МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Курс лекций по функциональному анализу

Лектор — Валерий Валентинович Рыжиков

III курс, 5 семестр, поток математиков

Москва, 2004 г.

Оглавление

Введение

Предисловие

Убедительная просьба ко всем читателям: в случае обнаружения ошибок немедленно сообщайте автору на `dmvn@mccme.ru` или загляните на `http://dmvn.mexmat.net` и посмотрите, где можно достать в настоящее время самого автора. Все пожелания и предложения по поводу оформления и содержания документа будут обязательно приняты к сведению.

Комментарии к тексту набраны мелким шрифтом с пометкой вида

Примечание: Замечания по поводу...

Как правило, такие примечания указывают на дырки и непонятности в рассуждениях лектора. Следовательно, к тексту в окрестности таких пометок нужно относиться очень осторожно и внимательно его читать.

В этой редакции не хватает одного вопроса: теорем Фредгольма. Читайте по КФ.

Последнее обновление: 16 февраля 2006 года.

Слова благодарности

За некоторые замеченные опечатки благодарность выносится Виктору Осокину, Анастасии Абрашитовой и Дарье Ярцевой.

Принятые в тексте соглашения и используемые сокращения

1° Следуя [3], топологические понятия обозначаются сокращениями соответствующих английских слов. Так, $\mathrm{Int}\,A$ — множество внутренних точек множества A, $\mathrm{Cl}\,A$ — замыкание множества A.

2° Следуя [1], пространства интегрируемых в p-й степени функций обозначаются L^p.

3° Индикатор множества A обозначается через $\mathbb{I}_A$.

Литература

[1] В. И. Богачёв. *Основы теории меры.* — Москва — Ижевск: RCD, 2003.

[2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* — М.: Наука, 1981.

[3] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. *Начальный курс топологии.* — М.: Наука, 1977.

1. Элементарное введение

1.1. Основные понятия

1.1.1. Нормированные и метрические пространства

Определение. *Нормированным пространством* называется линейное (векторное) пространство X над полем K, в котором задана функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$, называемая нормой и удовлетворяющая следующим свойствам:

1° Для $\forall\, x, y \in X$ имеем $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника.
2° Для $\forall\, x \in X,\ \forall\, \alpha \in K$ имеем $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ — однородность.
3° Для $\forall\, x \in X$ из $\|x\| = 0$ следует $x = 0$.

Как следует из определения, поле K должно быть снабжено своей нормой. Мы будем рассматривать случаи $K = \mathbb{R}$ и $K = \mathbb{C}$.

Определение. *Метрическим пространством* называется множество M, в котором задана функция $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая свойствам:

1° Для $\forall\, x, y, z \in M$ имеем $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ — неравенство треугольника.
2° Для $\forall\, x, y \in M$ имеем $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — симметричность.
3° Для $\forall\, x, y \in M$ из $\rho(x, y) = 0$ следует $x = y$.

Если $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, то норма в нём задаёт некоторую метрику: положим $\rho(x, y) := \|x - y\|$. Выполнение всех свойств метрики очевидным образом следует из аксиом нормы. Отметим, что такая метрика является трансляционно-инвариантной, то есть $\forall\, x, y, z \in X$ имеем $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$, или, проще говоря, расстояние между точками сохраняется при параллельных переносах.

Определение. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\colon \forall\, n, m \geqslant N$ имеем $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ *сходится* к $x \in X$, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение. Пространство называется *полным*, если в нём любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Определение. *Банаховым пространством* называется полное нормированное пространство.

Пример 1.1. Пространство $L_p(X, \mu) = \big\{ f\colon \int |f|^p d\mu < \infty \big\}$, $p \in [1, +\infty)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\| := \left(\int\limits_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Здесь мы, конечно, должны сделать небольшую поправку. Чтобы все свойства нормы были выполнены, нужно рассматривать не само множество функций с интегрируемой p-ой степенью, а факторпространство ${}^{X}\!/_{\sim}$, в котором $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$. В противном случае не будет выполнено свойство **3°** нормы.

Пример 1.2. Пространство $\ell_p = L_p(\mathbb{N}, \#)$, где $\#$ — мера, задаваемая как мощность множества. Иначе говоря, это пространство последовательностей $x = \{x_n\}$ с нормой

$$\|x\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}. \tag{2}$$

Теорема 1.1. *Пространство ℓ_1 является полным пространством.*

□ Мы будем писать индексы элементов пространства сверху. Фиксируем фундаментальную последовательность $\{x^n\} \subset \ell_1$. Фиксируем $i \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательность $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$. Она, очевидно, является фундаментальной, поэтому в силу критерия Коши для числовых последовательностей она сходится к некоторому числу x_i. Положим $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Запишем теперь условие Коши для исходной последовательности: $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\colon \forall\, n, m \geqslant N$ имеем $\|x^n - x^m\| < \varepsilon$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и фиксированном m, получим $\|x - x^m\| \leqslant \varepsilon$, но это и означает, что $x^m \to x$. ■

Примечание: Мы не обосновали, почему, собственно говоря, $x \in \ell_1$, но это несложно доказывается. Достаточно выбрать достаточно близкие к x_i элементы исходных последовательностей.

Определение. Норма в пространстве $\mathbf{C}[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций обычно задаётся так:

$$\|f\| := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{3}$$

Эта норма называется *равномерной*, или *чебышёвской*.

Теорема 1.2. *Пространство* $\mathbf{C}[a,b]$ *полно по равномерной норме.*

$\square$ Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность функций. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n, m > N$ имеем $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Отсюда сразу получаем, что $\forall x \in [a,b]$ имеем $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Следовательно, при каждом фиксированном $x \in [a,b]$ существует предел $\lim\limits_n f_n(x) =: f(x)$. Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Для этого достаточно перейти к пределу в неравенстве при $n \to \infty$, тогда получим $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall m > N$ имеем $\|f - f_m\| \leqslant \varepsilon$. Это в точности означает равномерную сходимость. Но равномерный предел непрерывных функций непрерывен, поэтому $f \in \mathbf{C}[a,b]$. $\blacksquare$

1.1.2. Полные метрические пространства

Определение. Пусть (M,ρ) — метрическое пространство. *Шаром* (открытым) называется множество

$$B(x,r) := \{y \in M\colon \rho(x,y) < r\}\,. \tag{4}$$

Если неравенство нестрогое, то шар называется замкнутым.

Примечание: Определения топологии на лекции не было. Не было сказано и то, что открытый шар является открытым множеством в топологическом смысле, и аналогично про замкнутый. Доказательства этих фактов несложные, но всё это надо помнить.

Теорема 1.3 (Бэра о вложенных шарах). *Пусть* (M,ρ) *— полное метрическое пространство. Пусть* $\big\{\widetilde{B}_i(x_i, r_i)\big\}$ *— последовательность вложенных замкнутых шаров, причём* $r_i \to 0$*. Тогда* $\exists!\, x \in \bigcap \widetilde{B}_i$.

$\square$ Поскольку $r_i \to 0$, а $\widetilde{B}_i \supset \widetilde{B}_{i+1}$, последовательность $\{x_i\}$ будет фундаментальной и потому сходится к некоторому $x \in M$ в силу полноты пространства. Покажем, что x является искомой точкой. Действительно, если бы нашёлся шар $\widetilde{B}_{i_0}$ такой, что $x \notin \widetilde{B}_{i_0}$, тогда бы точка x не лежала бы ни в одном из шаров, начиная с номера i_0. Но поскольку дополнение к $\widetilde{B}_{i_0}$ открыто, x можно отделить окрестностью от всех шаров, начиная с номера i_0. Это противоречит тому, что x — предел последовательности центров шаров.

Покажем единственность такой точки. В самом деле, если бы их было две, то расстояние между ними было бы ненулевое. Но это противоречит условию $r_i \to 0$. $\blacksquare$

Пусть (M,ρ) — метрическое пространство.

Определение. Множество $Y \subset M$ называется *нигде не плотным в* M, если всякий шар $B \subset M$ ненулевого радиуса содержит другой шар B' ненулевого радиуса такой, что $Y \cap B' = \varnothing$.

Определение. Множество $Y \subset M$ называется *всюду плотным в* M, если $\mathrm{Cl}\, Y = M$.

Определение. Множество Y называется *множеством первой категории*, если оно может быть представлено как счётное объединение нигде не плотных множеств.

Теорема 1.4 (Бэра о категориях). *Полное метрическое пространство не может быть множеством первой категории.*

$\square$ Пусть M — наше метрическое пространство. Допустим, что $M = \bigcup Y_i$, причём Y_i нигде не плотны. Рассмотрим множество Y_1, тогда найдётся замкнутый шар $\widetilde{B}_1$, для которого $\widetilde{B}_1 \cap Y_1 = \varnothing$. Рассмотрим множество Y_2 и возьмём $\widetilde{B}_2 \subset \widetilde{B}_1$ так, чтобы $\widetilde{B}_2 \cap Y_2 = \varnothing$. Продолжим этот процесс, получим последовательность замкнутых шаров $\left\{\widetilde{B}_i\right\}$. По теореме о вложенных шарах найдётся $x \in \bigcap \widetilde{B}_i$, но это означает, что x не лежит ни в одном из Y_i. $\blacksquare$

Теорема 1.5. *Множество непрерывных функций на отрезке* $[0,1]$*, имеющих конечную производную хоть в одной точке, образуют множество первой категории в* $\mathbf{C}[0,1]$.

$\square$ Назовём функцию хорошей, если она дифференцируема хотя бы в одной точке. Мы будем рассматривать полуинтервал $[0,1)$, а не отрезок $[0,1]$, то есть исключим пока из рассмотрения точку $x = 1$. Ясно, что множество хороших функций, дифференцируемых в единице, ещё более дырявое, чем множество хороших функций, дифференцируемых где-то на $[0,1)$, поэтому его можно не рассматривать. Рассмотрим функцию f, и пусть существует $f'(x)$ для некоторого $x \in [0,1)$. Это означает, что $\exists n \in \mathbb{N}\colon |f(x+t) - f(x)| \leqslant nt$ для всякого $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$. В самом деле, из определения производной во всяком случае следует, что найдётся δ, такое, что при $|t| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| \leqslant 2|f'(x)| + 1. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим множества

$$Y_n := \left\{ f \in \mathbf{C}[0,1] \;\Big|\; \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] :\ \forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \text{ имеем } |f(x+t) - f(x)| \leqslant nt \right\}. \tag{6}$$

Итак, все функции, которые дифференцируемы в точках из $[0,1)$, попадут в множество $\bigcup Y_n$.

Лемма 1.6. *Множество Y_n замкнуто в $\mathbf{C}[0,1]$.*

$\square$ В самом деле, покажем, что если $f_k \rightrightarrows f$, и $\{f_k\} \subset Y_n$, то $f \in Y_n$. Для каждой функции f_k имеем $\exists\, x_k \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] : \forall\, t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ имеем $|f(x_k+t) - f(x_k)| \leqslant nt$. Покажем, что $\exists\, x \in [0,1)$, для которого $\forall\, t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ имеем $|f(x+t) - f(x)| \leqslant nt$. Рассмотрим в качестве этого x произвольную предельную точку последовательности $\{x_k\}$ и оставим от всей последовательности только ту подпоследовательность, которая сходится к точке x.

