Доказательство. Если $f \equiv 0$, то утверждение очевидно.

Пусть $f \not\equiv 0$. Рассмотрим подпространство $G = \ker f$. Тогда $\exists\, z \in H \setminus G : z - \mathrm{pr_G}\, z = h \perp G$, причем $h \neq 0$. Рассмотрим функционал $F\colon x \mapsto (x, h)$. Тогда $\ker F \supset \ker f = G$, поэтому по лемме 5.1 $\exists\, \alpha \in \mathbb{C} : f = \alpha F$ и $\alpha \neq 0$. В таком случае положим $h_f = \bar{\alpha} h$. Легко проверить, что $f(x) = (x, h_f)$.

Докажем, что $\|f\| = \|h_f\|$. По неравенству Коши–Буняковского–Шварца $|f(x)| = |(x, h_f)| \leqslant \|x\| \|h_f\|$, поэтому $\|f\| \leqslant \|h_f\|$. Кроме того, при $x = \frac{h_f}{\|h_f\|}$ неравенство обращается в равенство, поэтому $\|f\| = \|h_f\|$.

Докажем единственность. Пусть есть два элемента h_f и $\bar{h}_f$, удовлетворяющие условию. Тогда $\forall\, x \in H \;\; (x, h_f) = (x, \bar{h}_f)$. Отсюда $\forall\, x \in H$ $(x, h_f - \bar{h}_f) = 0$. Подставив $x = h_f - \bar{h}_f$, получим $(h_f - \bar{h}_f, h_f - \bar{h}_f) = 0 \Rightarrow h_f - \bar{h}_f = 0 \Rightarrow h_f = \bar{h}_f$. □

Лекция 12.

Теорема 7.3. *Пусть $G \subset H$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства, $h \in H$, $\exists\, \mathrm{pr_G}\, h \in G$ и $\exists\, z \in G$, $(h - z) \perp G$. Тогда $\mathrm{pr_G}\, h = z$.*

Доказательство. $(h - \mathrm{pr_G}\, h) \perp G$, $(h - z) \perp G \Rightarrow (h - \mathrm{pr_G}\, h) - (h - z) = (z - \mathrm{pr_G}\, h) \perp G$. Но $(z - \mathrm{pr_G}\, h) \in G$. Следовательно, $(z - \mathrm{pr_G}\, h, z - \mathrm{pr_G}\, h) = 0 \Rightarrow z - \mathrm{pr_G}\, h = 0 \Rightarrow z = \mathrm{pr_G}\, h$. □

Определение 7.2. Пусть E_1 и E_2 - линейные пространства над полем $\mathbb{C}$. Отображение $f : E_1 \to E_2$ называется *полулинейным*, если $\forall g_1, g_2 \in E_1$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено $f(g_1 + g_2) = f(g_1) + (g_2)$ и $f(\lambda g_1) = \bar{\lambda} f(g_1)$.

Замечание. Пусть E — гильбертово пространство и $f \in E^*$. По теореме Рисса $\exists!\, h_f \in E : \forall\, x \in E \;\; f(x) = (x, h_f)$ Тогда отображение $F\colon E^* \to E$, $F(f) = h_f$ полулинейно.

Теорема 7.4. *Пусть E — это произвольное линейное пространство, а $p\colon E \to \mathbb{R}^+$ — такая функция на нем, что выполняются следующие свойства:*

1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$*;*

2) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$*.*

Пусть также $G \subset E$ *— подпространство и* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *— линейный функционал на нем, причем* $\forall\, x \in G\ \ |f(x)| \leqslant p(x)$*. Тогда* $\exists\, \tilde{f}\colon E \to \mathbb{C}$ *— такое линейное отображение, что* $\forall\, x \in E\ \ |\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)$ *и* $\forall\, x \in G\ \ \tilde{f}(x) = f(x)$*.*

Доказательство. Положим $\forall\, x \in G\ f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$. Тогда $f_1\colon G_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ линеен и $\forall\, x \in G\ \ f(x) = f_1(x) - i f_1(ix)$. По условию $\forall\, x \in G\ \ |f(x)| \leqslant p(x)$, значит, $\forall\, x \in G\ \ |f_1(x)| \leqslant p(x)$. По теореме Хана-Банаха найдем такой линейный функционал $\tilde{f}_1\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, что $\forall\, x \in E_{\mathbb{R}}\ \ |\tilde{f}_1(x)| \leqslant p(x)$. Положим $\forall x \in E\ \ \tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$. Тогда $\tilde{f}$ и будет искомым функционалом. Надо лишь проверить, что $\forall\, x \in E\ \ |\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)$.

