

Подготовка к экзамену по курсу ”Линейная алгебра и геометрия”

(весна 2003г., лектор - Э.Б. Винберг)

13 июня 2003 г.

1 Базис и размерность векторного пространства.

Def. Векторным пространством над полем K называется аддитивная абелева группа V , в которой определена операция умножения на элементы поля K так, что выполнены следующие условия:

1. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ для всех $\lambda \in K$ и $a, b \in V$;
2. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для всех $\lambda, \mu \in K$ и $a \in V$;
3. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ для всех $\lambda, \mu \in K$ и $a \in V$;
4. $1 \cdot a = a$ для любого $a \in V$.

Элементы поля K называются скалярами (числами).

Простейшие следствия из аксиом:

1. $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in K$;
2. $\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b$ для всех $\lambda \in K$ и $a, b \in V$;
3. $0 \cdot a = 0$ для любого $a \in V$;
4. $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$ для всех $\lambda, \mu \in K$ и $a \in V$.

Def. Пусть есть система векторов $\{a_i\}_{i \in I}$ (не обязательно конечная). Линейной комбинацией этой системы векторов называется выражение $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \in K$, причем лишь конечное число λ_i отлично от нуля.

Def. Система векторов $\{a_i\}_{i \in I}$ называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Def. Базисом векторного пространства называется максимальная линейно независимая система его векторов (\Leftrightarrow линейно независимая система векторов, через которую любой вектор линейно выражается \Leftrightarrow система векторов, через которую всякий вектор линейно выражается единственным образом).

Коэффициенты этого выражения называются координатами вектора в базисе $\{e_i\}_{i \in I}$:

если $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, то x_i - координаты вектора x .

Def. Векторное пространство называется конечномерным, если в нём существует конечный базис.

Теорема. В конечномерном векторном пространстве все базисы равносильны.

Доказательство. Первый семестр: доказывается, что конечные эквивалентные линейно независимые системы строк равносильны, что следует из основной леммы о линейной зависимости. **Q.E.D.**

Def. Число векторов базиса пространства V называется размерностью данного пространства и обозначается $\dim V$.

Def. Отображение векторных пространств $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ (над одним и тем же полем K) называется изоморфизмом, если:

1. φ биективно;
2. φ сохраняет операции, то есть:
 - $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для всех $a, b \in V$;
 - $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$ для всех $\lambda \in K$ и $a \in V$.

Если φ - изоморфизм, то $\varphi(0) = 0$ и $\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(a_i)$, и поэтому φ сохраняет линейную зависимость систем векторов и переводит базис V_1 в базис V_2 .

Def. Векторные пространства называются изоморфными, если между ними существует хотя бы один изоморфизм.

Теорема. Векторные пространства конечной размерности изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Доказательство. 1) Если $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - изоморфизм и (e_1, \dots, e_n) - базис V_1 , то $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ - базис V_2 ;

2) Пусть $\dim V_1 = \dim V_2$, (e_1, \dots, e_n) - базис V_1 , (f_1, \dots, f_n) - базис V_2 . Определим $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ по формуле $\varphi\left(\sum_i \lambda_i e_i\right) = \sum_i \lambda_i f_i$. Очевидно, что φ - изоморфизм V_1 и V_2 . **Q.E.D.**

Следствие. Всякое n -мерное векторное пространство над K изоморфно K^n (изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому вектору строки из его координат в каком-либо фиксированном базисе).

2 Преобразования координат в векторном пространстве.

Пусть есть (e_1, \dots, e_n) - базис пространства V и (e'_1, \dots, e'_n) - система n векторов пространства V . Пусть эти вектора выражаются через базисные следующим образом:

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Матрица, составленная из чисел c_{ij} называется матрицей перехода $C = (c_{ij})$ от базиса (e_1, \dots, e_n) к системе векторов (e'_1, \dots, e'_n) . Матричная запись: $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

Теорема. (e'_1, \dots, e'_n) - базис \Leftrightarrow матрица C невырождена.

Доказательство. Установим изоморфизм между пространствами V и K^n , поставив в соответствие каждому вектору столбец его координат в базисе (e_1, \dots, e_n) . При этом изоморфизме векторам e'_1, e'_2, \dots, e'_n будут соответствовать столбцы матрицы C . Система (e'_1, \dots, e'_n) линейно независима \Leftrightarrow столбцы матрицы C линейно независимы $\Leftrightarrow C$ невырождена. **Q.E.D.**

Если C невырождена, то $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1}$. Выведем формулы преобразования координат. Пусть $x = \sum_i x_i e_i$; $x' = \sum_j x'_j e'_j$.

Тогда $x = \sum_j x'_j e'_j = \sum_{i,j} x'_j c_{ij} e_i = \sum_i \left(\sum_j c_{ij} x'_j \right) e_i$, значит

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

В матричной форме: пусть $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$, $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^\top$. Тогда $x = (e_1, \dots, e_n) X = (e'_1, \dots, e'_n) X'$, значит $(e_1, \dots, e_n) X = (e_1, \dots, e_n) C X' \Rightarrow X = C X'$, таким образом

$$X' = C^{-1} X.$$

3 Подпространства как множества решений систем однородных линейных уравнений.

Def. Подмножество U векторного пространства V называется подпространством, если:

1. $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$;
2. $a \in U \Rightarrow \lambda a \in U \quad \forall \lambda \in K$;
3. $0 \in U$ (непустота U).

Def. Пусть $S \subset V$. Линейной оболочкой S называется множество

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_i \lambda_i x_i : x_i \in S, \lambda_i \in K \right\}.$$

Очевидно, что $\langle S \rangle$ - подпространство.

Более того, это наименьшее подпространство, содержащее S (в том смысле, что любое подпространство, содержащее S , должно содержать и $\langle S \rangle$), причём $\dim S = \text{rk } S$, и любая максимальная линейно независимая подсистема в S является базисом $\langle S \rangle$.

Def. Базис (e_1, \dots, e_n) пространства V называется согласованным с подпространством U , если U натянуто на какие-то из базисных векторов.

Теорема. Для любого подпространства U существует согласованный с ним базис пространства V .

Доказательство. Пусть (e_1, \dots, e_k) - базис U . Дополним его до базиса (e_1, \dots, e_n) всего пространства. Это и будет искомым базисом пространства V . **Q.E.D.**

Следствие. $\dim U \leq \dim V$, причём $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$.

Теорема. Всякое подпространство $U \subset K^n$ есть множество решений некоторой системы однородных линейных уравнений.

Доказательство. Пусть (e_1, \dots, e_n) - стандартный базис пространства K^n , (e'_1, \dots, e'_n) - такой базис, что $U = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$. Тогда в базисе (e'_1, \dots, e'_n) U задаётся так:

$$U = \left\{ x = \sum_j x'_j e'_j, \quad x'_{k+1} = \dots = x'_n = 0 \right\}.$$

Пусть $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, тогда $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Подставляя в уравнения, задающие подпространство U в базисе (e'_1, \dots, e'_n) выражения координат x'_1, x'_2, \dots, x'_n через координаты x_1, x_2, \dots, x_n , получим систему однородных линейных уравнений относительно x_1, x_2, \dots, x_n , задающую U в стандартном базисе (e_1, \dots, e_n) пространства V . **Q.E.D.**

странство U в базисе (e'_1, \dots, e'_n) выражения координат x'_1, x'_2, \dots, x'_n через координаты x_1, x_2, \dots, x_n , получим систему однородных линейных уравнений относительно x_1, x_2, \dots, x_n , задающую U в стандартном базисе (e_1, \dots, e_n) пространства V . **Q.E.D.**

4 Связь между размерностями суммы и пересечения двух подпространств.

Теорема. Для любых двух подпространств $U, W \subset V$ существует базис пространства V , согласованный с ними обоими.

Доказательство. Рассмотрим $U \cap W$ - также подпространство в V . Пусть (e_1, \dots, e_p) - базис $U \cap W$. Дополним его до базиса $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_k)$ подпространства U и его же - до базиса $(e_1, \dots, e_p, e_{k+1}, \dots, e_{k+l-p})$ подпространства W (здесь $\dim U = k$, $\dim W = l$). Докажем, что система векторов e_1, \dots, e_{k+l-p} линейно независима (тогда дополним её до базиса пространства V , он и будет искомым).

Предположим, что $\sum_{i=1}^{k+l-p} \lambda_i e_i = 0$. Тогда $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = - \sum_{j=1}^{k+l-p} \lambda_j e_j$. Правая часть равенства - это линейная комбинация базисных векторов подпространства U , левая - подпространства W . Значит

$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in U \cap W$, поэтому $x = \sum_{i=1}^p \mu_i e_i = - \sum_{j=k+1}^{k+l-p} \lambda_j e_j$ (разложение вектора $\in U \cap W$ по базису этого подпространства).