Через $a \mp b$ будем обозначать выражение $a - b + b$ (вычли и тут же прибавили). Имеем

$$|f(x+t) - f(x)| = |f(x+t) \mp f(x_k+t) \mp f_k(x_k+t) \mp f_k(x_k) \mp f(x_k) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + nt + \varepsilon + \varepsilon.$$

Разберёмся, откуда вылезло столько ε: первый — из равномерной непрерывности f на отрезке $[0,1]$, второй — из равномерной сходимости; третье слагаемое — из определения x_k, предпоследнее — из равномерной сходимости; последнее — из непрерывности f. Таким образом, лемма доказана. $\blacksquare$

Лемма 1.7. *Пусть замкнутое множество не содержит ни одного шара положительного радиуса. Тогда оно нигде не плотно.*

$\square$ Если M не является нигде не плотным, то найдётся шар B положительного радиуса такой, что для всякого шара $B' \subset B$ имеем $M \cap B' \neq \varnothing$. Это означает, что M всюду плотно в B, но тогда $B \subset M$, ибо M замкнуто (оно содержит все свои предельные точки). $\blacksquare$

Лемма 1.8. *Всякое множество Y_n не содержит ни одного шара положительного радиуса.*

$\square$ Покажем, что для $\forall\, f \in Y_n$ найдётся $g \in \mathbf{C}[0,1]$, для которой $\|f - g\| < \varepsilon$, но $g \notin Y_n$. Действительно, приблизим нашу непрерывную функцию кусочно-линейной, выберем максимум среди всех значений её производной, а затем возьмём «пилу» с зубьями малой высоты, у которой наклон зубьев в 100 раз больше, чем этот максимум, и в 10 раз больше, чем n, да прибавим к функции f. Это и будет наша функция g, поскольку её производная там, где она есть, всегда будет принимать значения, большие, чем n. Значит, она не лежит в Y_n. $\blacksquare$

Применим последовательно все эти леммы и получим доказательство теоремы. $\blacksquare$

Следствие 1.1. *В пространстве $\mathbf{C}[0,1]$ существует нигде не дифференцируемая функция.*

$\square$ Это пространство полно, поэтому оно не является множеством первой категории. А мы только что доказали, что совокупность хороших функций есть множество первой категории. Значит, в $\mathbf{C}[0,1]$ есть ещё какие-то функции — они и будут нигде не дифференцируемыми. $\blacksquare$

Определение. Пусть (M,ρ) — метрическое пространство. Отображение $\Phi\colon M \to M$ называется *сжимающим* с коэффициентом $\alpha \in [0,1)$, если $\forall\, x, y \in M$ имеем $\rho(\Phi x, \Phi y) \leqslant \alpha\rho(x,y)$.

Теорема 1.9 (О сжимающих отображениях). *Пусть (M,ρ) — полное метрическое пространство. Пусть Φ — сжимающее отображение. Тогда у него существует единственная неподвижная точка.*

$\square$ Единственность такой точки сразу следует из определения сжимающего отображения: если бы их было две, тогда расстояние между их образами сохранилось бы, что невозможно. Докажем существование: рассмотрим произвольную точку $y \in M$ и рассмотрим итерации нашего отображения:

$$y,\ \Phi y,\ \Phi(\Phi y) = \Phi^2 y,\ \Phi^3 y,\ \ldots \tag{7}$$

Положим $y_k = \Phi^k y$. Последовательность $\{y_k\}$, очевидно, фундаментальна. В самом деле,

$$\rho(y_k, y_{k+1}) \leqslant \alpha^k \rho(y, y_1), \tag{8}$$

поэтому

$$\rho(y_n, y_m) \leqslant \rho(y_m, y_{m+1}) + \rho(y_{m+1}, y_{m+2}) + \ldots + \rho(y_{n-1}, y_n) = (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^n)\rho(y, y_1), \tag{9}$$

а последнее выражение можно сделать маленьким как остаток сходящегося ряда для геометрической прогрессии. В силу полноты пространства, она сходится к некоторому пределу $x \in M$. Покажем, что это и есть та самая неподвижная точка. Отображение Φ, очевидно, является непрерывным, поскольку близкие точки переходят в близкие. По свойствам непрерывных отображений имеем $\Phi y_k \to \Phi x$, если $y_k \to x$. Поэтому, если $\Phi^k y \to x$, то и $\Phi\big(\Phi^k y\big) \to \Phi(x)$. Но последовательности $\big\{\Phi^k y\big\}$ и $\big\{\Phi\big(\Phi^k y\big)\big\}$ совпадают с точностью до первого члена, поэтому их пределы одинаковы. Следовательно, $x = \Phi x$, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Пример 1.3. Рассмотрим отображения

$$\begin{array}{ll} \Phi_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \Phi_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \Phi_0\colon x \mapsto \frac{1}{3}x, & \Phi_1\colon x \mapsto \frac{1}{3}(x-1) + 1. \end{array} \tag{10}$$

Пусть M — все компакты в $\mathbb{R}$. На M можно задать естественную метрику $\widetilde{\rho}$, по которой оно будет полным метрическим пространством. Рассмотрим отображение $\Psi\colon K \mapsto \Phi_1 K \cup \Phi_2 K$. Оно будет иметь единственную неподвижную точку, поскольку, очевидно, является сжимающим.

Теорема 1.10 (О пополнении). *Каждое метрическое пространство изометрично вкладывается в полное. Более точно, если (M,ρ) — метрическое пространство, то существует полное метрическое пространство $(\overline{M},\overline{\rho})$ и инъективное отображение $\varphi\colon M \to \overline{M}$ такое, что $\forall\, x,y \in M$ имеем $\rho(x,y) = \overline{\rho}\big(\varphi(x),\varphi(y)\big)$.*

□ Мы приведём здесь только основную идею доказательства. Пусть N — множество всех фундаментальных последовательностей элементов из пространства M. Введём на N отношение эквивалентности: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $\lim \rho(x_i, y_i) = 0$. Положим $\overline{M} = {}^{N}\!/\!_{\sim}$, а метрику зададим так: $\overline{\rho}(x,y) := \lim \rho(x_i,y_i)$. Совершенно очевидно, что вложение $M \hookrightarrow \overline{M}$ строится так: отображаем элемент $x \in M$ в класс эквивалентности, в котором есть стационарная последовательность $\{x_i\} \in \overline{M}$, где $x_i = x$. Остаётся доказать то, что $\overline{\rho}$ является метрикой (что, впрочем, совсем несложно проверяется), и, что противнее, полноту этого пространства. ■

2. Нормированные пространства

2.1. Операторы в нормированных пространствах

2.1.1. Определение и свойства операторов

Определение. Пусть X и Y — нормированные пространства. *Оператором* мы будем называть произвольное линейное отображение $A\colon X \to Y$, а *линейным функционалом* — линейное отображение $\varphi\colon X \to K$ (частный случай оператора).

Определение. *Нормой* оператора A называется число $\|A\| := \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Оператор A называется *ограниченным*, если $\|A\| < \infty$.

Определение. Оператор A называется *непрерывным*, если из $\|x_i - x\| \to 0$ следует, что $\|Ax_i - Ax\| \to 0$. Иначе говоря, если $x_i \to x$ в X, то $Ax_i \to Ax$ в Y.

Тождественный оператор мы будем обозначать либо буквой E, либо символом id.

Лемма 2.1 (Свойства нормы оператора). *Имеют место следующие свойства:*

$$\|A\| = \sup_{0<\|x\|\leqslant 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad \|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|\,,$$
$$\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|\,, \quad \|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|\,, \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|\,.$$

□ Первые два равенства напрямую следуют из линейности норм пространств X и Y, а последние четыре свойства вытекают напрямую из определения нормы оператора. ■

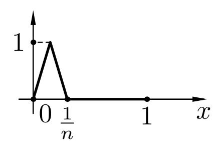
Следствие 2.1. *Множество ограниченных операторов образуют подалгебру в алгебре всех операторов. Эта алгебра является нормированным пространством.*

Теорема 2.2. *Непрерывность оператора равносильна его ограниченности.*

□ Пусть оператор A ограничен. В силу линейности имеем $Ax_i - Ax = A(x_i - x)$. Отсюда получаем $\|Ax_i - Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_i - x\|$, поэтому из ограниченности оператор следует его липшицевость (и тем более непрерывность).

Вместо того, чтобы выводить ограниченность из непрерывности, докажем, что из неограниченности следует разрывность. Это согласуется с логическим правилом $(A \to B) \Leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$. Пусть $\|A\| = \infty$, тогда, используя определение нормы оператора, можно выбрать последовательность $\{x_i\}$, для которой $\|x_i\| = 1$, но $\|Ax_i\| \to \infty$. Рассмотрим другую последовательность $y_i := \frac{x_i}{\|Ax_i\|}$. Тогда $\|y_i\| \to 0$, но $\|Ay_i\| = 1 \nrightarrow 0$, поэтому A не может быть непрерывным. ■

При рассмотрении операторов возникает естественный вопрос: а существуют ли неограниченные операторы? Для неполных пространств примеры таких операторов строятся совсем легко. Возьмём, например, в качестве X пространство $\mathbf{C}[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|_{L_1}$, а в качестве Y — то же пространство с равномерной нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{C}}$. Рассмотрим тождественный оператор на функциях f_n вида



Понятно, что равномерная норма каждой функции f_n равна 1, а нормы этих функций в смысле L_1 стремятся к нулю с ростом n. Поэтому оператор не будет непрерывным.

2.1.2. Базис Гамеля

Определение. *Базис Гамеля* — такая система векторов $\mathcal{B} \subset X$, что всякий вектор $x \in X$ единственным образом представляется в виде конечной линейной комбинации векторов из $\mathcal{B}$.

Теорема 2.3. *Всякое линейное пространство X обладает базисом Гамеля.*

Примечание: При доказательстве мы будем использовать лемму Цорна. О том, что это такое, см. ниже в том разделе, где доказывается теорема Хана – Банаха. Доказательство придумал я сам, поэтому возможна лажа.

□ В основе доказательства будет лежать следующая идея: возьмём какой-нибудь ненулевой вектор $x_1 \in X$ и рассмотрим $X_1 := \langle x_1 \rangle$. Если $X \neq X_1$, то найдётся ещё вектор $x_2 \notin X_1$. Положим $X_2 := \langle X_1, x_2 \rangle$, тогда $X_1 \subset X_2$. Если и на этом шаге нам не повезло, и вновь $X_2 \neq X$, то найдём третий вектор, и так далее. Так мы описали процесс расширения конечномерного подпространства.

Формализуем это построение с использованием леммы Цорна. Система векторов называется линейно независимой, если любая конечная подсистема в ней линейно независима. Пусть $(L, \{e_i\})$ — подпространство с базисом $\{e_i\}$, а $(M, \{f_j\})$ — подпространство с базисом $\{f_j\}$. Будем говорить, что $L \prec M$, если $\{e_i\} \subset \{f_j\}$. Рассмотрим множество всех расширений, получается, что мы ввели на нём частичное упорядочение. Пусть $(M_\alpha, \{e_i\}_\alpha)$ — цепь расширений. Очевидно, что расширение

$$\Big(\bigcup M_\alpha, \bigcup \{e_i\}_\alpha\Big)$$

является верхней гранью этой цепи. По лемме Цорна в нашем множестве найдётся максимальный элемент $(S, \{e_i\})$. Ясно, что $S = X$, поскольку если бы это было не так, то можно было бы расширить S на вектор из X, которого ещё нет в линейной оболочке базиса S. Но тогда $\{e_i\}$ — базис X, что и требовалось доказать. ■

Если верить в лемму Цорна, то с помощью этой теоремы можно легко построить пример неограниченного оператора в любом бесконечномерном пространстве. Пусть Γ — базис Гамеля пространства X. Выберем счётное подмножество среди базисных элементов и занумеруем их, получим набор $\{\gamma_i\}$. Зададим действие оператора на базисных векторах: положим $A\gamma_i = i\gamma_i$, а для всех остальных базисных векторов $e \in \Gamma \setminus \{\gamma_i\}$ положим $Ae = 0$. Тем самым мы задали действие оператора на всех векторах пространства X, ибо всякий вектор единственным образом разлагается по нашему базису. Поэтому, если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$, то $Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i A e_i$ и тем самым оно однозначно определено. Вместе с этим ясно, что оператор A неограничен, поскольку для всякого $M > 0$ найдётся вектор, который растягивается этим оператором больше, чем в M раз.