Допустим, что это не так, т.е. $\exists\, x \in E : |\tilde{f}(x)| > p(x)$. Пусть $\tilde{f}(x) = \rho e^{i\theta}$. Тогда $\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = e^{-i\theta}\tilde{f}(x) = e^{-i\theta}\rho e^{i\theta} = \rho > 0$. Поэтому $|\tilde{f}(e^{-i\theta}x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \Rightarrow \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) > p(x) = p(e^{-i\theta}x)$. Противоречие. □

Определение 7.3. Пусть E и G — банаховы пространства и $A\colon E \to G$ — линейный оператор. Тогда *банахов сопряженный оператор* $A^*\colon G^* \to E^*$ определяется следующим образом: $\forall g \in G^*\ \ \forall x \in E\ \ g(Ax) = (A^*g)(x)$.

Предложение 7.3. A^* *линеен и непрерывен.*

Доказательство. Линейность очевидно вытекает из определения. Для проверки непрерывности докажем более сильное утверждение: $\|A^*\| = \|A\|$.

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in F\\ \|x\| \leqslant 1}} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\substack{g \in G^*\\ \|g\| \leqslant 1}} |g(Ax)| = \sup_{\|g\| \leqslant 1} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |g(Ax)| =$$
$$= \sup_{\|g\| \leqslant 1} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(A^*g)(x)| = \sup_{\|g\| \leqslant 1} \|A^*g\| = \|A^*\|.$$

□

Определение 7.4. Пусть H — гильбертово пространство и $A\colon H \to H$ — линейный оператор. Тогда *гильбертов сопряженный оператор* $A^*\colon H \to H$ определяется следующим образом: $\forall x \in H\ \ \forall z \in H\ \ (A^*x, z) = (x, Az)$.

Лекция 13.

Теорема 7.5 (Неравенство Коши-Буняковского в комплексном случае). *Пусть H — гильбертово пространство над $\mathbb{C}$ и $f, g \in H$. Тогда верно неравенство $|(f,g)| \leqslant \|f\|\|g\|$.*

Доказательство. Если $\|g\| = 0$, то $g = 0$ и неравенство Коши-Буняковского выполнено.

Если же $(f,g) = 0$, то неравенство Коши-Буняковского тоже выполнено.

Ну а если $\|g\|(f,g) \neq 0$, то пусть λ — произвольное действительное число. Тогда $(f - \lambda(f,g)g, f - \lambda(f,g)g) \geqslant 0$. Значит, $(f,f) - 2\lambda|(f,g)|^2 + \lambda^2|(f,g)|^2\|g\|^2 \geqslant 0$. Это квадратный трехчлен, неотрицательный при всех λ, поэтому его дискриминант неотрицателен. Таким образом, получаем, что $|(f,g)|^4 \leqslant \|f\|\|g\||(f,g)|^2$, откуда следует $|(f,g)| \leqslant \|f\|\|g\|$. □

Теорема 7.6. *Пусть A — произвольный линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$, где A^* — оператор, сопряженный к оператору A и $\operatorname{Im} C = \{Cx \mid x \in H\}$.*

Доказательство. Проверим включение в одну сторону. $x \in \ker A \Leftrightarrow \forall z \in H \quad (Ax, z) = (x, A^*z)$. Итак, любой элемент ядра оператора перпендикулярен любому элементу образа.

Обратно: $x \perp \operatorname{Im} A^* \Leftrightarrow \forall z \in H \quad (x, A^*z) = 0 \Leftrightarrow \forall z \in H \quad (Ax, z) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \in \ker A$. □

Следствие 7.1. *1.* $(\ker A)^\perp = (\operatorname{Im} A^*)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} A^*}$.