Переносим всё в одну часть, получим $\sum_{i=1}^p \mu_i e_i + \sum_{j=k+1}^{k+l-p} \lambda_j e_j = 0$. Значит, $\mu_i = \lambda_j = 0$ ($i = 1, \dots, p; j = k+1, \dots, k+l-p$) $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$). Поэтому векторы (e_1, \dots, e_{k+l-p}) линейно независимы. **Q.E.D.**

Def. Суммой подпространств U и $W \in V$ называется подпространство $U + W = \langle U \cup W \rangle$ - наименьшее подпространство, содержащее U и W . Ясно, что $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ (такие векторы должны быть в $U + W$, но и сами они уже образуют подпространство).

Следствие. $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Доказательство. $\dim(U + W) = k + l - p = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ - в обозначениях предыдущей теоремы: $k + l - p$ линейно независимых векторов составляют базис $U + W$. **Q.E.D.**

Для трёх подпространств, вообще говоря, не существует согласованного с ними базиса (рассмотреть 3 одномерных подпространства в \mathbb{R}^2).

5 Линейная независимость подпространств.

Базис и размерность прямой суммы

Def. Подпространства $U_1, \dots, U_k \subset V$ называются линейно независимыми, если

$$u_1 + \dots + u_k = 0 \quad (u_i \in U_i) \Rightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0.$$

Теорема. Два подпространства U и W линейно независимы $\Leftrightarrow U \cap W = 0$.

Доказательство. $u + w = 0 \Leftrightarrow u = -w \in U \cap W$. Если $U \cap W = 0$, то $u = w = 0$. Обратно, если существует ненулевой вектор $z \in U \cap W$, то, сложив его с противоположным, получим $z + (-z) = 0$, где $z \in U$, $-z \in W$.

Q.E.D.

Для трёх подпространств если их попарные пересечения равны $\{0\}$, то это не означает их линейной независимости.

Теорема. Если подпространства U_1, \dots, U_k линейно независимы, то размерность их суммы равна сумме их размерностей: $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

Доказательство. Пусть $(e_{i1}, \dots, e_{in_i})$ - базис в U_i ($i = 1, \dots, k$), $\dim U_i = n_i$. Докажем, что

$(e) = (e_{ij} : i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n_i)$ - базис $U_1 + \dots + U_k$:

1) Каждый вектор $u \in U_1 + \dots + U_k$ имеет вид $u = u_1 + \dots + u_k$ ($u_i \in U_i$) \Rightarrow выражается через (e) ;

2) Векторы (e) линейно независимы. Действительно, предположим, что $\sum_{i,j} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$. Тогда

$$\sum_i \left(\sum_j \lambda_{ij} e_{ij} \right) = 0; \text{ но } \forall i \sum_j \lambda_{ij} e_{ij} \in U_i \Rightarrow \sum_j \lambda_{ij} e_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i \forall j \lambda_{ij} = 0 \text{ (так как мы имеем линейную}$$

комбинацию базисных векторов каждого из подпространств). **Q.E.D.**

Def. Сумма линейно независимых подпространств называется прямой суммой. Обозначается:

$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$. Если $U_1 \oplus \dots \oplus U_k = V$, то говорят, что пространство V разложено в прямую сумму подпространств U_1, \dots, U_k . В этом случае $\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$. Каждый вектор из V единственным образом представляется в виде $x = x_1 + \dots + x_k$, где $x_i \in U_i$. Вектор x_i называется проекцией x на U_i и обозначается $x_i = \text{pr}_{U_i} x$ что зависит от всего разложения пространства V в прямую сумму.

6 Линейные отображения, их запись в координатах.

Образ и ядро линейного отображения, связь между их размерностями.

Def. Отображение $\varphi : V \rightarrow U$ векторных пространств над полем K называется линейным, если:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для любых $x, y \in V$;
2. $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ для любых $\lambda \in K$ и $x \in V$.

Свойства:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_k \varphi(x_k);$$

Линейно зависящая система векторов переходит в линейно зависящую. Линейное отображение конечномерных векторных пространств полностью определяется образами базисных векторов:

Пусть (e_1, \dots, e_n) - базис пространства V . Линейное отображение $\varphi : V \rightarrow U$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_j) = u_j$. Действительно, $x = \sum_j x_j e_j \Rightarrow \varphi(x) = \sum_j x_j u_j$. Обратно, если заданы любые векторы $u_j \in U$, то

можно определить линейное отображение $\varphi : V \rightarrow U$ по формуле $x = \sum_j x_j e_j \Rightarrow \varphi(x) = \sum_j x_j u_j$. Оно будет

линейным и $\varphi(e_j) = u_j$.

Если в пространстве U выбран базис (f_1, \dots, f_m) , то u_j можно разложить по этому базису:

$$u_j = \sum_i a_{ij} f_i. \text{ Матрица } A = (a_{ij}) \text{ называется матрицей линейного отображения } \varphi \text{ относительно выбранных}$$

базисов пространств V и U . Координаты образов базисных векторов пишутся по столбцам, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m)A$.

$$x = \sum_j x_j e_j \in V \Rightarrow \varphi(x) = \sum_j x_j u_j = \sum_{i,j} x_j a_{ij} f_i = \sum_i \left(\sum_j x_j a_{ij} \right) f_i,$$

значит, если обозначить $\varphi(x) = y = \sum_i y_i f_i$, то $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ ($i = 1, \dots, m$).

В матричной форме $Y = AX$, где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^\top$.

Def. Пусть $\varphi : V \rightarrow U$. Образом φ называется подмножество $\text{Im } \varphi = \{\varphi(x) : x \in V\} \subset U$; ядром φ - подмножество $\text{Ker } \varphi = \{x \in V : \varphi(x) = 0\} \subset V$.

Теорема.

1. $\text{Im } \varphi$ - подпространство в U , $\dim \text{Im } \varphi = \text{rk } A$, где A - матрица φ ;
2. $\text{Ker } \varphi$ - подпространство в V , $\dim \text{Ker } \varphi = \dim V - \text{rk } A$;
3. $\forall b = \varphi(a) \in \text{Im } \varphi \quad \varphi^{-1}(b) = a + \text{Ker } \varphi$ (полный прообраз равен смежному классу по ядру, в частности, φ инъективно $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = 0$).

Доказательство.

1. $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \in \text{Im } \varphi$;
 $\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) \in \text{Im } \varphi$;
 $0 = \varphi(0) \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \text{Im } \varphi$ - подпространство.

$\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \Rightarrow \dim \text{Im } \varphi = \text{rk}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$.

Но система векторов $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ - это система столбцов матрицы A .

2. $\varphi(x) = \varphi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0$;
 $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = 0$;
 $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \text{Ker } \varphi$ - подпространство.

Пусть (e_1, \dots, e_k) - базис $\text{Ker } \varphi$, (e_1, \dots, e_n) - базис V . Тогда $\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$. Докажем, что $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Пусть $\lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0$. Тогда

$$\varphi(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0,$$

значит $\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ (иначе базис V линейно зависим). Таким образом $\dim \text{Im } \varphi = n - k = \dim V - \dim \text{Ker } \varphi$.

3. Пусть $b = \varphi(a) \in \text{Im } \varphi$.
 $\forall y \in \text{Ker } \varphi \quad \varphi(a + y) = \varphi(a) + \varphi(y) = b$.

Обратно, $\varphi(x) = b \Rightarrow \varphi(x - a) = \varphi(x) - \varphi(a) = 0 \Rightarrow x - a = y \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow x = a + y, y \in \text{Ker } \varphi$. Значит, $\varphi^{-1}(b) = a + \text{Ker } \varphi$. В частности, φ - инъективно $\Leftrightarrow |\varphi^{-1}(a)| = 1 \Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = 0$. **Q.E.D.**

7 Линейные функции, их запись в координатах.

Сопряжённое пространство и сопряжённые базисы.

Def. Функция α на векторном пространстве V со значениями в поле K называется линейной, если:

1. $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y) \quad \forall x, y \in V$;
2. $\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x) \quad \forall \lambda \in K, \forall x \in V$.

Это специальный случай линейного отображения - отображение из V в поле K , рассматриваемое как векторное пространство над самим собой ($\dim = 1$).

Запись линейной функции в координатах:

Пусть (e_1, \dots, e_n) - базис V , $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \alpha(x) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha(e_i)$. Положим $a_i = \alpha(e_i)$, тогда

$$\alpha(x) = \sum_i a_i e_i.$$

Числа a_i называются координатами линейной функции α в базисе (e_1, \dots, e_n) .