2.2. Важнейшие теоремы функционального анализа

2.2.1. Принцип равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза

Теорема 2.4 (Принцип равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза). *Пусть X — банахово, а Y — нормированное пространство. Пусть $A_i \colon X \to Y$ — семейство ограниченных операторов. Пусть для всякого $x \in X$ существует число $C_x > 0$ такое, что для $\forall\, i$ имеем $\|A_i x\| \leqslant C_x$. Тогда найдётся такое $C > 0$, что $\|A_i\| \leqslant C$ для всех i.*

□ Рассмотрим семейство множеств

$$X_n := \{x \in X \colon \ \forall\, i \text{ имеем } \|A_i x\| \leqslant n\}.$$

Очевидно, что $X = \bigcup X_n$. Поскольку X не есть множество первой категории, найдётся X_N такое, что оно не является нигде не плотным в X. Значит, есть шар, где оно всюду плотно.

Покажем, что все множества X_n замкнуты. Для этого докажем, что дополнения к ним открыты. Пусть $x \notin X_n$. Значит, $\exists\, k$, для которого $\|A_k x\| \geqslant n + 2\varepsilon$. Пусть $v \in X$. Если $\|v\| \leqslant \frac{\|A_k x\| - (n+\varepsilon)}{\|A_k\|}$, то

$$\|A_k(x+v)\| = \|A_k x + A_k v\| \geqslant \|A_k x\| - \frac{\|A_k\| \big(\|A_k x\| - (n+\varepsilon)\big)}{\|A_k\|} = n + \varepsilon > n, \tag{1}$$

то есть $(x+v) \notin X_n$.

По лемме 1.7, множество X_N содержит некоторый шар B. Достаточно установить равномерную ограниченность операторов на некотором шаре, содержащем начало координат. Пусть $\widetilde{B}$ — копия шара B с центром в начале координат. Каждый вектор $v \in \widetilde{B}$ можно представить как $w_1 - w_2$, где $w_i \in B$. По неравенству треугольника и определению множества X_N для всех i получаем $\|A_i v\| = \|A_i w_1 - A_i w_2\| \leqslant N + N = 2N$. Но это и означает равномерную ограниченность. ■

Замечание. В этой теореме множество операторов может иметь какую угодно мощность. Иначе говоря, все индексы операторов — это не натуральные числа, а элементы произвольного индексного множества.

Замечание. Покажем, что нельзя опустить требование банаховости пространств. Пусть X — пространство финитных последовательностей, а $Y = \ell_p$. Определим семейство операторов так:

$$A_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots) := (0, 0, \ldots, 0, ix_i, 0, \ldots). \tag{2}$$

Ясно, что для каждой финитной последовательности x найдётся нужная константа C_x, ибо $A_i x = 0$ при достаточно больших i (если последовательность финитна, то она имеет вид $(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$, поэтому достаточно будет взять $i > N$), но, с другой стороны, $\|A_i\| = i \to \infty$ при $i \to \infty$.

2.2.2. Теорема Банаха об обратном операторе

Заметим, что если оператор $A\colon X \to Y$ обладает тем свойством, что $\operatorname{Im} A = Y$, а $\operatorname{Ker} A = 0$, то A биективен и потому существует обратное отображение $A^{-1}\colon Y \to X$.

Лемма 2.5. *Пусть $A\colon X \to Y$ — линейная биекция банаховых пространств. Положим*

$$Y_k := \left\{ y \in Y\colon \left\|A^{-1}y\right\| \leqslant k \left\|y\right\| \right\}. \tag{3}$$

Тогда существует такое Y_N, что $\operatorname{Cl} Y_N = Y$.

□ Поскольку Y — полное пространство, по теореме Бэра существует Y_M, плотное в некотором шаре B. Обозначим через P пересечение некоторого шарового слоя с центром в точке $y_0 \in Y_M$, целиком лежащего в шаре B, с множеством Y_M. Рассмотрим копию $\widetilde{P}$ множества P, сдвинутую в начало координат. Всякий вектор $v \in \widetilde{P}$ представляется в виде разности $y - y_0$, где $y \in P$. Имеем

$$\begin{aligned}\left\|A^{-1}v\right\| = \left\|A^{-1}(y - y_0)\right\| \leqslant \left\|A^{-1}y\right\| + \left\|A^{-1}y_0\right\| \leqslant M\big(\|y\| + \|y_0\|\big) = \\ = M\big(\|y - y_0 + y_0\| + \|y_0\|\big) \leqslant M\big(\|y - y_0\| + 2\|y_0\|\big) = M\|y - y_0\| \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\|y - y_0\|}\right).\end{aligned}$$

Заметим, что последний множитель может быть ограничен сверху некоторой константой C, не зависящей ни от чего, поскольку число $\|y - y_0\|$ отделено от нуля. Беря в качестве $N := [CM] + 1$, получаем, что Y_N плотно в $\widetilde{P}$. Но поскольку в силу своего определения множество Y_N инвариантно относительно гомотетий, оно будет плотно и во всём пространстве. ■

Теорема 2.6 (Банаха об обратном операторе). *Пусть $A\colon X \to Y$ — линейная биекция банаховых пространств. Тогда обратное отображение $A^{-1}\colon Y \to X$ тоже будет ограниченным оператором.*

□ Линейность обратного отображения очевидна. Докажем ограниченность. Рассмотрим ненулевой вектор $y \in Y$. По предыдущей лемме существует всюду плотное в Y множество Y_N. Тогда существует $y_1 \in Y_N$, для которого $\|y - y_1\| \leqslant \frac{\|y\|}{2}$, причём $\|y_1\| \leqslant \|y\|$. Далее, существует $y_2 \in Y_N$, для которого $\|y - (y_1 + y_2)\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^2}$, причём $\|y_2\| \leqslant \frac{\|y\|}{2}$, и так далее. На n-м шаге существует $y_n \in Y_N$, для которого $\|y - (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^n}$, причём $\|y_n\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^{n-1}}$.

Рассмотрим $x_n := A^{-1}y_n$. По определению Y_N имеем $\|x_n\| \leqslant N\|y_n\| \leqslant N\frac{\|y\|}{2^{n-1}}$. Значит, в силу полноты пространства X и сходимости ряда $\sum \|x_n\|$ существует предел

$$x := \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} x_n. \tag{4}$$

Тогда

$$Ax = A\left(\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} x_n\right) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} Ax_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} y_n = y. \tag{5}$$

Отсюда $A^{-1}y = x$, поэтому

$$\begin{aligned}\left\|A^{-1}y\right\| = \|x\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| = \lim_{p\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{p} x_n\right\| = \lim_{p\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{p} A^{-1}y_n\right\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\|A^{-1}y_n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N\|y_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N\frac{\|y\|}{2^{n-1}} = 2N\|y\|.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор A^{-1} ограничен. ■

Покажем теперь, что для ограниченности полнота X и Y существенна. В качестве примера возьмем $X = \left(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1}\right)$, а $Y = \left(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2}\right)$. Оператор возьмём, как водится, тождественным. Очевидно, что

$$\sum_i |x_i|^2 \leqslant \left(\sum_i |x_i|\right)^2, \tag{6}$$

поэтому

$$\sqrt{\sum_i |x_i|^2} \leqslant \sum_i |x_i|. \tag{7}$$

Отсюда $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$. Рассмотрим последовательность

$$x^{(N)} = \Big(\underbrace{\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}}_{N}, 0, \ldots\Big). \tag{8}$$

Очевидно, $\left\|x^{(N)}\right\|_1 = 1$, а $\left\|x^{(N)}\right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{N}}$, поэтому оператор $\mathrm{id}\colon Y \to X$ не является ограниченным.

Как мы знаем, из теоремы о базисе Гамеля следует, что на всяком бесконечномерном пространстве существует неограниченный линейный оператор. Аналогично строится и неограниченный линейный функционал. Рассмотрим счётное подмножество $\{\gamma_i\}$ базиса Гамеля. Положим $\varphi(\gamma_i) = i\,\|\gamma_i\|$, а на всех остальных векторах базиса положим его равным нулю. Тогда возьмём какое-нибудь полное пространство X и оснастим его другой нормой $\|\cdot\| := \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_\varphi$, то есть положим $\|x\| := \|x\|_X + |\varphi(x)|$. Обозначим новое пространство через X_φ. Рассмотрим оператор $\mathrm{id}\colon X_\varphi \to X$. Его норма, очевидно, не превосходит 1, но обратный оператор не будет ограниченным, поскольку он увеличивает норму i-го вектора в $(1+i)$ раз.

Теорема 2.7 (Устойчивость обратимости оператора при малых возмущениях). *Пусть $A\colon X \to X$ — ограниченный обратимый оператор в банаховом пространстве. Тогда существует $C > 0$ такое, что для всякого оператора B с нормой $\|B\| \leqslant C$ оператор $A + B$ будет обратим.*

☐ Для начала докажем вспомогательное утверждение, полезное само по себе.

Лемма 2.8. *Если $A\colon X \to X$ — оператор в банаховом пространстве такой, что $\|A\| < 1$, то оператор $E - A$ обратим.*

☐ Покажем, что оператор

$$(E-A)^{-1} := \sum_{i=0}^{\infty} A^i \tag{9}$$

является искомым. Для начала объясним, как следует понимать операторный ряд и почему он сходится. Определим значение оператора

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \tag{10}$$

на векторе x следующим образом:

$$Px := \lim_{n\to\infty} S_n(x), \text{ где } S_n x := \sum_{i=0}^{n} A^i x. \tag{11}$$

Покажем, что последовательность частичных сумм этого ряда является фундаментальной последовательностью. В самом деле,

$$\|S_{n+l}x - S_n x\| = \left\|A^{n+1}x + \ldots + A^{n+l}x\right\| \leqslant \left\|A^{n+1}x\right\| + \ldots + \left\|A^{n+l}x\right\| \leqslant \|x\| \left(\|A\|^{n+1} + \ldots + \|A\|^{n+l}\right), \tag{12}$$

поэтому, если взять n достаточно большим, эту сумму можно сделать сколь угодно маленькой. В силу полноты пространства, эта последовательность сходится. Очевидно, что

$$\|Px\| \leqslant \|x\| \sum_{i=0}^{\infty} \|A\|^i, \tag{13}$$

поэтому оператор P ограничен. Из определения P выводим, что

$$P(E-A)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A^i (E-A)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(A^i x - A^{i+1}x\right) = \lim_{n\to\infty} \left(x - A^{n+1}x\right) = x. \tag{14}$$

Далее, поскольку оператор $E-A$ ограничен, знак предела можно перенести, и значит, $(E-A)Px = x$. Таким образом, оператор $E - A$ обратим. ■

Покажем теперь, что существенно требование обратимости. Возьмём оператор правого сдвига в пространстве ℓ_p. Он действует так:

$$Rx = R(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots). \tag{15}$$

Понятно, что $\|R\| = 1$. Очевидно, что левый обратный оператор существует — это левый сдвиг L, причём он тоже ограничен. Но правого обратного не существует, поскольку $\operatorname{Im} R \neq \ell_p$, значит, не для каждого вектора будет выполнено равенство $RLx = x$. Таким образом, из существования левого обратного не вытекает существование правого обратного. Меняя местами операторы R и L, получаем пример, когда есть правый обратный, но нет левого.