2. $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$.

3. $(\ker A^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A}$.

Упражнение 13. Докажите это следствие.

Пусть теперь $A\colon E \to G$, где E и G — банаховы пространства. Тогда для оператора $A^*\colon G^* \to E^*$ верны те же свойства (здесь $(\operatorname{Im} A^*)^\perp = \{x \in E \mid \forall g \in \operatorname{Im} A^*,\ g(x) = 0\}$).

Доказательства аналогичны предыдущим.

8. Обобщенные функции.

Определим три пространства так называемых пробных функций:

1. $D = D(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций (действительнозначных или комплекснозначных) с компактным носителем.

2. $S = S(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций (действительнозначных или комплекснозначных).

3. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций (действительнозначных или комплекснозначных).

Определение 8.1. *Носителем функции* φ называется следующее множество: $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}}$.

Определение 8.2. Функция φ называется *быстро убывающей*, если $\forall\, n, k \;\; p_{n,k} = \sup_x (1 + \|x\|^n)\|\varphi^{(k)}(x)\| < \infty$.

Определение 8.3. Здесь $\|\varphi^{(k)}(x)\| = \sum\limits_{\sum r_j = k} \left|\dfrac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}}\right|$.

Каждое из пространств D, S, $\mathcal{E}$ является линейным. В этих пространствах задается топология следующим образом.

Начнем с пространства S. В нем топологию определяет система полунорм $P = \{p_{n,k} : n, k = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Теперь рассмотрим пространство D. $D = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} D_r$, где $D_r = \{\varphi \in D \mid \operatorname{supp}\varphi \subset S(0,r)\}$. Но $D_r \subset D \subset S$. Получаем в D_r индуцированную топологию из S.

Определим фундаментальную систему окрестностей нуля:

$W \in V \Leftrightarrow W$ выпукло и $\forall\, r \in \mathbb{N} \;\; W \cap D_r$ — открытая окрестность нуля в D_r.

Определение 8.4. $V \subset D$ *открыто* тогда и только тогда, когда оно представляет собой объединение (возможно, сдвинутых) окрестностей нуля.

Теперь определим топологию P_E в $\mathcal{E}$. Для этого снабдим пространство $\mathcal{E}$ семейством полунорм: $p \in P_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow \exists$ компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ и $r, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$: $\forall\, \varphi \in E \;\; p_{r,k} = \sup\limits_{x \in K} \sum\limits_{\sum r_j = r} \left|\dfrac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}}\right|$.

Это семейство полунорм и задает топологию.

Теорема 8.1. *Пусть E хаусдорфовое и локально выпуклое пространство и топология может быть задана не более чем счетным семейством полунорм. Тогда E метризуемо.*

Доказательство. Если $\{p_n\}$ — полунормы из условия, то метрика такова: $\rho(\varphi, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(\varphi - \phi)}{2^n(1 + p_n(\varphi - \phi))}$. □

Лекция 14.

Предложение 8.1. $F_g = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ *почти всюду.*

Доказательство. Рассмотрим семейство гладких функций

$$\psi_{a,b,n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a + 1/n; b - 1/n); \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Понятно, что $\forall\, x \quad 0 \leqslant \psi_{a,b,n}(x) \leqslant 1$. Пусть теперь $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx = 0$. Докажем, что $\forall\, a < b \in \mathbb{R}^1 \quad \int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$. В самом деле, поскольку $\psi_{a,b,n} \to \gamma_{(a;b)}$ при $n \to \infty$, то, подставляя $\varphi = \psi_{a,b,n}$ и переходя к пределу под знаком интеграла (это возможно по теореме Лебега), получаем:

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\psi_{a,b,n}(x)\,dx \to \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Докажем теперь, что для любого ограниченного измеримого подмножества A из $\mathbb{R}^1$ верно равенство $\int\limits_A g(x)\,dx = 0$. Действительно, $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, A_\varepsilon : \nu(A_\varepsilon \triangle A) < \varepsilon$ и $\forall\, \nu > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall\, B \subset \mathbb{R}^1,\ \nu(B) < \delta$, $B \subset [a-1; b+1] \Rightarrow \int\limits_B |g(x)|\,dx < \nu$. Значит, $\int\limits_{A_\varepsilon} g(x)\,dx = 0$ и $\int\limits_{A \triangle A_\varepsilon} g(x)\,dx < \nu$, откуда $\int\limits_A g(x)\,dx = 0$. $\square$

Пусть $\nu \colon \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1) \to \mathbb{R}^1$ — мера. Построим следующее отображение этой меры в пространство обобщенных функций: $\nu \mapsto F_\nu \in D^*$, $F_\nu(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\,\nu(dx)$. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что $\forall\, a < b \in \mathbb{R}^1 \quad \nu((a; b)) = 0$. Если $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$, то по теореме Хана $\nu = \nu^+ - \nu^-$, поэтому $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, A_\varepsilon^\pm : \nu^\pm(A \triangle A_\varepsilon^\pm) < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\exists\, A_\varepsilon : \nu^\pm(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\nu(A_\varepsilon) = 0$. Отсюда получаем, что $|\nu^+(A) - \nu^-(A)| < 2\varepsilon$, а значит, $\nu(A) = 0$.

Введем теперь некоторые операции в пространстве обобщенных функций. Для этого прежде всего заметим, что D^* — это модуль над $\mathcal{E}$. Поэтому, например, $\varphi F_g = F_{\varphi d}$.

Определение 8.5. *Производной обобщенной функции* F называется такая обобщенная функция F', что $(F', \varphi) = -(F, \varphi')$

9. Преобразование Фурье.

Сначала определим преобразование Фурье для функций из класса $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$.[7]

Определение 9.1. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Ее *преобразованием Фурье* называется функция $\hat{\varphi}(x) = c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,z)}\varphi(z)\,dz$, где c_1 — некоторая ненулевая константа.

Замечание. В дальнейшем мы докажем т.н. *формулу обращения*: $\varphi(x) = c_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,z)}\hat{\varphi}(z)\,dz$. При этом константы c_1 и c_2 выбираются таким образом, чтобы $c_1c_2 = (2\pi)^n$. В дальнейшем мы будем считать, что $c_1 = 1$ и $c_2 = \frac{1}{(2\pi)^n}$.

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Фурье.

Теорема 9.1. *Преобразование Фурье $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \to C^0(\mathbb{R}^n)$ непрерывно.*

Доказательство. В самом деле, функция $\hat{\varphi}$ непрерывна по теореме Лебега и $\|\hat{\varphi}\|_{C^0} = \max\limits_x |\hat{\varphi}(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)|\,dz = \|\varphi\|_{\mathcal{L}_1}$. Кроме того, $|\hat{\varphi}(x)| \to 0$ при $x \to \infty$: это верно для функций $\varphi(x) = \gamma_{[a;b]}(x)$, которые плотны в $\mathcal{L}_1$, а значит, ими можно приблизить любую другую функцию и применить теорему Лебега. □

Теорема 9.2. *Пусть $g(x) \in C^1(\mathbb{R}^1) \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^1)$, тогда $\widehat{g'}(x) = ix\hat{g}(x)$.*

Доказательство. Действительно,

$$\widehat{g'}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-ixz}g'(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n} e^{-ixz}g'(z)\,dz =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(e^{-ixz}g(z)\,\Big|_{-n}^{n} + ix\int\limits_{-n}^{n} e^{-ixz}g(z)\,dz\right) = ix\hat{g}(x),$$

т.к. $g(z) = g(0) + \int\limits_0^z g'(z)\,dz$, откуда $\exists \lim\limits_{z\to\infty} g(z) = c_1$ и $\exists \lim\limits_{z\to-\infty} g(z) = c_2$. Оба этих предела равны 0, т.к. $g' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^1)$, откуда и следует искомое равенство. □

[7] В дальнейшем мы для простоты часто будем считать, что $n = 1$.

Лекция 15.