Преобразования координат при переходе к другому базису:

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C \Rightarrow (a'_1, \dots, a'_n) = (a_1, \dots, a_n) C.$$

Если $\alpha \neq 0$, то можно выбрать базис, в котором $\alpha(x) = x_1$. Действительно, $\dim \text{Ker } \alpha = n - 1$, пусть (e_2, \dots, e_n) - базис $\text{Ker } \alpha$. Возьмём $e_1 \notin \text{Ker } \alpha$, такой, что $\alpha(e_1) = 1$. Тогда (e_1, \dots, e_n) - базис V , и в нём $\alpha(x) = x_1$.

Пространство линейных функций $L(V, K)$ образует линейное (векторное) пространство над K .

Оно обозначается V^* и называется сопряжённым к V пространством.

Пусть (e_1, \dots, e_n) - базис V . Рассмотрим координатные функции $\varepsilon_i(x) = x_i$.

Теорема. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ - базис V^* .

Доказательство. $\alpha(x) = \sum_i a_i x_i \Rightarrow \alpha = \sum_i a_i \varepsilon_i$. С другой стороны, если $\sum a_i \varepsilon_i = 0$, то

$$\left(\sum_i a_i \varepsilon_i \right) (e_j) = a_j = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

Следствие. Для конечномерного пространства $\dim V^* = \dim V$.

Def. Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ называется сопряжённым к базису (e_1, \dots, e_n) .

8 Канонический изоморфизм конечномерного векторного пространства и второго сопряжённого пространства.

Рассмотрим отображение $f : V \rightarrow V^{**}$, $x \mapsto f_x$, такое, что $f_x(\alpha) = \alpha(x)$.

Теорема. f - изоморфизм.

Доказательство.

1. f линейно:

$$f_{x+y}(\alpha) = \alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y) = f_x(\alpha) + f_y(\alpha), \text{ то есть } f_{x+y} = f_x + f_y;$$

$$f_{\lambda x}(\alpha) = \alpha(\lambda x) = \lambda \alpha(x) = \lambda f_x(\alpha), \text{ то есть } f_{\lambda x} = \lambda f_x.$$

2. $\dim V = \dim V^{**}$, поэтому достаточно доказать, что $\text{Ker } f = 0$.

$$x \in \text{Ker } f \Rightarrow f_x(\alpha) = 0 \forall \alpha \in V^* \Leftrightarrow \alpha(x) = 0 \forall \alpha \in V^* \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

Следствие. Всякий базис пространства V^* сопряжён некоторому базису пространства V .

Замечание. Если $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in V^*$, причём $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, то (e_1, \dots, e_n) и $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ - сопряжённые базисы.

Действительно, если $\sum_i \lambda_i e_i = 0$, то рассмотрев значение ε_j от обеих частей равенства, получим $\lambda_j = 0 \forall j \Rightarrow (e_1, \dots, e_n)$ - базис в $V \Rightarrow (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ - сопряжённый ему базис V^* .

9 Билинейные функции, их запись в координатах.

Изменение матрицы билинейной функции при переходе к другому базису.

Def. Билинейной функцией α на векторном пространстве V над полем K называется отображение $\alpha : V \times V \rightarrow K$, линейное по каждому аргументу.

Запись в координатах:

Пусть (e_1, \dots, e_n) - базис пространства V , $x = \sum_i x_i e_i$, $y = \sum_j y_j e_j$.

$$\alpha(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j \cdot \alpha(e_i, e_j). \text{ Положим } a_{ij} = \alpha(e_i, e_j), \text{ тогда } \alpha(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j.$$

Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей билинейной функции α в базисе (e_1, \dots, e_n) . В матричной форме:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha(x, y) = X^T A Y.$$

При переходе к другому базису (e'_1, \dots, e'_n) :

$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C \Rightarrow X = C X', Y = C Y'$. Тогда $\alpha(x, y) = X^T A Y = X'^T C^T A C Y'$. Таким образом,

$$A' = C^T A C.$$

Def. Ядром билинейной функции α называется (очевидно, подпространство)

$$\text{Ker } \alpha = \{y \in V : \alpha(x, y) = 0 \forall x \in V\}.$$

Теорема. $\dim \text{Ker } \alpha = \dim V - \text{rk } A$, где A - матрица функции α в каком-либо базисе.

Доказательство. $\alpha(x, y) = 0 \forall x \Leftrightarrow \alpha(e_i, y) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$.

Но $\alpha(e_i, y) = \sum_j a_{ij}y_j$, значит $\text{Ker } \alpha$ задаётся системой однородных линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Следовательно, $\dim \text{Ker } \alpha = n - \text{rk } A$ **Q.E.D.**

10 Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметрической или кососимметрической билинейной функции.

Def. Билинейная функция α называется симметрической (кососимметрической), если $\forall x, y \in V \quad \alpha(x, y) = \alpha(y, x)$ ($\alpha(x, y) = -\alpha(y, x)$, $\text{char } K \neq 2$).

Def. Векторы x и y называются ортогональными относительно симметрической или кососимметрической билинейной функции α , если $\alpha(x, y) = 0$.

Если α кососимметрическая, то каждый вектор ортогонален сам себе: $\alpha(x, x) = -\alpha(x, x) = 0$.

Def. Ортогональным дополнением к подпространству $U \subset V$ относительно симметрической или кососимметрической билинейной функции α называется подпространство $U^\perp = \{y \in V : \alpha(x, y) = 0 \forall x \in U\}$. В частности, $V^\perp = \text{Ker } \alpha$.

Теорема. $\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$.

Если же α невырождена, то $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$, и $(U^\perp)^\perp = U$.

Доказательство. Запишем уравнения U в координатах.

Заметим, что $U^\perp = \{y \in V : \alpha(e_i, y) = 0 \forall i\}$ (здесь e_1, \dots, e_k - базис U). Дополним (e_1, \dots, e_k) до базиса (e_1, \dots, e_n) всего пространства V . В этом базисе U^\perp задаётся уравнениями:

$$\sum_j a_{ij}y_j = 0 \quad (i = 1, \dots, k).$$

Значит, $\dim U^\perp \geq n - k = \dim V - \dim U$. Если же α невырождена, то $A = (a_{ij})$ - невырожденная матрица, следовательно её первые k строк линейно независимы, поэтому

$$\dim U^\perp = n - k = \dim V - \dim U.$$

Для доказательства того, что $(U^\perp)^\perp = U$, достаточно заметить, что $(U^\perp)^\perp \supset U$

и размерности U и $(U^\perp)^\perp$ в случае невырожденности α совпадают, поэтому $(U^\perp)^\perp = U$. **Q.E.D.**

Def. Подпространство $U \subset V$ называется невырожденным относительно билинейной функции α , если функция $\alpha|_U$ невырождена.

Теорема. $V = U \oplus U^\perp \Leftrightarrow U$ невырождено относительно α .

Доказательство.

1. U невырождено $\Leftrightarrow U \cap U^\perp = 0$ - ядро $\alpha|_U$ нулевое;
2. $V = U \oplus U^\perp \Rightarrow U \cap U^\perp = 0 \Rightarrow U$ невырождено;
3. U невырождено $\Rightarrow U \cap U^\perp = 0 \Rightarrow$ сумма $U + U^\perp$ прямая.

$$\dim(U \oplus U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp \geq \dim V \Rightarrow U \oplus U^\perp = V \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

11 Связь между симметрическими билинейными и квадратичными функциями. Существование ортогонального базиса для симметрической билинейной функции.

Def. Базис (e_1, \dots, e_n) называется ортогональным относительно билинейной функции α , если в этом базисе матрица её имеет диагональный вид. В ортогональном базисе билинейная функция записывается как $\alpha(x, y) = \sum_i a_i x_i y_i = a_1 x_1 y_1 + \dots + a_n x_n y_n$.

Def. Квадратичной функцией, ассоциированной с симметрической билинейной функцией α , называется функция $q(x) = \alpha(x, x)$. В координатах: $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$. Понятно, что α однозначно восстанавливается по q : $\alpha(x, y) =$

$$\frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)).$$

Теорема. Для всякой симметрической билинейной функции α существует ортогональный базис.

Доказательство. Индукцией по $n = \dim V$.

При $n = 1$ доказывать нечего - любой базис ортогональный.

При $n > 1$ если $\alpha \equiv 0$, то доказывать нечего.

Пусть $n > 1$ и $\alpha \neq 0$. Тогда и $q \neq 0$, то есть $\exists e_1 \in V : q(e_1) \neq 0$. Подпространство $\langle e_1 \rangle$ невырождено относительно $\alpha \Rightarrow V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$, $\dim \langle e_1 \rangle^\perp = n - 1$. По предположению индукции в $\langle e_1 \rangle^\perp$ существует ортогональный базис (e_2, \dots, e_n) . Значит (e_1, \dots, e_n) - ортогональный базис V . **Q.E.D.**

12 Нормальный вид вещественной квадратичной функции. Закон инерции.