Ясно, что $A+B$ обратим тогда и только тогда, когда оператор $A^{-1}(A+B) = E+A^{-1}B$ обратим. Поскольку A ограничен, по теореме Банаха обо обратном операторе A^{-1} тоже ограничен. Поскольку $\left\|A^{-1}B\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|B\|$, в силу леммы достаточно взять $C = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. ■

Следствие 2.2. *Пусть A — обратимый ограниченный оператор в банаховом пространстве. Тогда $\exists C > 0$, для которого $\frac{\|x\|}{\|Ax\|} < C$, то есть ограниченный обратимый оператор не может как угодно сильно сжимать вектора.*

Следствие 2.3 (Достаточное условие необратимости оператора). *Если найдётся последовательность векторов $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой имеем $\|x_i\| = 1$, а $\|Ax_i\| \to 0$, то оператор A не может быть обратим.*

2.3. Спектр оператора и его свойства

2.3.1. Определение спектра и его простейшие свойства

Говоря о спектре операторов, мы всегда будем рассматривать только комплексные пространства.

Определение. Пусть A — оператор. *Спектром оператора* называется множество

$$\operatorname{Spec} A := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon\ A - \lambda E \text{ необратим}\}. \tag{16}$$

Основные свойства спектра ограниченного оператора можно сформулировать так: *спектр является непустым компактным подмножеством в* $\mathbb{C}$ (всё это мы аккуратно докажем).

Строго говоря, это утверждение не всегда верно. Пусть наше пространство состоит из одной точки $\{0\}$. В таком пространстве всякий оператор является нулевым и обратимым, поэтому имеет пустой спектр. Но это слишком вырожденный случай, чтобы его было интересно рассматривать.

Теорема 2.9. *Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве. Тогда* $\operatorname{Spec} A$ *является компактным множеством, и справедливо включение* $\operatorname{Spec} A \subset \{\lambda \colon\ |\lambda| \leqslant \|A\|\}$.

□ Рассмотрим оператор $A - \lambda E$. Если он обратим при $\lambda \neq 0$, то доказывать нечего — спектр состоит не более чем из одной точки, и включение, очевидно, выполнено. Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Очевидно, что оператор $A - \lambda E$ обратим тогда и только тогда, когда обратим $E - \frac{A}{\lambda}$. А это, в свою очередь, имеет место, как только $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$. Следовательно, при $|\lambda| > \|A\|$ имеем $\lambda \notin \operatorname{Spec} A$.

Осталось показать, что спектр замкнут. Это следует в точности из теоремы об устойчивости обратимости оператора при малых возмущениях: если оператор $A-\lambda_0 E$ обратим, то при добавлении к нему любого оператора λE достаточно малой нормы это свойство сохранится. Но это означает, что множество $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Spec} A$ открыто, поэтому $\operatorname{Spec} A$ замкнуто, что и требовалось доказать. ■

Теперь выясним, откуда берутся необратимые операторы. Посмотрим, когда оператор $A - \lambda E$ может быть необратим. Во-первых, может случиться так, что $\operatorname{Ker}(A - \lambda E) \neq 0$, и тогда причина необратимости в том, наш оператор не инъективен. Кроме того, $\operatorname{Im}(A-\lambda E)$ может не совпадать с исходным пространством, тогда обратное отображение $A^{-1} \colon X \to X$ не может быть корректно задано.

2.3.2. Пример нахождения спектра

Пример 3.1. Вычислим спектр оператора правого сдвига в ℓ_1. Рассмотрим

$$R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots). \tag{17}$$

Поищем собственные векторы: с собственным значением $\lambda = 0$ их, очевидно, нет, кроме нулевого. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда имеем цепочку равенств

$$\begin{cases} 0 = \lambda x_1, \\ x_1 = \lambda x_2, \\ x_2 = \lambda x_3, \\ \ldots \end{cases} \tag{18}$$

Поскольку $\lambda \neq 0$, решая первое уравнение, сразу получаем $x_1 = 0$. Отсюда $x_2 = 0$, и так далее. Значит, собственных векторов у этого оператора нет. Очевидно, $\|R\| = 1$, поскольку $\|Rx\| = \|x\|$. Следовательно, весь спектр содержится в круге радиуса 1. Покажем, что при $|\lambda| \leqslant 1$ оператор $R - \lambda E$ необратим, а именно, $e_1 \notin \operatorname{Im}(R - \lambda E)$. В самом деле, решим уравнение

$$(R - \lambda E)y = e_1 = (1, 0, 0, \ldots).$$

Имеем

$$\begin{cases} 1 = 0 - \lambda y_1, \\ 0 = y_1 - \lambda y_2, \\ 0 = y_2 - \lambda y_3, \\ \ldots \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{\lambda}, \\ y_2 = -\frac{1}{\lambda^2}, \\ y_3 = -\frac{1}{\lambda^3}, \\ \ldots \end{cases}$$

В силу ограничения на λ, решение этого уравнения не лежит в пространстве ℓ_1. Значит, оператор необратим, поэтому спектр состоит из круга $\{|\lambda| \leqslant 1\}$.

Пример 3.2. Пусть L — левый сдвиг:

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Очевидно, что $\|L\| = 1$, поскольку вектора с первыми нулевыми координатами сохраняют норму. Поэтому $\operatorname{Spec} L \subset \{|\lambda| \leqslant 1\}$. Из соотношения

$$(x_2, x_3, x_4, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots)$$

видно, что собственные векторы этого оператора — в точности геометрические прогрессии. Более точно, при $|\lambda| < 1$ решением является геометрическая прогрессия $(x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \ldots)$. Следовательно, круг $\{|\lambda| < 1\}$ содержится в спектре. Но так как спектр замкнут, он совпадает с замкнутым кругом $\{|\lambda| \leqslant 1\}$.

2.3.3. Ещё две теоремы о спектрах

Утверждение 2.10. *Для любого непустого компакта $K \subset \mathbb{C}$ найдётся оператор $A\colon \ell_p \to \ell_p$ такой, что $\operatorname{Spec} A = K$.*

$\square$ Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность, плотная в K.

Примечание: Ясно, что эту последовательность надо строить с помощью метода половинного деления. Как конкретно — додумайте сами. Если кому-то покажется, что это сложно, напишите на `dmvn@mccme.ru`, и в следующей версии я напишу подробнее.

Положим

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (a_1 x_1,\ a_2 x_2,\ a_3 x_3, \ldots).$$

В силу ограниченности последовательности $\{a_i\}$ этот оператор ограничен. Очевидно, что $\{a_i\} \subset \operatorname{Spec} A$, ибо $Ae_i = a_i e_i$, но в силу замкнутости спектра имеем $\operatorname{Cl}\{a_i\} = K \subset \operatorname{Spec} A$. Пусть $\mu \notin K$, тогда найдётся окрестность $U_\delta(\mu)$, не пересекающаяся с K и тем более, с элементами последовательности. Рассмотрим

$$(A - \mu E)x = \big((a_1 - \mu)x_1, (a_2 - \mu)x_2, \ldots\big).$$

Очевидно, к этому оператору имеется обратный оператор

$$(A - \mu E)^{-1}x = \left(\frac{1}{a_1 - \mu}x_1, \frac{1}{a_2 - \mu}x_2, \ldots\right).$$

Он будет ограниченным, поскольку числа $a_i - \mu$ отделены от нуля числом δ. $\blacksquare$

Теорема 2.11. *Пусть μ — мера Лебега на $(0, 1)$. Пусть $A\colon L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ — оператор, заданный по правилу $A\colon f \mapsto \varphi f$, где φ — ограничена μ-почти всюду. Покажем, что*

$$\operatorname{Spec} A = \operatorname{Ess}\varphi := \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \forall \varepsilon > 0 \text{ имеем } \mu\Big(\varphi^{-1}\big(B(\lambda, \varepsilon)\big)\Big) > 0\Big\},$$

то есть спектр состоит из всех существенных значений функции φ.

$\square$ Докажем теорему в случае, когда $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим случай $\lambda = 0$. В этом случае для $\forall \varepsilon > 0$ имеем $\mu\big(\varphi^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)\big) > 0$. Рассмотрим $Y_n = \varphi^{-1}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ и $f_n := \mathbb{I}_{Y_n}$. Сравним теперь нормы $\|f_n\|$ и $\|Af_n\|$. Имеем $\|f_n\| = \mu(Y_n) > 0$, а

$$\|Af_n\| = \int |\varphi f_n|\, d\mu = \int\limits_{Y_n} |\varphi|\, d\mu \leqslant \frac{1}{n}\mu(Y_n) = \frac{1}{n}\|f_n\|.$$

В силу следствия 2.3 из теоремы Банаха, оператор A необратим. Общий случай сводится к рассмотрению функции $\widetilde{\varphi} = \varphi - \lambda$. В самом деле, если λ — существенное значение для φ, то 0 будет существенным значением для $\widetilde{\varphi}$. Таким образом, $\operatorname{Ess}\varphi \subset \operatorname{Spec} A$. Пусть $\nu \notin \operatorname{Ess}\varphi$, тогда $\exists\,\varepsilon > 0$, для которого имеем $\mu\big(\varphi^{-1}(\nu-\varepsilon, \nu+\varepsilon)\big) = 0$. Следовательно, для μ-почти всех x имеем $|\varphi(x) - \nu| > \frac{\varepsilon}{2}$. Оператор $A - \nu E$ будет обратим, если можно делить на функцию $\varphi - \nu$. Но это как раз можно делать, поскольку функция $\frac{1}{\varphi(x)-\nu}$ ограничена для μ-почти всех x. Итак, $\nu \notin \operatorname{Spec} A$, поэтому $\operatorname{Ess}\varphi = \operatorname{Spec} A$. ■

2.3.4. Резольвента. Непустота спектра ограниченного оператора

Определение. Пусть $A\colon X \to X$ — оператор. *Резольвентой* оператора называется функция

$$\mathcal{R}_A\colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spec} A \to \operatorname{End} X,$$

определённая по правилу

$$\mathcal{R}_A(z) := (A - zE)^{-1}.$$

Замечание. В тех случаях, когда понятно, о каком операторе идёт речь, мы будем опускать индекс у резольвенты.

Лемма 2.12 (Тождество Гильберта). *Для резольвенты справедливо следующее соотношение:*

$$\mathcal{R}(z) - \mathcal{R}(w) = (z - w)\mathcal{R}(z)\mathcal{R}(w).$$

□ Рассмотрим тождество $(A - wE) - (A - zE) = (z - w)E$. Домножим его слева на оператор $\mathcal{R}(z)$, а справа на $\mathcal{R}(w)$, получим

$$\mathcal{R}(z)(A - wE)\mathcal{R}(w) - \mathcal{R}(z)(A - zE)\mathcal{R}(w) = \mathcal{R}(z)(z - w)\mathcal{R}(w).$$

После сокращения прямых и обратных операторов и перенесения коэффициента $z - w$ на первое место получим

$$\mathcal{R}(z) - \mathcal{R}(w) = (z - w)\mathcal{R}(z)\mathcal{R}(w),$$

а ровно это и требовалось доказать. ■

Покажем, что резольвенту можно дифференцировать как оператор. Используя обычное определение производной и тождество Гильберта, получаем

$$\mathcal{R}'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{R}(z+h) - R(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z + h - z)\mathcal{R}(z+h)\mathcal{R}(z)}{h} = \mathcal{R}^2(z).$$

Примечание: Здесь всё правильно. В литературе встречается другое определение резольвенты, а именно $\mathcal{R}(z) = (zE - A)^{-1}$. В этом случае в тождестве Гильберта появится перемена знаков.

Теорема 2.13. *Спектр ограниченного оператора непуст.*

□ Допустим, что спектр оператора пуст. Заметим, что $\mathcal{R}(z) \to 0$ при $z \to \infty$. В самом деле,

$$(A - zE)^{-1} = \left(-z\left(E - \frac{A}{z}\right)\right)^{-1} = -\frac{1}{z}\left(E - \frac{A}{z}\right)^{-1} = -\frac{1}{z}\left(E + \frac{A}{z} + \frac{A^2}{z^2} + \ldots\right) \to 0,$$

ибо второй множитель ограничен, а первый стремится к 0.