Теорема 9.3. *Если* $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ *и* $[x \mapsto xf(x)] \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, *то* $(\hat{f})'(z) = = \widehat{-ixf(x)}$.

Доказательство. $\forall\, \alpha, \beta \ \ |e^{i\alpha} - e^{i\beta}| \leqslant |\alpha - \beta|$. Отсюда $|\frac{e^{-ix(z+\Delta z)} - e^{-ixz}}{\Delta z}| \leqslant |x|$. Поэтому $\hat{f}'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-ix(z+\Delta z)} - e^{-ixz}}{\Delta z} \right| dx = \int\limits_{\mathbb{R}} -ixe^{-ixz} f(x)dx$. □

Теорема 9.4. $\widehat{f(\frac{x}{a})}(z) = a\hat{f}(az)$.

Доказательство. $\widehat{f(\frac{x}{a})}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\frac{x}{a}) e^{-ixz} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} af(y)e^{-iayz} dx = a\hat{f}(az)$, где была сделана замена $x = ay$. □

Теорема 9.5. $\hat{f}(x+a)(z) = e^{iaz} f(z)$.

Доказательство. $\hat{f}(x+a)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+a)e^{-ixz}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(y-a)z}dx = = e^{iaz}\hat{f}(z)$, где была сделана замена $x = y + a$. □

Теорема 9.6 (Равенство Парсеваля)**.** *Если функции* $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, *то* $\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx$.

Доказательство. Согласно теореме Фубини, имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(z)e^{-ixz}dz \Big) g(x)dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ixz}dx \Big) f(z)dz = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{g}(z)f(z)dz.$$

Применение теоремы Фубини возможно, поскольку $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x)||g(x)|dzdx = = \int |f(z)|dz \cdot \int |g(x)|dx < \infty$. □

Примеры.

Пусть $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тогда $(\hat{f})'(z) = \widehat{-ixf(x)}(z) = \widehat{if'} = i \cdot iz\hat{f}(z) = = -z\hat{f}(z)$. Получаем дифференциальное уравнение: $(\hat{f})'(z) = -z\hat{f}(z)$. Общее решение $\hat{f}(z) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. Константа C определяется из условия $\hat{f}(0) = C$. Но $\hat{f}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Поэтому $\hat{f}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$.

Замечание. $S \subset \mathcal{L}_1$.

Теорема 9.7. *$\forall \varphi \in S \ \ \hat{\varphi} \in S$ и отображение $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ непрерывно.*

Доказательство. Проверим, что $\forall\, n, k \quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|^{2k}) \cdot |\hat{\varphi}^{(n)}(x)| < \infty$. $(1 + x^{2k})(\widehat{-iz)^n\varphi}(z)(x) + ((\widehat{-iz)^n\varphi})^{2k}(x) \cdot (-i)^{2k}$. Оценивая по модулю это выражение, получаем требуемое. □

Теорема 9.8. *$\varphi \in S \Rightarrow \forall\, P,\ \forall\, m = 0, 1, 2, \ldots \quad P(x)\varphi^m(x) \in S$, где P — многочлен.*

Теорема 9.9. *Если $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} 0$, то $P\varphi_n^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{S} 0$.*

Теорема 9.10. *$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} 0 \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}_1} 0$.*

Доказательство. $\varphi_n(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1 + x^2)\varphi_n(x)$.

$|\varphi_n(x)| = \left|\frac{1}{1+x^2} \cdot (1 + x^2)\varphi_n(x)\right| \leqslant \|\varphi\| \cdot \frac{1}{1+x^2}$. $\|\varphi_n\|_{\mathcal{L}_1} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x)|dx =$ $= \|\varphi_n\|_{2,0} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}\right) \leqslant C\|\varphi_n\|_{2,0}$. □

Замечание. Из этой теоремы следует, что отображение $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ непрерывно.

Теорема 9.11. *Пусть $\Lambda\colon S \to S$ — преобразование Фурье. Тогда*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,z)}\hat{\varphi}(z)dz.$$

Доказательство. Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\frac{x}{a})\hat{\psi}(x)dx = a\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\hat{\psi}(ay)dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y)\hat{\psi}(\frac{x}{a})(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x)\psi(\frac{x}{a})dx.$$

При $a \to \infty$ получаем $\varphi(0)\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(x)dx = \psi(0)\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x)dx$.