В ортогональном базисе матрица симметрической билинейной функции имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

1. За счёт перестановки базисных векторов можно переставлять числа a_i ;
2. За счёт умножения базисных векторов на ненулевые элементы поля K , можно умножить a_i на квадраты элементов поля.

Число ненулевых коэффициентов a_i равно рангу $\text{rk } q$ билинейной формы (и не зависит от базиса).

Если $K = \mathbb{C}$, то можно добиться того, чтобы $a_i \in \{0, 1\}$. Получим нормальный вид

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_{\text{rk } q}^2.$$

Если $K = \mathbb{R}$, то можно добиться того, чтобы $a_i \in \{0, \pm 1\}$. Получим нормальный вид

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 \quad (k+l = \text{rk } q).$$

Def. Квадратичная функция q называется положительно определённой, если $\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$. Квадратичная положительно определена \Leftrightarrow её нормальный вид есть $x_1^2 + \dots + x_n^2$. То есть для положительно определённой квадратичной функции её нормальный вид определяется однозначно. Понятно, что если q положительно определена, то $\det q > 0$ в любом базисе (потому что в нормальном виде $\det q = 1$).

Теорема (Закон инерции). Числа k и l в нормальном виде квадратичной функции не зависят от выбора базиса, в котором эта функция имеет нормальный вид.

Доказательство. Достаточно доказать, что k не зависит от базиса. Докажем, что k есть максимальная размерность подпространства, на котором данная квадратичная функция q положительно определена. Пусть $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$ в базисе (e_1, \dots, e_n) . На подпространстве $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ q положительно определена.

Пусть теперь q положительно определена на каком-то подпространстве U и $\dim U > k$. Рассмотрим подпространство $W = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$, $\dim W = n - k$. Но так как $\dim U + \dim W > n$, $U \cap W \neq 0$.

Пусть $0 \neq x \in U \cap W$. Тогда $q(x) > 0$ с одной стороны и $q(x) = -x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 \leq 0$. **Q.E.D.**

Def. Число k называется положительным индексом инерции квадратичной функции q , число l - отрицательным.

13 Процесс ортогонализации. Нахождение индексов инерции квадратичной функции методом Якоби.

Положим $V_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$. Матрица функции $\alpha|_{V_k}$ в базисе (e_1, \dots, e_k) - это левый верхний угол порядка k матрицы A . Обозначим эту матрицу через A_k , её определитель - через δ_k .

Теорема (Процесс ортогонализации Грама - Шмидта). Предположим, что $\alpha|_{V_k}$ - невырождена, то есть $\delta_k \neq 0$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда существует единственный ортогональный базис (f_1, \dots, f_n) пространства V , для которого $f_k \in e_k + V_{k-1}$ ($k = 1, \dots, n$), при этом $q(f_k) = \delta_k / \delta_{k-1}$, если считать $\delta_0 = 1$ и $V_0 = 0$.

Теорема. Для любой кососимметрической билинейной функции α существует симплектический базис.

Доказательство. Индукцией по $n = \dim V$.

Если $n = 0$ или 1 , то доказывать нечего.

Если $n \geq 2$, но $\alpha \equiv 0$, то тоже доказывать нечего.

Если $n \geq 2$, и $\alpha \neq 0$, то $\exists e_1, e_2$ такие, что $\alpha(e_1, e_2) \neq 0$. Нормируя, добьёмся того, чтобы $\alpha(e_1, e_2) = 1$. Матрица $\alpha|_{\langle e_1, e_2 \rangle^\perp}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

значит, $U = \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$ - невырожденное подпространство, поэтому $V = U \oplus U^\perp$. По предположению индукции, в U^\perp существует симплектический базис (e_3, e_4, \dots, e_n) . Тогда (e_1, \dots, e_n) - искомый симплектический базис всего пространства. **Q.E.D.**

16 Евклидовы пространства.

Длина вектора и угол между векторами.

Def. Евклидовым векторным пространством называется вещественное векторное пространство, в котором фиксирована некоторая положительно определённая билинейная функция, называемая скалярным умножением и обозначаемая (\cdot, \cdot) .

Def. Длиной вектора x в евклидовом векторном пространстве называется арифметическое значение квадратного корня из его скалярного квадрата: $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Свойство длины: $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$.

Def. Углом между ненулевыми векторами x и y в евклидовом векторном пространстве называется такой угол α ($0 \leq \alpha \leq \pi$), косинус которого равен $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$. Корректность этого определения вытекает из следующей теоремы:

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского). Для любых векторов $x, y \in V$ выполняется неравенство $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$, причём равенство достигается $\Leftrightarrow x$ и y пропорциональны.

Доказательство. Если $y = \lambda x$, то $|(x, y)| = |\lambda| \cdot |x|^2 = |x| \cdot |y|$.

Пусть теперь x и y непропорциональны. Тогда они составляют базис подпространства $U = \langle x, y \rangle$. Ограничение $(\cdot, \cdot)|_U$ является положительно определённой симметрической билинейной функцией, значит

$$\begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix} > 0, \quad \Rightarrow \quad |x|^2 \cdot |y|^2 - (x, y)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|, \quad \text{Q.E.D}$$

Верно неравенство треугольника $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Из общей теории следует, что в любом конечномерном евклидовом векторном пространстве существует ортонормированный базис. В этом базисе скалярное умножение принимает вид:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Def. Изоморфизмом евклидовых пространств называется отображение, которое является изоморфизмом векторных пространств и сохраняет скалярное умножение. Понятно, что евклидовы пространства одинаковой конечной размерности изоморфны (возьмём два ортонормированных базиса, установим изоморфизм, ассоциированный с ними, тогда и скалярное произведение будет сохраняться).

17 Матрица и определитель Грама

системы векторов евклидова пространства.

Def. Пусть V - евклидово пространство и $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$. Матрицей Грама этой системы векторов называется матрица

$$G(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix}.$$

Теорема. $\det G(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq 0$, причём равенство достигается \Leftrightarrow

\Leftrightarrow векторы a_1, a_2, \dots, a_k линейно зависимы.

Доказательство.

- Пусть a_1, a_2, \dots, a_k линейно зависимы, то есть $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0$, тогда для каждого j
 $\sum_i \lambda_i (a_i, a_j) = 0$, значит, строки матрицы Грама линейно зависимы с теми же коэффициентами, значит $\det G(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0$;
- Пусть a_1, a_2, \dots, a_k линейно независимы. Тогда они составляют базис подпространства $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$.
 $G(a_1, a_2, \dots, a_k)$ - это матрица ограничения $(\cdot, \cdot)|_U$ в этом базисе, значит $\det G(a_1, a_2, \dots, a_k) > 0$. **Q.E.D.**

18 Ортонормированные базисы евклидова пространства и ортогональные матрицы.

Теорема. Пусть (e_1, \dots, e_n) - ортонормированный базис пространства V , и пусть $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$. Тогда (e'_1, \dots, e'_n) - также ортонормированный базис $\Leftrightarrow C^{-1} = C^T$ (такие матрицы называются ортогональными).
Доказательство. $G(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = C^T G(e_1, e_2, \dots, e_n)C = C^T C$, как матрицы скалярного умножения в двух базисах. Поэтому базис (e'_1, \dots, e'_n) является ортонормированным $\Leftrightarrow G(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = E \Leftrightarrow C^T = C^{-1}$ **Q.E.D.**

19 Расстояние от вектора до подпространства, его выражение через определители Грама.

Для всякого подпространства $U \in V$ евклидова векторного пространства $U \oplus U^\perp = V$, так как U - невырождено относительно скалярного умножения. Значит, $\forall x \in V$ единственным образом представим в виде $x = y + z$, где $y \in U, z \in U^\perp$. Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство U , вектор z - ортогональной составляющей вектора x :
 $y = \text{pr}_U x, z = \text{ort}_U x$.

Если (e_1, e_2, \dots, e_k) - ортонормированный базис в U , то $\text{pr}_U x = \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i$.

Действительно, $\left(x - \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i ; e_j \right) = 0 \forall j$, значит, разность принадлежит U^\perp .

Если же (e_1, e_2, \dots, e_k) - ортогональный базис подпространства U , то $\text{pr}_U x = \sum_{i=1}^k \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

(действительно, рассмотрим $e'_i = \frac{e_i}{\sqrt{(e_i, e_i)}}$ и воспользуемся предыдущим).

Def. Расстояние между векторами: $\rho(x, y) = |x - y|$, расстояние между подмножествами:

$$\rho(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} \rho(x, y).$$

Теорема. Пусть $U \subset V$ - подпространство, $x \in V$. Тогда $\rho(x, U) = |\text{ort}_U x|$, причём единственный ближайший к вектору x вектор подпространства U есть $\text{pr}_U x$.