Рассмотрим какой-нибудь линейный непрерывный функционал $\varphi \in X^*$. Рассмотрим обычную комплекснозначную функцию $f(z) = \varphi\big(\mathcal{R}(z)x\big)$. Покажем, что f — целая функция в $\mathbb{C}$. Продифференцируем её:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\varphi\big(\mathcal{R}(z+h)x\big) - \varphi\big(\mathcal{R}(z)x\big)}{h} = \varphi\left(\frac{\mathcal{R}(z+h) - \mathcal{R}(z)}{h}x\right),$$

и, переходя к пределу при $h \to 0$, получаем $\varphi\big(\mathcal{R}^2(z)x\big)$. Далее, в силу доказанного выше, имеем $f(z) \to 0$, откуда следует её ограниченность. По теореме Лиувилля $f \equiv \mathrm{const}$, но поскольку $f \to 0$, получаем $f \equiv 0$. Следовательно, для всякого x и произвольного функционала φ имеем $\varphi\big(R(z)x\big) = 0$.

В силу следствия 2.5 из теоремы Хана–Банаха, если все функционалы из X^* обнуляются на векторе, то этот вектор нулевой. Следовательно, для $\forall\, z$ и любого $x \in X$ имеем $\mathcal{R}(z)x = 0$, но это означает, что резольвента $\mathcal{R}(z)$ является тождественно нулевым оператором при всех z. Но это противоречит нашему допущению. ■

2.4. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейных функционалов

2.4.1. Вещественный вариант ТХБ

В своей слабой формулировке теорема Хана – Банаха утверждает следующее:

Теорема 2.14. *Пусть X — нормированное пространство, а $M \subset X$ — подпространство. Пусть $\varphi \in M^*$ — ограниченный функционал, тогда существует $\psi \in X^*$ такой, что $\psi\Big|_M = \varphi$ и $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

Мы докажем теорему Хана – Банаха для случая $K = \mathbb{R}$ в следующей формулировке:

Теорема 2.15 (Хана – Банаха о продолжении ограниченного функционала). *Пусть X — вещественное нормированное пространство. Пусть $M \subset X$ — линейное подпространство. Пусть на M задан функционал φ такой, что существует калибровочная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

$$\forall\, x \in M \ \text{имеем}\ \varphi(x) \leqslant f(x),$$
$$\forall\, x, y \in X \ \text{имеем}\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y),$$
$$\forall\, x \in X,\ \forall\, t \geqslant 0 \ \text{имеем}\ f(tx) = tf(x).$$

Тогда существует продолжение ψ функционала φ на пространство X с сохранением требования $\psi \leqslant f$.

□ Первый шаг доказательства будет состоять в том, что можно продолжить функционал φ на пространство $\langle M, x_1\rangle$, где $x_1 \notin M$, то есть на пространство «на единицу большей размерности».

Запишем условие калибровки $\varphi(x + \lambda x_1) \leqslant f(x + \lambda x_1)$. Мы считаем, что $\lambda \neq 0$. В силу линейности имеем $\varphi(x) + \lambda\varphi(x_1) \leqslant f(x + \lambda x_1)$. Пусть сначала $\lambda > 0$. Тогда

$$\varphi(x_1) \leqslant \frac{1}{\lambda} f(x + \lambda x_1) - \frac{1}{\lambda}\varphi(x).$$

Положительные коэффициенты можно вносить под знак калибровочной функции. Поэтому

$$\varphi(x_1) \leqslant f\left(\frac{x}{\lambda} + x_1\right) - \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Заметим, что когда x бегает по M, вектор $\frac{x}{\lambda}$ тоже бегает по всему M. Переобозначив $y_1 = \frac{x}{\lambda}$, получим

$$\varphi(x_1) \leqslant f(y_1 + x_1) - \varphi(y_1). \tag{19}$$

Теперь посмотрим, что получится, если $\lambda < 0$. Имеем

$$\varphi(x_1) \geqslant \frac{1}{\lambda} f(x + \lambda x_1) - \frac{1}{\lambda}\varphi(x).$$

Мы будем вносить под знак f положительное число $-\frac{1}{\lambda}$, поэтому запишем это в виде

$$\varphi(x_1) \geqslant -\left(-\frac{1}{\lambda}\right) f(x + \lambda x_1) + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\varphi(x).$$

Отсюда

$$\varphi(x_1) \geqslant -f\left(-\frac{x}{\lambda} - x_1\right) + \varphi\left(-\frac{x}{\lambda}\right).$$

Обозначая $y_2 = -\frac{x}{\lambda}$, получаем второе условие

$$\varphi(x_1) \geqslant -f(y_2 - x_1) + \varphi(y_2). \tag{20}$$

Итак, чтобы были выполнены условия теоремы, нужно, чтобы для всех y_1 и y_2 из пространства M были выполнены условия (19) и (20). Для этого достаточно показать, что

$$f(y_1 + x_1) + f(y_2 - x_1) \geqslant \varphi(y_1) + \varphi(y_2).$$

В самом деле, это условие можно переписать в виде

$$f(y_1 + x_1) + f(y_2 - x_1) \geqslant \varphi(y_1 + y_2),$$

а в силу свойств функции f имеем

$$f(y_1 + x_1) + f(y_2 - x_1) \geqslant f(y_1 + x_1 + y_2 - x_1) = f(y_1 + y_2) \geqslant \varphi(y_1 + y_2).$$

Но это ровно то, что нам нужно. Итак, мы доказали, что можно продолжить функционал на пространство $\langle M, x_1 \rangle$.

Чтобы теперь показать, что можно продлить функционал на всё пространство X, нужно либо предполагать сепарабельность пространства X и доказывать это утверждение методом математической индукции, либо воспользоваться трансфинитными средствами, а именно так называемой леммой Цорна. Мы пойдём по второму пути. Для начала напомним необходимые понятия из курса математической логики.

Определение. *Бинарным отношением* $\mathscr{R}$ на множестве P называется подмножество $\mathscr{R} \subset P \times P$. Говорят, что $x\mathscr{R}y$, если $(x, y) \in \mathscr{R}$. Отношение называется *рефлексивным*, если имеет место $x\mathscr{R}x$; *симметричным*, если из $x\mathscr{R}y$ следует $y\mathscr{R}x$; *антисимметричным*, если из $x\mathscr{R}y$ и $y\mathscr{R}x$ следует $x = y$; *транзитивным*, если из $x\mathscr{R}y$ и $y\mathscr{R}z$ следует $x\mathscr{R}z$.

Определение. Бинарное отношение называется *отношением частичного порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно.

Определение. Частичное упорядочение называется *линейным упорядочением*, если всегда выполнено $x\mathscr{R}y$ или $y\mathscr{R}x$. Иными словами, любые два элемента сравнимы.

Определение. Пусть $(P, \prec)$ — частично упорядоченное множество. Элемент $p \in P$ называется *максимальным*, если из $p \prec q$ следует, что $p = q$. Элемент $p \in P$ для цепи S называется *верхней гранью*, если для $\forall\, q \in S$ имеем $q \prec p$.

Утверждение 2.16 (Лемма Цорна). *Пусть $(P, \prec)$ — частично упорядоченное множество. Если для любой цепи, то есть линейно упорядоченного подмножества P существует верхняя грань, то существует максимальный элемент в P.*

Покажем теперь, как с использованием леммы Цорна доказать нашу теорему. Пусть $(M_\alpha, \varphi_\alpha)$ — цепь, полученная последовательным расширением пространств с помощью присоединения одного вектора. Рассмотрим $\bigcup M_\alpha$ и определим на нём функционал φ так: $\varphi(x) := \varphi_\alpha(x)$, как только $x \in M_\alpha$. Корректность данного определения очевидна. В силу леммы Цорна в нашем множестве существует максимальный элемент $\widetilde{M}$. Если он совпадает с X, то всё доказано. Если же $\widetilde{M} \neq X$, то найдётся вектор из X, не лежащий в $\widetilde{M}$, но это противоречит тому, что продолжать дальше некуда. ■

Следствие 2.4. *Пусть M — замкнутое подпространство, и $x \notin M$. Тогда есть такой функционал, что $\varphi(x) = 1$, а $\varphi(M) = 0$.*

□ Пусть $z = y + \alpha x$, где $y \in M$. Положим $\varphi(x) := 1$ и $\varphi(y) = 0$ для $\forall\, y \in M$. Продолжая его на всё пространство, получим искомый функционал. Остается проверить его ограниченность. Имеем

$$\|\varphi\| := \sup_{y+\alpha x} \frac{|\varphi(y + \alpha x)|}{\|y + \alpha x\|} \leqslant \frac{1}{\rho(M, x)}. \tag{21}$$

Но так как $x \notin M$ и подпространство M замкнуто, то $\rho(M, x) > 0$, а значит, φ ограничен. ■

Следствие 2.5. *Пусть про вектор x известно, что $\forall\, \varphi \in X^*$ имеем $\varphi(x) = 0$. Тогда $x = 0$.*

□ Рассмотрим линейную оболочку $M = \langle x \rangle$. Определим на ней линейный функционал: положим $\varphi(x) = 1$ и распространим его по линейности на все одномерное пространство M. По теореме Хана–Банаха его можно продлить до функционала ψ на всё пространство X так, что на пространстве M имеем $\psi = \varphi$. Но тогда $\psi(x) = 1$, а это противоречит условию. ■

Примечание: Начиная с этого места текст набирался крайне быстро, поэтому вероятность ошибок очень велика.

2.4.2. Обобщение ТХБ на комплексный случай

Определение. *Полунормой* называется функция $p(x)\colon X \to \mathbb{R}$ со свойствами:

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$;
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;
- $p(x) \geqslant 0$;

Как видно из определения, полунорма отличается от нормы отсутствием свойств точности ($\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Пусть на пространстве X задана полунорма $p(x)$, и $M \subset X$ — подпространство, на котором задан ограниченный функционал φ, для которого $|\varphi(x)| \leqslant p(x)$. Тогда существует продолжение ψ функционала φ, ибо норма играет роль калибровочной функции.

Пусть φ — комплексный функционал. Тогда $\varphi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x) + i\operatorname{Im}\varphi(x)$. Обозначим вещественную и мнимую части через $R(x)$ и $I(x)$ соответственно. Ясно, что не всякие вещественные функционалы могут быть в роли R и I. Действительно, имеем

$$\varphi(ix) = i\varphi(x) = R(ix) + iI(ix) = iR(x) + (-1)I(x).$$

Значит, $I(x) = -R(ix)$.

Задача 2.1. *Доказать, что функция $\varphi(x) = R(x) - iR(ix)$, где R — вещественный функционал, является (комплексным) линейным функционалом.*

Функционал R можно продолжить до $\widetilde{R}$ с сохранением условия $|\widetilde{R}(x)| \leqslant p(x)$. Для всех α таких, что $|\alpha| = 1$, имеем

$$|\varphi(x)| = |\varphi(\alpha x)| = |\underbrace{\alpha_0\varphi(x)}_{\in\mathbb{R}}| = p(\alpha_0 x) = p(x).$$

Далее,

$$|\psi(x)| = |\underbrace{\psi(\alpha_0 x)}_{\in\mathbb{R}}| = |\widetilde{R}(\alpha_0 x)| \leqslant p(x).$$

Значит, можно продолжить ψ полностью: $\widetilde{\psi}(x) := \widetilde{R}(x) - i\widetilde{R}(ix)$.

Замечание. Аналога ТХБ для операторов не существует. Например, пространство c_0 не является ретрактом, то есть оператор $E\colon c_0 \to c_0$ нельзя продолжить на ℓ_∞ так, чтобы $A\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ совпадал с E на подпространстве c_0 и $\|A\| = 1$.

Задача 2.2. *Доказать, что всякий непрерывный функционал φ на c_0 можно единственным образом продолжить на ℓ_∞ с сохранением нормы.*

2.5. Компактность. Слабая сходимость и слабая компактность

2.5.1. Компактные и предкомпактные множества

Определение. Пусть X — метрическое пространство. Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если из любой последовательности $\{x_i\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $x \in M$.