Если $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, то $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x)dx = \varphi(0)\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \varphi(0)\sqrt{2\pi}$. Отсюда $\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x)dx$. Положим $\varphi_1(x) = \varphi(x + z)$, тогда $\varphi_1 \in S$. $\varphi(z) = \varphi_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_1(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi(x_1 + z)}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{izx}\hat{\varphi}(x)dx$. □

Обозначим $\check{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{izx}\varphi(x)dx$.

Предложение 9.1. *Если* $\varphi \in S$*, то* $\check{\varphi} \in S$*.*

Предложение 9.2. Λ *— сюръекция.*

Доказательство. $\varphi \in S \Rightarrow \check{\varphi} \in S$. $\check{\hat{\varphi}} = \varphi \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Im} \Lambda$. □

10. Преобразование Фурье обобщенных функций.

Определение 10.1. *Преобразованием Фурье для* $F \in S^*$ называется обобщенная функция $\hat{F} : (\hat{F}, \varphi) = (F, \hat{\varphi})$.

Предложение 10.1. $\hat{F}$ *непрерывно на* S*.*

Доказательство. Пусть $\varphi_n \to \varphi$, проверим, что $(\hat{F}, \varphi_n) \to (\hat{F}, \varphi)$.
$(\hat{F}, \varphi_n) = (F, \widehat{\varphi_n}) \to (F, \hat{\varphi}) = (\hat{F}, \varphi)$. □

Лекция 16.

Определение 10.2. *Преобразованием Фурье функции* $F \in D^*$ называется обобщенная функция $\hat{F}$, такая, что $(\hat{F}, \varphi) = (F, \hat{\varphi})$. Здесь $\varphi \in \mathcal{Z} = \hat{D}$ и $\hat{\varphi} \in D$. Т.е., $\hat{\mathcal{Z}} = \check{\mathcal{Z}} = D$ и $\hat{F} \in \mathcal{Z}^*$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$$(F, \varphi) = F(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x)\varphi(x)\, dx.$$

Если же $g \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$, то положим

$$(F_g, \varphi) = F_g(\varphi) = (g, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)\varphi(x)\, dx.$$

Определение 10.3. *Регуляризацией функции* g (или обобщенной функции F_g) называется продолжение F_g на все пространство D с сохранением непрерывности.

Замечание. Продолжение вовсе не обязано быть единственным!

Упражнение 14. Докажите, то регуляризации функции $g(x) = x^{-n}$ образуют подпространство размерности n в D^*.

Упражнение 15. Обозначим через D_0^k множество функций из D, которые равны 0 вместе со всеми своими производными порядка не больше k на некотором интервале $(-\varepsilon;\varepsilon)$. Пусть также $g(x)=x^{-n}$. Докажите, что

1. Обобщенная функция F_g непрерывна на $D_0=D_0^0$.
2. Обобщенная функция F_g однозначно продолжается на D_0^{n-1}.
3. $\exists\, K : K\oplus D_0^{n-1}=D$ и $\dim K=n$.

Теорема 10.1. *Пусть $F\in D^*$. Тогда выполняются следующие свойства:*

1. $\hat{F}'=-\widehat{izF(z)}$.
2. $\widehat{F'}=ix\hat{F}$.

Доказательство. В самом деле,

$$(\hat{F}',\varphi)=-(\hat{F},\varphi')=-(F,\widehat{\varphi'})=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}F(z)(iz\hat{\varphi}(z))\,dz=$$
$$=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}izF(z)\hat{\varphi}(z)\,dz=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\widehat{izF(z)}(x)\varphi(x)\,dx=(-\widehat{izF(z)},\varphi),$$

а также

$$(\widehat{F'},\varphi)=(F',\hat{\varphi})=-(F,\hat{\varphi}')=-(F,-\widehat{ix\varphi(x)})=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\hat{F}(x)(-ix\varphi(x))\,dx=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^1}ix\hat{F}(x)\varphi(x)\,dx=(ix\hat{F}(x),\varphi).$$