Доказательство. Пусть $x = y + z$, где $y \in U, z \in U^\perp$. Пусть $y' \in U, y' \neq y$.

Надо доказать, что $\rho(x, y') > \rho(x, y)$.

$$x - y' = (x - y) + (y - y') = z + u, \text{ где } u \in U, \text{ort}_U x = z \perp u. \Rightarrow |x - y'| = \sqrt{|z|^2 + |u|^2} > |z| \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Следствие. Из процесса ортогонализации вытекает, что если $(e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$ - произвольный базис в U , то

$$(\rho(x, U))^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_{k-1}, x)}{\det G(e_1, \dots, e_{k-1})}.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим процесс ортогонализации произвольного базиса

(e_1, \dots, e_n) пространства V (можно ортогонализировать, так как все угловые миноры положительны). Пусть получается базис (f_1, \dots, f_n) . Понятно, что $f_k = \text{ort}_{V_{k-1}} e_k$, где $V_{k-1} = \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle = \langle f_1, \dots, f_{k-1} \rangle$. Тогда

$$f_k = e_k - \text{pr}_{V_{k-1}} e_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e_k, f_i)}{(f_i, f_i)} f_i, \text{ и } (f_k, f_k)^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k)}{\det G(e_1, \dots, e_{k-1})}.$$

Теперь, полагая $e_k = x$, (в случае $x \in U$ всё и так очевидно) получаем то, что надо. **Q.E.D.**

20 Объём параллелепипеда в евклидовом пространстве (две формулы).

Def. Параллелепипедом, натянутым на базис (a_1, \dots, a_n) называется множество

$$P(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_i \lambda_i a_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

Def. Объёмом n -мерного параллелепипеда $P(a_1, \dots, a_n)$ называется произведение объёма "основания" $P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ на "высоту" $h = |\text{ort}_{\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle} a_n|$, при $n = 1$ $\text{vol } P(a_1) = |a_1|$.

Теорема. $(\text{vol } P(a_1, \dots, a_n))^2 = \det G(a_1, \dots, a_n)$.

Доказательство. Индукцией по n .

$n = 1$: $(\text{vol } P(a_1))^2 = |a_1|^2 = (a_1, a_1) = \det G(a_1)$;

$n > 1$: $(\text{vol } P(a_1, \dots, a_n))^2 = (\text{vol } P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}))^2 \cdot \rho(a_n; \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle)^2 =$

$\det G(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \cdot \frac{\det G(a_1, \dots, a_n)}{\det G(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})} = \det G(a_1, \dots, a_n)$. **Q.E.D.**

Следствие. $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n)$ не зависит от нумерации векторов a_1, a_2, \dots, a_n .

Теорема. Пусть (e_1, \dots, e_n) - ортонормированный базис пространства V ,

$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) A$. Тогда $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$.

Доказательство. $G(a_1, \dots, a_n)$ - матрица скалярного умножения в базисе (a_1, \dots, a_n) .

$G(a_1, \dots, a_n) = A^\top G(e_1, \dots, e_n) A = A^\top A$. $\det G(a_1, \dots, a_n) = (\det A)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$ **Q.E.D.**

21 Полуторалинейные функции, их запись в координатах. Изменение матрицы полуторалинейной функции при переходе к другому базису. Эрмитовы и косоэрмитовы полуторалинейные функции, связь между ними.

Def. Полуторалинейной функцией на комплексном пространстве V называется функция $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, обладающая линейностью по второму аргументу и антилинейностью по первому, то есть:

1. $\alpha(x_1 + x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \alpha(x_2, y)$;
2. $\alpha(\lambda x, y) = \bar{\lambda} \alpha(x, y)$.

Пусть (e_1, \dots, e_n) - базис пространства V . Тогда если $x = \sum_i x_i e_i$, $y = \sum_j y_j e_j$, то

$$\alpha(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i y_j, \quad \text{где } a_{ij} = \alpha(e_i, e_j).$$

Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей полуторалинейной функции α в базисе (e_1, \dots, e_n) (понятно, что любой комплексной матрице соответствует полуторалинейная функция).

$$\alpha(x, y) = X^* A Y, \quad \text{где } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top, Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top, X^* = \overline{X}^\top.$$

Свойства:

1. $(C + D)^* = C^* + D^*$;
2. $(\lambda C)^* = \bar{\lambda} C^*$;
3. $(CD)^* = D^* C^*$.

Рассмотрим переход к другому базису: $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C$. Преобразования координат: $X = CX'$, $Y = CY'$.

$$\alpha(x, y) = X^* A Y = (CX')^* A (CY') = X'^* (C^* A C) Y'.$$

Def. Ядром полуторалинейной функции α называется подпространство

$$\text{Ker } \alpha = \{y \in V : \alpha(x, y) = 0 \forall x \in V\} = \{y \in V : \alpha(e_i, y) = 0 \forall i = 1, \dots, n\}$$

Теорема. $\dim \text{Ker } \alpha = \dim V - \text{rk } A$ **Q.E.D.** (доказательство аналогично)

Def. Полуторалинейная функция называется эрмитовой (косоэрмитовой), если $\alpha(x, y) = \overline{\alpha(y, x)}$ (соответственно, $\alpha(x, y) = -\overline{\alpha(y, x)}$).

Очевидно, что полуторалинейная функция α эрмитова \Leftrightarrow функция $i\alpha$ косоэрмитова.

22 Нормальный вид эрмитовой функции. Закон инерции.

Будем рассматривать только эрмитовы полуторалинейные функции.

Def. Векторы x и y называются ортогональными относительно эрмитовой полуторалинейной функции α , если $\alpha(x, y) = 0$. Ортогональным дополнением к подпространству U называется подпространство $U^\perp = \{y \in V : \alpha(x, y) = 0 \forall x \in U\}$.

Теорема. $V = U \oplus U^\perp \Leftrightarrow U$ - невырожденное подпространство (относительно α). **Q.E.D.**

Def. Квадратичной эрмитовой функцией, ассоциированной с эрмитовой полуторалинейной функцией α называется $q(x) = \alpha(x, x)$. Понятно, что $\overline{q(x)} = \overline{\alpha(x, x)} = \alpha(x, x) = q(x) \rightarrow q(x) \in \mathbb{R}$.

Теорема. Эрмитова полуторалинейная функция α однозначно восстанавливается по своей квадратичной функции q .

Доказательство. $q(x+y) = \alpha(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + \alpha(x, y) + \overline{\alpha(x, y)}$.

$q(x+iy) = \alpha(x+iy, x+iy) = q(x) + q(y) + i\alpha(x, y) - i\alpha(y, x)$.

Для $\alpha(x, y)$ и $\alpha(y, x)$ получаем систему линейных уравнений с ненулевым определителем, значит восстанавливается однозначно **Q.E.D.**

Следствие. $q \equiv 0 \Rightarrow \alpha \equiv 0$.

Теорема. Для всякой эрмитовой полуторалинейной функции существует ортогональный базис.

Доказательство. Аналогично. **Q.E.D.**

В этом базисе $\alpha(x, y) = a_1 \bar{x}_1 y_1 + \dots + a_n \bar{x}_n y_n$, где $a_i = q(e_i) \in \mathbb{R}$.

Нормируя базисные векторы можно добиться того, чтобы $a_i \in \{\pm 1, 0\}$. Получим нормальный вид:

$$\alpha(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_k y_k - \bar{x}_{k+1} y_{k+1} - \dots - \bar{x}_{k+l} y_{k+l};$$

$$q(x) = |x_1|^2 + \dots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \dots - |x_{k+l}|^2.$$

Def. Эрмитова квадратичная функция q называется положительно определённой, если

$$q(x) > 0 \forall x \neq 0.$$

Теорема (закон инерции). Числа k и l в нормальном виде эрмитовой квадратичной функции не зависят от базиса, в котором она имеет нормальный вид

Доказательство. Аналогично. **Q.E.D.**

Числа k и l называются соответственно положительным и отрицательным индексами инерции эрмитовой квадратичной функции q . Аналогично для эрмитовых полуторалинейных функций имеют место процесс ортогонализации, метод Якоби и критерий Сильвестра.

23 Эрмитовы пространства. Ортонормированные базисы эрмитова пространства и унитарные матрицы.

Def. Эрмитовым пространством называется комплексное векторное пространство, в котором фиксирована некоторая положительно определённая эрмитова полуторалинейная функция, называемая скалярным умножением и обозначаемая (\cdot, \cdot) .

Можно определить по аналогии с евклидовым пространством длину вектора $|x| = \sqrt{(x, x)}$, угол между векторами. Верно неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$, неравенство треугольника $|x+y| \leq |x| + |y|$. Определено расстояние между векторами $\rho(x, y) = |x-y|$.