Определение. Множество M называется *предкомпактным*, если из любой последовательности $\{x_i\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Определение. Говорят, что множество N образует *ε-сеть* для множества M, если в ε-окрестности любой точки $x \in M$ найдётся точка из N.

Теорема 2.17 (Критерий Хаусдорфа). *Бесконечное подмножество M полного метрического пространства предкомпактно тогда и только тогда, когда для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для M.*

$\square$ Пусть нашлось такое $\varepsilon_0 > 0$, что для него не существует конечной ε_0-сети. Иначе говоря, всякое конечное семейство окрестностей радиуса ε_0 не может покрыть всё множество M. Возьмём $x_1 \in M$ и накроем его ε_0-окрестностью U_1. Набор $\{U_1\}$ не покрывает M, поэтому найдётся $x_2 \in M \setminus U_1$. Накроем его окрестностью U_2, но $\{U_1, U_2\}$ снова не покроет всё множество M. Выбирая $x_3 \in M \setminus (U_1 \cup U_2)$ и так далее, получим последовательность, у которой $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon_0$, поэтому из неё нельзя выделить фундаментальную. Таким образом, M не предкомпактно.

Обратно, пусть для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Пусть $\{x_i\} \subset M$ — произвольная последовательность, выделим из неё фундаментальную. Возьмём 1-сеть, тогда найдётся окрестность, в которой бесконечно много членов последовательности. Выберем оттуда один элемент x_1^* и в качестве новой последовательности возьмём только то, что попало в эту окрестность. Далее, существует конечная $\frac{1}{2}$-сеть, покрывающая новую последовательность. Снова выберем ту окрестность сети, в которой бесконечно много элементов, и в ней возьмём произвольный x_2^*. Продолжим этот процесс, то есть на n-м шаге будем выбирать $\frac{1}{2^n}$-сеть. Ясно, что последовательность $\{x_i^*\}$ будет фундаментальна. $\blacksquare$

Лемма 2.18 (Критерий конечномерности пространства). *Нормированное пространство X конечномерно тогда и только тогда, когда в нём всякое бесконечное ограниченное множество предкомпактно.*

$\square$ Всякое бесконечное ограниченное множество в конечномерном пространстве предкомпактно, поскольку в этом случае $X \cong \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$), а для этих пространств предкомпактность эквивалентна ограниченности.

Обратно, пусть всякое ограниченное подмножество в L предкомпактно. Допустим, что X бесконечномерно, тогда возьмём единичный вектор $e_1 \in X$. По предположению, $X \neq X_1 := \langle e_1\rangle$, тогда по лемме Рисса найдётся единичный вектор $e_2 \notin X_1$, для которого $\rho(e_2, X_1) \geqslant \frac{1}{2}$. Вновь по предположению $X \neq X_2 := \langle e_1, e_2\rangle$, тогда построим ещё один вектор e_3, для которого $\rho(e_3, X_2) \geqslant \frac{1}{2}$, и так далее. Цепочка подпространств X_n будет строго возрастать, и последовательность $\{e_i\}$ будет ограниченным и не предкомпактным множеством, так как расстояние между любыми двумя её элементами не меньше $\frac{1}{2}$. ■

2.5.2. Слабая сходимость и слабая компактность

Определение. Говорят, что последовательность x_n *слабо сходится* к x, если для любого ограниченного функционала f на X имеем $f(x_n) \to f(x)$. Обозначение: $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$.

Определение. Говорят, что последовательность функционалов f_n *$*$-слабо сходится* к f, если для любого вектора $x \in X$ имеем $f_n(x) \to f(x)$. Обозначение: $f_n \xrightarrow{*\text{w}} f$.

Примечание: Не знаю, зачем лепить звездочки куда ни попадя. И так понятно, что слабая сходимость векторов — на функционалах, а слабая сходимость функционалов — на векторах. Поэтому будем писать $f_n \xrightarrow{\text{w}} f$.

Определение. Говорят, что множество *слабо компактно*, если из любой его последовательности элементов можно выделить слабо сходящуюся.

Теорема 2.19 (О слабой компактности единичной сферы). *Пусть X — сепарабельное нормированное пространство. Тогда единичный шар в X^* слабо компактен.*

□ Выберем в X счётное всюду плотное множество $D := \{x_n\}$. Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная последовательность функционалов. Рассмотрим последовательность чисел $\{f_n(x_1)\}$. Она ограничена (мы сидим в единичном шаре $\|f\| \leqslant 1$), а потому содержит сходящуюся. Обозначим её через $f_n^{(1)}(x_1)$. Рассмотрим последовательность чисел $\left\{f_n^{(1)}(x_2)\right\}$. Она тоже содержит сходящуюся подпоследовательность $f_n^{(2)}(x_2)$. Продолжая этот процесс и выделяя диагональ $\varphi_n := f_n^{(n)}$, получим последовательность функционалов, сходящуюся на всех векторах x_i.

Покажем, что сходимость имеет место для всех векторов $x \in X$. Покажем фундаментальность последовательности $\{\varphi_i(x)\}$. Рассмотрим последовательность элементов из D, сходящуюся к x, тогда, очевидно,

$$|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = |\varphi_m(x) - \varphi_m(x_k) + \varphi_m(x_k) - \varphi_n(x_k) + \varphi_n(x_k) - \varphi_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi_m(x) - \varphi_m(x_k)| + |\varphi_m(x_k) - \varphi_n(x_k)| + |\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x)| \to 0.$$

Но это и значит, что φ_n слабо сходится. Теорема доказана. ■

Задача 2.3. *Доказать, что на втором шаге доказательства всё корректно: результат не зависит от выбора последовательности, сходящейся к x.*

Лемма 2.20. *Существует изометричное вложение $X \hookrightarrow X^{**}$.*

□ Зададим вложение так: $x \mapsto F_x$, где $F_x \in X^{**}$ — функционал на X^*, действующий на элементах $f \in X^*$ следующим образом:

$$F_x\colon f \mapsto f(x).$$

Это вложение, очевидно, линейно. Докажем, что это изометрия. Обозначим норму в X^{**} через $\|\cdot\|_2$. С одной стороны, по определению нормы имеем $|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$, поэтому

$$\|x\| \geqslant \sup_f \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|_2 .$$

С другой стороны, в силу одного из следствий теоремы Хана – Банаха, для всякого $x_0 \in X$ найдётся функционал f_0 такой, что $|f_0(x_0)| = \|f_0\| \cdot \|x_0\|$, поэтому

$$\|x\|_2 = \sup_f \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant \|x\| ,$$

следовательно, $\|x\| = \|x\|_2$. ■

Утверждение 2.21. *Слабо ограниченная последовательность ограничена по норме.*

□ Применим теорему Банаха – Штейнгауза к пространствам X^* и X^{**}, то есть вместо последовательности $\{x_i\}$ рассматривая её образ в X^{**}. В силу этой теоремы семейство образов будет ограниченным, но в силу изометричности вложения этим свойством будет обладать и исходное семейство векторов. ■

Примечание: На лекциях следующего утверждения не было, но наверняка было на семинарах. А кому-нибудь, возможно, попадётся на экзамене.

Утверждение 2.22. *Слабый предел единствен.*

□ Допустим, что $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$ и $x_n \xrightarrow{\text{w}} y$, причём $x \neq y$. Тогда, по определению слабой сходимости, для любого f имеем $f(x_n) \to f(x)$ и $f(x_n) \to f(y)$. Следовательно, для всякого функционала f имеем $f(x) = f(y)$, то есть $f(x-y) = 0$. Но по лемме о продолжении функционала существует f, который равен 1 на векторе $x - y$. Противоречие. ■

2.6. Ещё две теоремы о сопряжённых пространствах

2.6.1. Общий вид функционалов в $L_1[0,1]$. Несепарабельность L_∞^*

Теорема 2.23. *Рассмотрим пространство $X := L_1([0,1],\mu)$ и любой ограниченный функционал $\varphi \in X^*$. Тогда найдётся функция $g \in L_\infty$ такая, что*

$$\varphi(f) = \int fg\,d\mu. \tag{22}$$

□ Докажем сначала для индикаторов. Рассмотрим функцию $\nu(A) = \varphi(\mathbb{I}_A)$, где A — измеримое множество. Легко видеть, что эта функция абсолютно непрерывна относительно меры μ. Если мы покажем, что ν является зарядом, то по теореме Радона–Никодима найдётся функция g такая, что $\nu(A) = \int g\cdot\mathbb{I}_A\,d\mu$. Имеем

$$\sup_{A\colon \mu(A)>0} \frac{|\varphi(\mathbb{I}_A)|}{\mu(A)} < M, \tag{23}$$

так как $\mu(A) = \|\mathbb{I}_A\|$, а функционал φ ограничен.

Покажем, что $g \in L_\infty$. В самом деле, положим $A_c := \{x\colon g(x) > c\}$. Допустим, что $g \notin L_\infty$. Тогда для $\forall\, c$ имеем $\mu(A_c) > 0$. Значит,

$$\frac{\varphi(\mathbb{I}_{A_c})}{\|\mathbb{I}_{A_c}\|} \geqslant \frac{c\cdot\mu(A_c)}{\mu(A_c)} = c. \tag{24}$$

Но в силу (23) это выражение не превосходит M, а мы предположили, что c произвольно. Противоречие.

Таким образом, для индикаторов утверждение теоремы проверено. В общем случае, как обычно, приближаем произвольную функцию ступенчатыми: $f_n \to f$. Тогда

$$\begin{array}{ccc} \varphi(f_n) & = & \int f_n g\,d\mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(f) & = & \int fg\,d\mu \end{array}$$

и всё доказано.

Покажем, что ν является зарядом, то есть проверим её счётную аддитивность. Имеем

$$\nu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \nu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{N-1} A_i\Big) + \nu\Big(\bigsqcup_{i=N}^{\infty} A_i\Big). \tag{25}$$

Конечная аддитивность очевидна, а второе слагаемое стремится к нулю в силу абсолютной непрерывности, так как $\bigsqcup\limits_{i=N}^{\infty} A_i \searrow \varnothing$ при $N \to \infty$. ■

Лемма 2.24. *Пусть пространство X несепарабельно. Тогда X^* также несепарабельно.*

□ Допустим, что X^* сепарабельно. Пусть $\{\varphi_i\}$ — счётное всюду плотное семейство функционалов. Найдем семейство единичных векторов x_i таких, что $\varphi_i(x_i) \geqslant \frac{1}{2}\|\varphi_i\|$. Пусть $M := \mathrm{Cl}\,\langle x_i\rangle$ — замкнутое подпространство. Покажем, что $M \neq X$. В самом деле, если бы M совпало с X, то линейные комбинации векторов x_i с рациональными координатами были бы плотны в X, что противоречит несепарабельности X.

Возьмём вектор y такой, что $\rho(y, M) > 0$ и $\|y\| = 1$. По следствию теоремы Хана–Банаха найдётся функционал ψ такой, что $\psi(y) = 1$ и $\psi(M) = 0$. Тогда, очевидно, $\|\psi - \varphi_i\| \geqslant |\psi(y) - \varphi_i(y)|$, а кроме того,

$$\|\psi - \varphi_i\| \geqslant |\psi(x_i) - \varphi_i(x_i)| \geqslant \frac{1}{2}\|\varphi_i\|. \tag{26}$$

Но по предположению о сепарабельности пространства найдётся последовательность функционалов φ_{i_k}, для которой $\|\psi - \varphi_{i_k}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, в силу написанных неравенств $\|\psi_{i_k}\| \to 0$. Но отсюда следует, что $\|\psi\| = 0$. Это противоречит тому, что $\psi(y) \neq 0$. ■

Теорема 2.25. *Пространство $L_\infty^*[0,1]$ несепарабельно.*

□ В самом деле, пространство $L_\infty[0,1]$ несепарабельно, так как можно взять семейство континуальное семейство функций вида $I_x := \mathbb{I}_{[0,x]}$, и если $x \neq y$, то $\|I_x - I_y\| = 1$, т. е. в пространстве существует несчётномерный «ёж». А тогда по лемме и пространство $L_\infty^*[0,1]$ будет несепарабельным. ■

Следствие 2.6. *Существуют непрерывные функционалы на L_∞, не задающиеся формулой $\varphi(f) = \int fg\,d\mu$, где $g \in L_1$, а $f \in L_\infty$.*

3. Гильбертовы пространства

3.1. Операторы в гильбертовых пространствах

3.1.1. Понятие гильбертова пространства

Определение. *Гильбертовым* пространством называется евклидово пространство, полное относительно нормы, задаваемой скалярным произведением: $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$. Его мы всегда будем обозначать буквой H.