□

Предложение 10.2. *Если $F\in D^*$ и F обладает компактным носителем, то $\hat{F}(z)=(F,[x\mapsto e^{-ixz}])$.*

Строгое доказательство мы дадим позже, а пока что приведем правдоподобное рассуждение, позволяющее обосновать это предложение. А именно, $\forall\,\varphi\in D$ $(\hat{F},\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}\hat{F}(z)\varphi(z)\,dz=\int\limits_{\mathbb{R}^1}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^1}F(x)e^{-ixz}\,dx\Big)\varphi(z)\,dz$; с другой стороны, $(\hat{F},\varphi)=(F,\hat{\varphi})=\int\limits_{\mathbb{R}^1}F(x)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{-ixz}\varphi(z)\,dz\Big)\,dx$. Если бы речь шла об обычных функциях, то правые части этих равенств были бы равны в силу теоремы Фубини. Однако для обобщенных функций, формально говоря, применять эту теорему нельзя. Поэтому это рассуждение не может считаться строгим доказательством.

Приложение.
Экзаменационные вопросы.

1. Равносильность счетной компактности и секвенциальной компактности для подмножеств метрических пространств.
2. Доказательство того, что всякое секвенциально компактное подмножество метрического пространства полно и предкомпактно.
3. Доказательство того, что всякое компактное подмножество метрического пространства секвенциально компактно.
4. Доказательство того, что всякое полное предкомпактное подмножество метрического пространства компактно.
5. Теорема о вложенных шарах.
6. Теорема Бэра.
7. Теорема о пополнении метрического пространства.
8. Равносильность непрерывности и ограниченности для отображений метрических пространств.
9. Доказательство того, что непрерывный образ компактного множества является компактным множеством.
10. Доказательство того, что непрерывное отображение компактного метрического пространства в метрическое пространство равномерно непрерывно.
11. Теорема Банаха–Штейнхауза.
12. Теорема Хана–Банаха для линейных функционалов на линейных пространствах.
13. Теорема Хана–Банаха для линейных функционалов на линейных нормированных пространствах (над полем вещественных чисел).
14. Сохранение нормы при каноническом вложении нормированного линейного пространства в его второе сопряженное.
15. Теорема о пополнении нормированного линейного пространства.
16. Полнота нормированного линейного пространства линейных непрерывных отображений нормированного линейного пространства в банахово пространство.
17. Теорема Банаха о гомоморфизме.
18. Равносильность теорем Банаха об обратном отображении и о замкнутом графике.
19. Теорема Банаха о замкнутом графике.
20. Теорема Рисса–Фишера.
21. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве.
22. Лемма о трех гомоморфизмах.

23. Всякий линейный функционал, непрерывный в слабой топологии, является элементом пространства, задающего слабую топологию.
24. Ограниченность слабо сходящейся последовательности в нормированном пространстве.
25. Для выпуклых множеств в нормированном пространстве замкнутость в слабой топологии и в топологии, определяемой нормой, равносильны.
26. Для подмножеств нормированного линейного пространства ограниченность по норме и слабая ограниченность равносильны.
27. Неравенство Бесселя.
28. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
29. Если A — линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, то $\|A\| = \|A^*\|$.
30. Для счетной ортонормированной системы векторов в евклидовом пространстве тотальность, замкнутость и свойство быть базисом равносильны и каждое из этих свойств влечет полноту ортонормированной системы.
31. Пространства $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$. Плотность образов при вложениях $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.
32. непрерывность преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}$. Формула обращения для преобразования Фурье в пространстве $\mathcal{S}$.
33. Вложение локально интегрируемых функций и локально конечных мер в пространство $\mathcal{D}^*$.
34. Операции над обобщенными функциями. Связь дифференцирования и преобразования Фурье.
35. Прямые и обратные образы обобщенных функций при отображениях пространств.
36. Преобразование Фурье интегрируемых функций.
37. Теорема Хана–Банаха для отображения комплексных пространств.
38. Теорема о существовании ортогональной проекции.