В любом конечномерном эрмитовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором

$$(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n;$$

$$(x, x) = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Пусть (e_1, \dots, e_n) - ортонормированный базис, $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C$.

Тогда базис (e'_1, \dots, e'_n) ортонормирован $\Leftrightarrow C^* C = E$ (такие матрицы называются унитарными). Для любого подпространства $U \subset V$ эрмитова пространства $V = U \oplus U^\perp$.

24 Линейные операторы, их запись в координатах.

Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Ранг и определитель линейного оператора. Невырожденные линейные операторы.

Def. Линейным оператором в векторном пространстве V (или линейным преобразованием пространства V) называется линейное отображение пространства V в себя $\mathcal{A}: V \rightarrow V$.

Def. Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно оператора \mathcal{A} , если $\mathcal{A}U \subset U$, то есть $\forall x \in U \ \mathcal{A}x \in U$. В этом случае можно рассмотреть $\mathcal{A}|_U$ - линейный оператор в подпространстве U .

Теперь пусть $\dim V < \infty$, и пусть \mathcal{A} - линейный оператор в пространстве V .

Пусть (e_1, \dots, e_n) - базис V .

Разложим $\mathcal{A}e_j = \sum_i a_{ij}e_i$ - в отличие от общих линейных отображений, в обоих случаях используется один и тот же базис. Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей линейного оператора \mathcal{A} в базисе (e_1, \dots, e_n) - в j -м столбце этой матрицы стоят координаты образа e_j в этом же базисе.

В матричной форме: $(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)A$.

Запись линейного оператора в координатах:

$$x = \sum_i x_i e_i, \ \mathcal{A}x = y = \sum_j y_j e_j, \ X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top, \ Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top. \ \text{Тогда } Y = AX.$$

Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису (e'_1, \dots, e'_n) :

Пусть $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$. Тогда $(\mathcal{A}e'_1, \dots, \mathcal{A}e'_n) =$ (в силу линейности) $= (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)C = (e_1, \dots, e_n)AC = (e'_1, \dots, e'_n)C^{-1}AC$, значит $A' = C^{-1}AC$.

Понятно, что ранг и определитель линейного оператора не зависят от базиса.

Def. Линейный оператор называется невырожденным, если его определитель отличен от нуля.

Из теории общих линейных отображений следует, что

- $\dim \text{Im } \mathcal{A} = \text{rk } \mathcal{A}$;
- $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim V - \text{rk } \mathcal{A}$.

25 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Если $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$, где V_i ($i = 1, \dots, s$) - инвариантные подпространства, то в соответствующем базисе пространства V матрица \mathcal{A} имеет блочно-диагональный вид. Рассмотрение одномерных инвариантных подпространств приводит к понятию собственного вектора.

Def. Ненулевой вектор $e \in V$ называется собственным вектором оператора \mathcal{A} , если $\mathcal{A}e = \lambda e$ для некоторого $\lambda \in K$. Число λ называется собственным значением оператора \mathcal{A} .

Пусть \mathcal{A} - линейный оператор в конечномерном векторном пространстве V .

Понятно, что если существуют собственные векторы с собственным значением λ , то $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$, и наоборот.

Вместе с нулевым вектором собственные вектора, отвечающие одному и тому же собственному значению λ , образуют подпространство $V_\lambda(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, называемое собственным подпространством.

Def. Характеристическим многочленом оператора \mathcal{A} называется многочлен (n -й степени)

$$f_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A}) = (-1)^n \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix}.$$

Непосредственно из определений вытекает, что

Теорема. Число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ оно является корнем характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}$. При этом $V_\lambda(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. **Q.E.D.**

Чтобы получить собственные векторы, отвечающие собственному значению λ , надо взять ненулевые решения системы уравнений $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})x = 0$.

26 Собственные подпространства линейного оператора, их свойства. Достаточное условие существования собственного базиса.

Теорема. $\dim V_\lambda(\mathcal{A}) \leq$ кратности корня λ в $f_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Пусть (e_1, e_2, \dots, e_k) - базис $V_\lambda(\mathcal{A})$, (e_1, \dots, e_n) - базис всего пространства. В этом базисе запишем матрицу линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 & & \\ & \ddots & & & C \\ 0 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & B \end{pmatrix};$$

$$f_{\mathcal{A}}(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t - \lambda & & 0 & & \\ & \ddots & & & -C \\ 0 & & t - \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & tE - B \end{vmatrix} = (t - \lambda)^k f_B(t) \Rightarrow$$

\Rightarrow кратность корня λ в $f_{\mathcal{A}}(t)$ больше либо равна k .

Q.E.D.

Теорема. Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ - различные собственные значения \mathcal{A} . Докажем, что $V_{\lambda_1}(\mathcal{A}), \dots, V_{\lambda_s}(\mathcal{A})$ линейно независимы, индукцией по s . При $s = 1$ доказывать нечего.

Предположим, что $V_{\lambda_1}(\mathcal{A}), \dots, V_{\lambda_s}(\mathcal{A})$ линейно зависимы ($s > 1$). Тогда найдутся такие $v_i \in V_{\lambda_i}(\mathcal{A})$ не все равные нулю, что $v_1 + \dots + v_s = 0$. Применим к этому равенству оператор \mathcal{A} .

Получим $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = 0$. Из второго равенства вычтем первое, умноженное на λ_s :

$(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \dots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0$. По предположению индукции, $(\lambda_i - \lambda_s)v_i = 0$ ($i = 1, \dots, s - 1$). Но тогда $v_i = 0$ ($i = 1, \dots, s - 1$) так как $\lambda_i \neq \lambda_s$. Но тогда $v_s = 0$. Противоречие. **Q.E.D.**

Следствие. Если $f_{\mathcal{A}}$ имеет n различных корней, то для \mathcal{A} существует базис из собственных векторов, очевидно.

27 Инвариантные подпространства линейного оператора.

Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в вещественном векторном пространстве.

Пусть V - вещественное векторное пространство. Определим комплексификацию

$$V(\mathbb{C}) = \{x + iy : x, y \in V\}.$$

Операции:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$(\lambda + \mu i)(x + iy) = (\lambda x - \mu y) + i(\lambda y + \mu x).$$

Понятно, что $V(\mathbb{C})$ - векторное пространство, $V(\mathbb{C}) \supset V = \{x + 0i : x \in V\}$.

Любой базис V над \mathbb{R} является базисом $V(\mathbb{C})$ над \mathbb{C} :

$$x = \sum_k x_k e_k; y = \sum_k y_k e_k \Rightarrow x + iy = \sum_k (x_k + iy_k) e_k.$$

Всякий линейный оператор в V единственным образом продолжается до линейного оператора в $V(\mathbb{C})$: $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$. В вещественном базисе матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ совпадает с матрицей \mathcal{A} .

Теорема. Для любого линейного оператора в вещественном векторном пространстве существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Если $f_{\mathcal{A}}$ имеет вещественный корень, то есть одномерное инвариантное подпространство. Предположим, что $f_{\mathcal{A}}$ имеет мнимый корень (то есть комплексное число с ненулевой мнимой частью) $\lambda + \mu i$. Пусть $x + iy \in V(\mathbb{C})$ - вектор, отвечающий этому собственному значению, то есть $\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y = (\lambda + \mu i)(x + iy)$. Это

означает, что $\begin{cases} Ax = \lambda x - \mu y; \\ Ay = \mu x - \lambda y. \end{cases}$

Мы видим, что $\langle x, y \rangle$ - не более чем двумерное инвариантное подпространство. **Q.E.D.**

28 Связь между линейными операторами и билинейными (полуторалинейными) функциями в евклидовом (эрмитовом) пространстве. Сопряжённые операторы.

Пусть V - евклидово пространство. Каждому линейному оператору поставим в соответствие билинейную функцию $\varphi_A(x, y) = (x, Ay)$.

В ортонормированном базисе матрица φ_A совпадает с матрицей A : $\varphi_A(e_i, e_j) = (e_i, Ae_j) = a_{ij}$. Отображение $A \mapsto \varphi_A$ является изоморфизмом пространства линейных операторов на пространство билинейных функций. Но каждой билинейной функции можно поставить в соответствие "транспонированную" билинейную функцию $\varphi^\top(x, y) = \varphi(y, x)$. Матрица такой функции есть транспозиция исходной. В частности, можно рассмотреть φ_A^\top , по определению ей соответствует линейный оператор A^* , называемый сопряжённым к оператору A : $(x, A^*y) = (y, Ax) = (Ax, y)$. В ортонормированном базисе матрица A^* является транспонированной матрицей оператора A .