Напомним, что скалярное произведение предполагается невырожденным! Именно поэтому норма задана корректно.

3.1.2. Сопряжённые операторы

Определение. Пусть A — ограниченный оператор в H. Если оператор B таков, что $(Ax,y) = (x,By)$ для всех $x,y \in H$, то B называется *сопряжённым* к A и обозначается A^*. Если $A = A^*$, то A называется *самосопряжённым.*

Замечание. Существование сопряжённого оператора для всякого ограниченного оператора будет доказано несколько позже.

Отношение сопряжённости является симметричным: если B сопряжён к A, то A сопряжён к B. Действительно, имеем

$$(Ax,y) = (x,By) \;\Leftrightarrow\; \overline{(Ax,y)} = \overline{(x,By)} \;\Leftrightarrow\; (By,x) = (y,Ax),$$

а это и означает, что оператор A сопряжён к B.

Утверждение 3.1. *Имеет место соотношение* $(A^*)^* = A$.

□ По определению имеем для всех x,y

$$\begin{cases} (Ax,y) = (x,A^*y), \\ \big((A^*)^*x,y\big) = \big(x,A^*y\big); \end{cases} \quad \Rightarrow \; \big(Ax,y\big) = \big((A^*)^*x,y\big) \;\Leftrightarrow\; \big((A-(A^*)^*)x,y\big) = 0,$$

но из невырожденности скалярного произведения следует $\big(A-(A^*)^*\big)x = 0$ для всех x, поэтому $A = (A^*)^*$. ■

3.1.3. Лемма об ортогональной проекции и её следствия

Примечание: Следующие леммы были неоправданно свалены лектором в одну кучу. Они полезны сами по себе.

Лемма 3.2 (Об ортогональной проекции). *Пусть H_0 — замкнутое подпространство в H. Тогда для любого вектора $h \in H \setminus H_0$ найдётся единственный ближайший вектор из H_0.*

□ Имеем $\rho(h,H_0) =: a > 0$ в силу того, что одно из этих множеств замкнуто, а второе компактно. Выберем последовательность $\{h_n\} \subset H_0$ так, чтобы $\rho(h_n,h) \to a$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\{h_n\}$ фундаментальна. Нам понадобится тождество параллелограмма: «сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон». В силу этого тождества для достаточно больших n и m получаем

$$\|h_n - h_m\|^2 = 2\,\|h-h_n\|^2 + 2\,\|h-h_m\|^2 - 4\left\|h - \frac{h_n+h_m}{2}\right\|^2 \leqslant 2(a^2+\varepsilon) + 2(a^2+\varepsilon) - 4a^2 = 4\varepsilon,$$

и тем самым фундаментальность установлена.

Далее, H_0 — замкнутое подпространство полного пространства, и потому оно полно. Следовательно, $\{h_n\}$ сходится к некоторому элементу $h_0 \in H_0$. По непрерывности имеем $\rho(h_n,h) \to \rho(h_0,h)$. С другой стороны, этот предел равен a в силу выбора h_n. Следовательно, $\rho(h_0,h) = a$. ■

Следствие 3.1. *Пусть $H_0 \subset H$ — замкнутое подпространство. Всякий вектор $h \in H$ представим в виде $h = h_0 + g$, где $h_0 \in H_0$, а $g \in H_0^\perp$.*

□ Пусть $x \in H_0$. По лемме, функция $d(x) := \|h-x\|^2$ достигает минимума на некотором векторе $h_0 \in H_0$. Поэтому функция $\varphi(t) := \|h-h_0+tx\|^2$ имеет минимум при $t=0$. Тогда $\varphi'(0) = 0$. Распишем скалярный квадрат: $\varphi(t) = (h-h_0+tx, h-h_0+tx) = \|h-h_0\|^2 + 2t\operatorname{Re}(x,h-h_0) + t^2(x,x)$, поэтому $\varphi'(0) = 2\operatorname{Re}(x,h-h_0) = 0$. Далее, вместо вектора x рассматривая вектор $i \cdot x$, получаем $\operatorname{Im}(x,h-h_0) = 0$. Следовательно, $(x,h-h_0) = 0$. Таким образом, всякий вектор $x \in H_0$ ортогонален вектору $h-h_0$, то есть $h-h_0 \in H_0^\perp$. Тождество $h = h_0 + (h-h_0)$, очевидно, является искомым разложением. ■

3.1.4. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве

Гильбертовы пространства хороши тем, что всякий функционал в них устроен очень просто: это скалярное умножение не некоторый (фиксированный) вектор.

Лемма 3.3 (Рисса). *Пусть f — ограниченный функционал. Тогда найдётся вектор $h_0 \in H$, для которого $f(x) = (x, h_0)$.*

□ Если $f \equiv 0$, то доказывать нечего: берём $h_0 := 0$. Пусть теперь $f \neq 0$. Очевидно, ядро $K := \operatorname{Ker} f$ — замкнутое подпространство. Покажем, что $\dim K^\perp = 1$. Рассмотрим ненулевые вектора $h_1, h_2 \in K^\perp$. Рассмотрим вектор

$$v = f(h_1)h_2 - f(h_2)h_1.$$

С одной стороны, $v \in K^\perp$ как линейная комбинация векторов из $K^\perp$. С другой стороны, он лежит и в K, потому что $f(v) = f(h_1)f(h_2) - f(h_2)f(h_1) = 0$. Но $K \cap K^\perp = 0$, поэтому $v = 0$, следовательно вектора h_1 и h_2 пропорциональны.

Рассмотрим уравнение $f(x) = (x, \mu h_1)$, где μ — неизвестное. Определим его, подставив $x = h_1$: получим $F(h_1) = \overline{\mu}(h_1, h_1)$. Итак, μ найдено. Тогда для всякого $x \in K^\perp$ имеем $f(x) = (x, \mu h_1)$. В самом деле, $x = \lambda h_1$, поэтому

$$f(x) = f(\lambda h_1) = \lambda f(h_1) = \lambda(h_1, \mu h_1) = (\lambda h_1, \mu h_1) = (x, \mu h_1).$$

Аналогично, если $x \in K$, то равенство тоже верно: и слева, и справа получаем ноль. Но поскольку $H = K \oplus K^\perp$, по следствию из леммы об ортогональной проекции это верно и на всём пространстве. ■

Утверждение 3.4. *Сопряжённый оператор существует.*

□ Пусть A — ограниченный линейный оператор в H. Зафиксируем $y \in H$ и рассмотрим функционал $f(x) := (Ax, y)$. Линейность его очевидна, а ограниченность следует из неравенства Коши – Буняковского:

$$|(Ax, y)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|.$$

По лемме Рисса получаем $f(x) = (x, A^*y)$, где A^*y — обозначение для сопряжённого оператора, применённого к вектору y.

Проверим корректность определения. Пусть мы получили таким способом два вектора v_1 и v_2. Для них имеем $(Ax, y) = (x, v_1) = (x, v_2)$, причём это верно для любого x. Таким образом, для всех x имеем $(x, v_1 - v_2) = 0$. Подставим $x = v_1 - v_2$, получим $(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = 0$, откуда $v_1 = v_2$.

Очевидно, что получаемый таким способом оператор будет линейным. ■

3.1.5. Свойства сопряжённых операторов

Лемма 3.5. *Для любого ограниченного оператора A имеет место равенство $\|A^*\| = \|A\|$.*

□ Действительно, $\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leqslant \|A^*A\| \cdot \|x\|^2$ по неравенству Коши – Буняковского. Перейдём к верхней грани по $\|x\| = 1$, получим $\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|A\|$, откуда $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Меняя в этих выкладках местами операторы A и A^*, получаем обратное неравенство. ■

Теорема 3.6. *Пусть про операторы A и B известно, что $(Ax, y) = (x, By)$. Тогда $\|A\| \leqslant \infty$.*

□ Покажем, что ограниченности A эквивалентна тому, что

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |(Ax, y)| < \infty. \tag{1}$$

В самом деле, имеем

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|Ax\|\neq 0}} \left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|} \right) = \|A\|. \tag{2}$$

Рассмотрим функционал $\varphi_x(y) := (Ax, y)$. Пусть $\|x\| = 1$, тогда мы имеем семейство непрерывных функционалов $\{\varphi_x\}$. Тогда

$$|\sup_{\|x\|=1} \varphi_x(y)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, By)| \leqslant \|By\| \leqslant C(y), \tag{3}$$

то есть мы имеем семейство поточечно ограниченных функционалов. По теореме Банаха – Штейнгауза $\|\varphi_x\| \leqslant C$. Отсюда $\sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |\varphi_x(y)| \leqslant \text{const}$, то есть $\sup |(Ax, y)| \leqslant \text{const}$. А это и значит, что оператор A ограничен. ■

3.2. Компактные (вполне непрерывные) операторы

3.2.1. Определение и свойства компактных операторов

Определение. Оператор называется *компактным*, если образ единичного шара предкомпактен.

Утверждение 3.7. *Сумма компактных операторов есть снова компактный оператор.*

□ Очевидно, если воспользоваться, например, критерием Хаусдорфа. ■

Утверждение 3.8. *Произведение компактного и ограниченного операторов есть компактный оператор.*

□ Пусть A — компактный, а B — ограниченный операторы. Сначала покажем, что оператор AB компактен. Если множество M ограничено, то $B(M)$ тоже ограничено. Тогда $A\big(B(M)\big)$ предкомпактно, и всё доказано.

Теперь покажем, что BA тоже компактный оператор. Для этого воспользуемся критерием Хаусдорфа предкомпактности множества. В силу компактности A, для любого ε в множестве $A(M)$ существует конечная ε-сеть. Очевидно, что для множества $B\big(A(M)\big)$ годится $\|B\| \cdot \varepsilon$-сеть, которая получается из исходной сети после применения оператора B. ■

Следствие 3.2. *Компактные операторы образуют двусторонний идеал в алгебре операторов.*

Следствие 3.3. *Компактный оператор в бесконечномерном пространстве необратим.*

□ В самом деле, допустим противное. Поскольку $AA^{-1} = \mathrm{id}$, в силу предыдущего утверждения получаем, что id является компактным оператором. Но это неверно, поскольку в бесконечномерном пространстве единичный шар не является предкомпактом. ■

Теорема 3.9. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Оператор A компактен;*
2. *Оператор A^* компактен;*
3. *Оператор A^*A компактен.*

□ Мы уже знаем, что от умножения на ограниченный с любой стороны компактный оператор не теряет своих чудесных свойств, поэтому «$1 \Rightarrow 3$» и «$2 \Rightarrow 3$» доказаны.

Докажем, что $3 \Rightarrow 1$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\|x_n\| = 1$. Так как оператор A^*A компактен, то $\{A^*Ax_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Тогда перенумеруем её, и будем считать, что $\{x_n\}$ — это она и есть. Покажем, что $\{Ax_n\}$ тоже содержит сходящуюся. Действительно, имеем

$$(Ax_n - Ax_m, Ax_n - Ax_m) = \big((A^*A)(x_n - x_m), \underbrace{x_n - x_m}_{\|\cdot\| \leqslant 2}\big) \to 0, \tag{4}$$

так как $(A^*A)(x_n - x_m) \to 0$. ■

Теорема 3.10. *Пусть A_n — последовательность компактных операторов в банаховом пространстве, и $A_n \to A$ по норме. Тогда A компактен.*

□ Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Нужно доказать, что из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выбрать фундаментальную.