Def. Линейный оператор A называется симметрическим (самосопряжённым), если $A^* = A$.

Def. Линейный оператор A называется кососимметрическим, если $A^* = -A$.

Def. Линейный оператор A называется ортогональным, если $A^*A = E$, то есть A сохраняет скалярное произведение: $(Ax, Ay) = (A^*Ax, y) = (x, y)$.

Теперь пусть V - эрмитово пространство. Также определяется полуторалинейная функция $\varphi_A(x, y) = (x, Ay)$. В ортонормированном базисе (e_1, \dots, e_n) матрица φ_A совпадает с матрицей A . Введём φ^* - сопряжённую полуторалинейную функцию следующим образом: $\varphi^*(x, y) = \varphi(y, x)$.

Как и в евклидовом пространстве, сопряжённый оператор A^* определяется из условия $\varphi_{A^*} = \varphi_A^*$. $\varphi_{A^*}(x, y) = (x, A^*y) = \varphi_A^*(x, y) = \overline{\varphi_A(y, x)} = \overline{(y, Ax)} = (Ax, y)$.

Значит, $(x, A^*y) = (Ax, y)$ - полностью аналогично евклидовому случаю.

Def. Оператор A в эрмитовом пространстве называется эрмитовым (косоэрмитовым), если $A^* = A$ ($A^* = -A$).

Def. Оператор A в эрмитовом пространстве называется унитарным, если $A^* = A^{-1}$.

29 Существование ортонормированного собственного базиса для симметрического оператора. Приведение квадратичной функции в евклидовом пространстве к каноническому виду.

Теорема. Пусть A - симметрический, кососимметрический или ортогональный оператор в евклидовом пространстве, $U \subset V$ - инвариантное подпространство. Тогда U^\perp - тоже инвариантное подпространство.

Доказательство.

1. Пусть A - симметрический оператор. Пусть $y \in U^\perp$, $x \in U$. Тогда $(x, Ay) = (Ax, y) = 0$, так как $Ax \in U$, $y \in U^\perp$.
2. Для кососимметрических операторов всё аналогично.
3. Пусть A - ортогональный оператор. Тогда $A|_U$ - тоже ортогональный оператор, значит является невырожденным. Пусть $y \in U^\perp$, $x \in U$. Надо доказать, что $Ay \in U^\perp$. Но $\exists z \in U$ такой, что $x = Az$. Тогда $(x, Ay) = (Az, Ay) = (z, y) = 0$ **Q.E.D.**

Теорема. Для любого симметрического оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$.

При $n = 1$ доказывать нечего.

Пусть $n = 2$. В ортонормированном базисе $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Запишем:

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t - a & -b \\ -b & t - c \end{vmatrix} = t^2 - (a + c)t + ac - b^2. \quad t_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2} \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Аналогично вещественному случаю. **Q.E.D.**

Теорема. Собственные значения эрмитова (унитарного) оператора являются вещественными (соответственно, по модулю равными единице).

Доказательство.

1. Если \mathcal{A} - эрмитов, то $(\mathcal{A}e, e) = \lambda(e, e) = (e, \mathcal{A}e) = \bar{\lambda}(e, e) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}; \quad (e \neq 0)$
2. Если \mathcal{A} - унитарный, то $(\mathcal{A}e, \mathcal{A}e) = \lambda\bar{\lambda}(e, e) = (e, e) \Rightarrow |\lambda| = 1. \quad (e \neq 0)$ **Q.E.D.**

Следствие. Всякий симметрический оператор в евклидовом пространстве имеет собственный вектор.

Доказательство. Рассмотрим комплексификацию. **Q.E.D.**

Теорема. Для всякого эрмитова (унитарного) оператора в эрмитовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Доказательство. Аналогично евклидову случаю (без рассмотрения случая двумерного инвариантного подпространства.) **Q.E.D.**

32 Полярное разложение невырожденного линейного оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве.

Def. Симметрический оператор называется положительно определённым, если соответствующая квадратичная функция положительно определена, то есть все собственные значения оператора положительны.

Лемма. Для любого положительно определённого симметрического оператора \mathcal{B} существует единственный положительно определённый симметрический оператор \mathcal{S} , такой, что $\mathcal{S}^2 = \mathcal{B}$.

Доказательство.

1. В некотором ортонормированном базисе оператор \mathcal{B} записывается диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0.$$

Рассмотрим оператор \mathcal{S} ,

который в том же базисе записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\lambda_i} > 0.$$

Очевидно, что $\mathcal{S}^2 = \mathcal{B}$, и \mathcal{S} - положительно определённый симметрический оператор.

2. Пусть $\mathcal{S}^2 = \mathcal{B}$, и \mathcal{S} - положительно определённый симметрический оператор.

Пусть μ_1, \dots, μ_m - различные собственные значения оператора \mathcal{S} .

Тогда $V = V_{\mu_1}(\mathcal{S}) \oplus \dots \oplus V_{\mu_m}(\mathcal{S})$, причём различные слагаемые ортогональны.

Оператор \mathcal{B} действует на $V_{\mu_i}(\mathcal{S})$ как умножение на μ_i^2 . Значит $V_{\mu_i}(\mathcal{S}) = V_{\mu_i^2}(\mathcal{B})$.

Поэтому μ_i и $V_{\mu_i}(\mathcal{S})$ определены однозначно как корни из собственных значений оператора \mathcal{B} и собственные подпространства оператора \mathcal{B} . **Q.E.D.**

Теорема (Полярное разложение). Всякий невырожденный линейный оператор \mathcal{A} в евклидовом пространстве единственным образом представим в виде $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{O}$, где \mathcal{S} - положительно определённый симметрический оператор, а \mathcal{O} - ортогональный оператор.

Доказательство.

1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{O}$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{S}\mathcal{O}\mathcal{O}^*\mathcal{S}^* = \mathcal{S}\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^2$. Заметим, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ для невырожденного оператора есть положительно определённый симметрический оператор:

$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^{**}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*;$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) > 0 \quad \text{при } x \neq 0.$$

По лемме \mathcal{S} определён однозначно, но тогда и $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$ тоже определён однозначно.

2. Рассмотрим $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ - по лемме существует невырожденный положительно определённый симметрический оператор \mathcal{S} такой, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{S}^2$. Положим $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$, тогда $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{O}$.

Но \mathcal{O} - ортогональный оператор: $\mathcal{O}\mathcal{O}^* = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}^2\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{E}$, **Q.E.D.**

Полярное разложение невырожденного линейного оператора в эрмитовом пространстве доказывается абсолютно аналогично.

33 Корневые подпространства линейного оператора. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.

Def. Вектор $e \in V$ называется корневым вектором оператора \mathcal{A} , если существует такое $m \in \mathcal{N} \cup \{0\}$, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m e = 0$. Наименьшее такое m называется высотой корневого вектора e . Собственные векторы - это корневые векторы высоты 1, нулевой вектор имеет высоту 0.

Если $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m e = 0$, то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m-1} e$ - собственный вектор с собственным значением λ .

Значит, корневые векторы могут существовать только для собственных значений оператора \mathcal{A} .

Совокупность всех корневых векторов, отвечающих одному и тому же λ , образует подпространство. Оно называется корневым подпространством и обозначается $V^\lambda(\mathcal{A})$. Понятно, что если e - корневой вектор высоты m , то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})e$ - корневой вектор высоты $m - 1$. Значит, $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})V^\lambda(\mathcal{A}) \subset V^\lambda(\mathcal{A})$. Поэтому $V^\lambda(\mathcal{A})$ инвариантно относительно $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, значит, и относительно \mathcal{A} .

Лемма. В корневом подпространстве $V^\lambda(\mathcal{A})$ существует базис, в котором матрица \mathcal{A} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Доказательство. $V^\lambda(\mathcal{A}) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$, поэтому

$$\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \subset \dots \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^p = V^\lambda(\mathcal{A}).$$

Выберем базис в $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, дополним его до базиса $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2$, и так далее.

Получим базис в $V^\lambda(\mathcal{A})$, в котором матрица $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \text{ а матрица } \mathcal{A} \text{ - вид } \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Следствие. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda(\mathcal{A})}$ имеет вид $(t - \lambda)^q$, где $q = \dim V^\lambda(\mathcal{A})$.

Следствие. При $\lambda \neq \mu$ оператор $\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}$ невырожден на $V^\lambda(\mathcal{A})$.

Теорема. $\dim V^\lambda(\mathcal{A}) =$ кратности корня λ в $f_{\mathcal{A}}(t)$.

Доказательство. Пусть (e_1, \dots, e_q) - базис в $V^\lambda(\mathcal{A})$.