Так как A_1 компактен, то выбираем последовательность $x_n^{(1)}$ такую, что последовательность $A_1x_n^{(1)}$ сходится. Из неё выбираем $x_n^{(2)}$ такую, что $A_2x_n^{(2)}$ сходится, и так далее. Возьмём диагональ $y_i := x_i^{(i)}$ и покажем, что последовательность Ay_i фундаментальна. По условию $\|x_n\| \leqslant C$, а $\|A_ky_n - A_ky_m\| \to 0$ в силу фундаментальности. Кроме того, $\|A - A_k\| \to 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|Ay_n - Ay_m\| &\leqslant \|Ay_n - A_ky_n\| + \|A_ky_n - A_ky_m\| + \|A_ky_m - Ay_m\| \leqslant \\ &\leqslant \|A - A_k\| \cdot \|y_n\| + \|A_ky_n - A_ky_m\| + \|A - A_k\| \cdot \|y_m\| \leqslant \\ &\leqslant \|A - A_k\| \cdot C + \|A_ky_n - A_ky_m\| + \|A - A_k\| \cdot C \to 0,\end{aligned}$$

а это и значит, что последовательность $\{Ay_i\}$ фундаментальна. ■

Лемма 3.11. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ в банаховом пространстве слабо сходится к x_0 и предкомпактна. Тогда $x_n \to x_0$ по норме пространства.*

□ В силу предкомпактности из последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность x_{n_k}. В силу полноты пространства она сходится к некоторому вектору $\widehat{x}$. Из сходимости по норме следует слабая сходимость, поэтому $x_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{w}} \widehat{x}$. Но слабый предел единствен, поэтому $\widehat{x} = x_0$, что и требовалось. ■

Следствие 3.4. *Компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся по норме.*

□ Как уже было доказано, слабо сходящаяся последовательность ограничена. По определению компактного оператора, $\{Ax_n\}$ предкомпактно, поэтому содержит сходящуюся к некоторой точке y подпоследовательность. Очевидно, что $\{Ax_n\}$ тоже слабо сходится, а поскольку слабый предел совпадает с сильным (если последний существует), то и образ всей последовательности сходится к y. ■

3.2.2. Свойства спектра компактных операторов

Лемма 3.12. *Собственные векторы с различными собственными значениями линейно независимы.*

□ Докажем утверждение индукцией по количеству k собственных векторов $e_1, \ldots, e_k$ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ соответственно. При $k = 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$, и

$$e_1 + \ldots + e_{k-1} + e_k = 0,$$

тогда, применяя к этому равенству оператор, получаем

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_k e_k = 0.$$

Вычтем отсюда исходное равенство, умноженное на λ_k, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1} = 0.$$

По предположению индукции такое возможно только если $e_i = 0$ при $i = 1, \ldots, k-1$. Но тогда и $e_k = 0$. ■

Замечание. Отрицание линейной независимости было сделано для линейной комбинации с единичными коэффициентами. Но ясно, что это не существенно, так как вектора $y_i := a_i e_i$ также являются собственными, и можно предполагать, что зависимы именно они (но уже с единичными коэффициентами).

Теорема 3.13. *Пусть оператор $A\colon X \to X$ — компактен, пространство X — банахово. Тогда количество собственных значений вне всякого круга радиуса $r > 0$ с центром в нуле лишь конечное число.*

□ Пусть $\{\lambda_n\}$ — попарно различные ненулевые собственные значения оператора A. Покажем, что $\lambda_n \to 0$. Допустим противное, тогда из $\{\lambda_n\}$ можно выделить подпоследовательность так, что после перенумерации последовательность $\left\{\frac{1}{|\lambda_n|}\right\}$ ограничена. Рассмотрим цепочку подпространств $X_n := \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$, где e_i — собственный вектор с собственным значением λ_i. Тогда $e_1, \ldots, e_n$ будут линейно независимыми, следовательно, $\{X_n\}$ — строго возрастающая цепочка. В силу леммы о почти перпендикуляре, найдутся единичные векторы $x_n \in X_n$, для которых $\rho\left(x_n, X_{n-1}\right) > \frac{1}{2}$. Разложим их по базису подпространств X_n: пусть $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Как легко видеть, $\frac{Ax_n}{\lambda_n} - x_n \in X_{n-1}$. По предположению, последовательность $\left\{\frac{x_n}{\lambda_n}\right\}$ ограничена. Подействуем на неё оператором A и увидим, что получается ёж. В самом деле, при $n < m$ имеем

$$v := \frac{Ax_n}{\lambda_n} - \frac{Ax_m}{\lambda_m} = \underbrace{\frac{Ax_n}{\lambda_n}}_{\in X_{m-1}} - x_m + \underbrace{x_m - \frac{Ax_m}{\lambda_m}}_{\in X_{m-1}},$$

значит, $\|v\| = \|-x_m + (\text{вектор из } X_{m-1})\| \geqslant \frac{1}{2}$, а это противоречит компактности оператора A. ■

3.2.3. Теорема Гильберта – Шмидта

В этом разделе A — компактный самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Введём обозначение $Q(x) := (Ax, x)$. Заметим, что это число всегда вещественно в силу самосопряжённости оператора.

Лемма 3.14. *Пусть $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$. Тогда $Q(x_n) \to Q(x)$.*

□ Имеем

$$\begin{aligned} |Q(x_n) - Q(x)| &= |(Ax_n, x_n) - (Ax, x)| = |(Ax_n, x_n) - (Ax, x_n) + (Ax, x_n) - (Ax, x)| \leqslant \\ &\leqslant |(Ax_n, x_n) - (Ax, x_n)| + |(Ax, x_n) - (Ax, x)| \overset{!}{=} \big|\big(A(x_n - x), x_n\big)\big| + \big|\big(x, A(x_n - x)\big)\big| \leqslant \\ &\leqslant \|A(x_n - x)\| \cdot \|x_n\| + \|x\| \cdot \|A(x_n - x)\| \to 0. \end{aligned}$$

Здесь равенство «!» следует из свойств самосопряжённого оператора, а сходимость к нулю вытекает из свойств компактных операторов и ограниченности $\|x_n\|$ (а это — следствие слабой сходимости). ■

Лемма 3.15. *Если $|Q(x)|$ достигает на единичной сфере своего максимума в точке x_0, то для любого вектора y такого, что $(x_0, y) = 0$, выполнено $(Ax_0, y) = 0$, то есть $\langle x_0\rangle^{\perp} \subset \langle Ax_0\rangle^{\perp}$.*

□ Рассмотрим вектор

$$v := \frac{x_0 + ay}{\|x_0 + ay\|}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Используя самосопряжённость оператора и теорему Пифагора для векторов x_0 и y, получаем

$$Q(v) = \frac{1}{1 + |a|^2 \cdot \|y\|^2} \cdot \big(Q(x_0) + 2\operatorname{Re}\big(\overline{a}(Ax_0, y)\big) + |a|^2 Q(y)\big).$$

Если $(Ax_0, y) \neq 0$, то выбирая a малым по модулю и подкручивая его аргумент, можно сделать так, что число $\operatorname{Re}\big(\overline{a}(Ax_0, y)\big)$ будет ненулевым вещественным и будет иметь тот же знак, что и $Q(x_0)$. Тогда $|Q(v)| > |Q(x_0)|$, а мы предположили, что x_0 максимизирует модуль Q. Полученное противоречие показывает, что $(Ax_0, y) = 0$. ■

Следствие 3.5. *Если $|Q(x)|$ достиг максимума на векторе x_0, то это собственный вектор оператора A.*

□ По лемме имеем $\langle x_0\rangle^\perp \subset \langle Ax_0\rangle^\perp$, поэтому $\big(\langle x_0\rangle^\perp\big)^\perp \supset \big(\langle Ax_0\rangle^\perp\big)^\perp$, то есть $\langle Ax_0\rangle \subset \langle x_0\rangle$. ■

Теорема 3.16 (Гильберта – Шмидта). *Компактный самосопряжённый оператор A в сепарабельном гильбертовом пространстве H обладает базисом из собственных векторов.*

□ Будем строить элементы базиса по индукции в порядке убывания модулей собственных значений.

Покажем, что на единичной сфере функция $|Q(x)|$ достигает своего максимума. Пусть $S := \sup |Q(x)|$, а x_n — последовательность единичных векторов, реализующая S. Поскольку единичный шар слабо предкомпактен, можно выбрать подпоследовательность $y_n \xrightarrow{\text{w}} y$. При этом в силу первой леммы получаем $|Q(y_n)| \to |Q(y)|$, поэтому $|Q(y)| = S$.

В качестве первого базисного вектора e_1 возьмём вектор y. Теперь рассмотрим $\langle e_1\rangle^\perp$. Оно в силу самосопряжённости оператора инвариантно относительно A. В нём повторим эту же процедуру, найдём e_2, и так далее. Если начиная с какого-то момента мы получаем $Q(x) \equiv 0$, это означает, что ненулевые собственные значения кончились, и мы попали в ядро оператора. Во противном случае получаем последовательность ненулевых собственных значений $\{\lambda_n\}$. Они, очевидно, сходятся к нулю. В самом деле, если бы их модули были ограничены снизу, то образы единичных базисных векторов образовывали бы «ежа», а не предкомпактное множество. ■

3.2.4. Интегральные операторы Гильберта – Шмидта

Определение. Рассмотрим функцию $K(x, y) \in \mathbf{C}[a, b]^2$ и оператор $A\colon L_1[a, b] \to L_1[a, b]$, заданный так:

$$A(f) := \int\limits_a^b K(x, y) f(y)\, dy.$$

Этот оператор называется *интегральным оператором Гильберта – Шмидта.* Функция K называется *ядром* интегрального оператора. Через A_K мы будем обозначать оператор с ядром K.

Задача 3.1. *Доказать, что $A_K^* = A_{\overline{K}}$.*

Для сокращения записи не будем писать пределы интегрирования по $[a, b]$. Все нормы для функций понимаются в смысле тех пространств, где эти функции живут.

Утверждение 3.17. *Интегральный оператор A с ядром K ограничен.*

□ Очевидным образом следует из ограниченности ядра $K(x, y)$. ■

Теорема 3.18. *Интегральный оператор Гильберта – Шмидта A с ядром K компактен.*

□ Идея доказательства состоит в том, чтобы приблизить оператор по норме конечномерными операторами: как мы знаем, конечномерный оператор компактен и предел компактных компактен. Разобьём квадрат сеткой $n \times n$, и вместо функции $K(x, y)$ возьмём ступенчатую функцию $K_n(x, y)$, которая на каждом квадратике сетки равна значению функции K в центре квадратика. Ясно, что при увеличении n имеем $\|K_n - K\| \to 0$ и потому $\|A_{K_n} - A_K\| \to 0$. Конечномерность образов операторов K_n очевидна. Значит, оператор A является пределом компактных операторов и потому сам компактен. ■

3.3. Теория Фредгольма

Три теоремы Фредгольма очень хорошо изложены в книге Колмогорова и Фомина. Не вижу смысла переписывать их сюда. Читайте гл. IX, §2, п. 4.

Замечание. В пятом издании этой книги на странице 469 (доказательство теорем Фредгольма, перед первой леммой) имеется опечатка. Там написано «... где A — комплексный оператор...» имелся в виду, конечно, компактный оператор.

В стёпинских лекциях (см. `http://dmvn.mexmat.net`) можно прочесть доказательство этих теорем для банаховых пространств.

Предметный указатель