Дополним его до базиса (e_1, \dots, e_n) пространства V . В этом базисе матрица \mathcal{A} имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B - матрица $\mathcal{A}|_{V^\lambda(\mathcal{A})}$. Тогда

$$f_{\mathcal{A}}(t) = \begin{vmatrix} tE - B & -D \\ 0 & tE - C \end{vmatrix} = (t - \lambda)^q \cdot \det(tE - C).$$

Докажем, что $\det(tE - C)$ не делится на $t - \lambda$, то есть $\det(\lambda E - C) \neq 0$. Рассмотрим оператор \mathcal{C} в пространстве $\langle e_{q+1}, \dots, e_n \rangle$, задаваемый матрицей C . Если $\det(\lambda E - C) = 0$, то λ - собственное значение \mathcal{C} , то есть $\exists e \in \langle e_{q+1}, \dots, e_n \rangle$, $e \neq 0$, такой что $\mathcal{C}e = \lambda e$. Но тогда $\mathcal{A}e = \lambda e + u$ для некоторого $u \in \langle e_1, \dots, e_q \rangle = V^\lambda(\mathcal{A})$. Таким образом $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})e \in V^\lambda(\mathcal{A}) \Rightarrow e \in V^\lambda(\mathcal{A})$. Противоречие. **Q.E.D.**

Теорема. Корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениям λ , линейно независимы.

Доказательство. Пусть $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ - различные собственные значения.

Будем рассуждать индукцией по s .

При $s = 1$ доказывать нечего.

Пусть $s > 1$. Предположим, что $v_1 + \dots + v_s = 0$, где $v_i \in V^{\lambda_i}(\mathcal{A})$. Применим к этому равенству $(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m$, где m выбрано так, что $(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m v_s = 0$. Тогда

$$(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m v_1 + \dots + (\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m v_{s-1} = 0.$$

Заметим, что $(A - \lambda_s \mathcal{E})^m v_i \in V^{\lambda_i}(A)$. По предположению, все слагаемые равны нулю:

$(A - \lambda_s \mathcal{E})^m v_i = 0 \quad i = 1, \dots, s-1$. Но это значит, в силу невырожденности $(A - \lambda_s \mathcal{E})^m$ на $V^{\lambda_i}(A)$ при $s \neq i$, что $v_i = 0 \quad i = 1, \dots, s-1$. Но тогда и $v_s = 0$. **Q.E.D.**

Теорема. Если $f_A(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ различны, то $V = V^{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}(A)$.

Доказательство. По двум предыдущим теоремам, эти подпространства линейно независимы, и сумма их размерностей равна размерности всего пространства, поэтому **Q.E.D.**

34 Нильпотентные операторы. Разложение пространства в прямую сумму циклических подпространств нильпотентного оператора.

$V^\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda \mathcal{E})^m$ для некоторого m . Значит, если обозначить $\mathcal{N} = A - \lambda \mathcal{E}|_{V^\lambda(A)}$, то $\mathcal{N}^m = 0$, поэтому \mathcal{N} - нильпотентный оператор. Изучим нильпотентные операторы.

Пусть \mathcal{N} - нильпотентный оператор в пространстве V . Высотой вектора v назовём наименьшее m , для которого $\mathcal{N}^m v = 0$. Обозначается $\text{ht } v$.

Лемма 1. Пусть e - вектор высоты m . Тогда векторы $e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 e + \lambda_1 \mathcal{N}e + \dots + \lambda_{m-1} \mathcal{N}^{m-1}e = 0$ - нетривиальная линейная зависимость. Пусть λ_k - первый ненулевой коэффициент. Применим \mathcal{N}^{m-k-1} , получим $\lambda_k \mathcal{N}^{m-1}e = 0$.

Противоречие. **Q.E.D.**

Def. Подпространство $\langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e \rangle$ называется циклическим подпространством, порождённым вектором e . Это подпространство инвариантно относительно \mathcal{N} , причём в базисе

$(e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ матрица ограничения \mathcal{N} на это подпространство имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица называется нильпотентной жордановой клеткой.

Лемма 2. Пусть e - вектор высоты m , $U = \langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e \rangle$. Если $e' \in U \setminus \mathcal{N}U$, то e' порождает то же циклическое подпространство U .

Доказательство. $e' = \lambda_0 e + \lambda_1 \mathcal{N}e + \dots + \lambda_{m-1} \mathcal{N}^{m-1}e$, $\lambda_0 \neq 0$, значит $\mathcal{N}^{m-1}e' = \lambda_0 \mathcal{N}^{m-1}e \neq 0 \Rightarrow \text{ht } e' = m \Rightarrow \langle e', \mathcal{N}e', \dots, \mathcal{N}^{m-1}e' \rangle = U$. **Q.E.D.**

Теорема. Для всякого нильпотентного оператора \mathcal{N} всё пространство может быть разложено в прямую сумму циклических подпространств, а число слагаемых в разложении равно $\dim \text{Ker } \mathcal{N}$.

Доказательство. Индукцией по $n = \dim V$.

При $n = 1$ доказывать нечего.

Пусть $n > 1$. Так как \mathcal{N} вырожден, то $\mathcal{N}V \neq V$. Пусть U - любое пространство размерности $n-1$, содержащее $\mathcal{N}V$. Очевидно, что U инвариантно, так как $\mathcal{N}V \subset U \Rightarrow \mathcal{N}U \subset U$. По предположению, U разложимо в прямую сумму циклических подпространств $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$. Пусть $e \in V \setminus U$. Тогда $\mathcal{N}e \in U \Rightarrow \mathcal{N}e = u_1 + \dots + u_k \quad u_i \in U_i$. Если $u_i \in \mathcal{N}U_i$, то есть $u_i = \mathcal{N}v_i \quad v_i \in U_i$, то, заменив e на $e - v_i$, получим $u_i = 0$. Так что будем считать, что для каждого i либо $u_i \notin \mathcal{N}U_i$, либо $u_i = 0$.

1. Пусть все $u_i = 0$, то есть $\mathcal{N}e = 0$. Тогда $\langle e \rangle$ - одномерное циклическое подпространство, $V = \langle e \rangle \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

2. Если не все $u_i = 0$, то $\text{ht } \mathcal{N}e = \max_{i: u_i \neq 0} \text{ht } u_i = m$. Без ограничения общности считаем, что $\text{ht } u_1 = m$. Тогда

$\text{ht } e = m + 1$. Докажем, что $V = \langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^m e \rangle \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$. Надо доказать, что сумма прямая, ведь так как $u_i \notin \mathcal{N}U_i$, $\dim U_1 = m$, поэтому сумма размерностей уже равна $\dim V$. Так как U_2, \dots, U_k линейно независимы, достаточно доказать, что

$\langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^m e \rangle \cap (U_2 \oplus \dots \oplus U_k) = 0$. Пусть $\lambda_0 e + \lambda_1 \mathcal{N}e + \dots + \lambda_m \mathcal{N}^m e \in U_2 \oplus \dots \oplus U_k$. Так как $e \notin U$, то $\lambda_0 = 0$. Проектируя на U_1 , получаем, что (так как $\mathcal{N}e = u_1 + \dots + u_k$) $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 \mathcal{N}u_1 + \dots + \lambda_m \mathcal{N}^{m-1}u_1 = 0$. Но тогда по Лемме 1, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Теперь докажем про число подпространств. Пусть $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ - разложение V в прямую сумму циклических подпространств. Поэтому $\text{Ker } \mathcal{N} = \text{Ker } \mathcal{N}|_{U_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker } \mathcal{N}|_{U_k}$. Но $\dim \text{Ker } \mathcal{N}|_{U_i} = 1$, поэтому $\dim \text{Ker } \mathcal{N} = k$. **Q.E.D.**

35 Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме. Минимальный многочлен.

Теорема Гамильтона-Кэли. Критерий существования собственного базиса.

Пусть \mathcal{A} - линейный оператор, характеристический многочлен которого раскладывается на линейные множители. Тогда $V = V^{\lambda_1}(\mathcal{A}) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}(\mathcal{A})$. Для каждого i подпространство $V^{\lambda_i}(\mathcal{A})$ может быть разложено в прямую сумму циклических подпространств относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}_i = \mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E}|_{V^{\lambda_i}(\mathcal{A})}$. В базисе пространства V , составленном из базисов всех этих подпространств, матрица \mathcal{A} будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}, \text{ где } J_1, \dots, J_p - \text{ матрицы вида } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

— так называемые жордановы клетки (для каждого собственного значения λ может быть несколько жордановых клеток с этим значением - столько, сколько циклических подпространств). Сама матрица такого вида называется жордановой. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема. Если характеристический многочлен линейного оператора раскладывается на линейные множители, то существует базис, в котором матрица этого оператора жорданова (такой базис называется жордановым).

Q.E.D.

Можно также доказать, что жорданова форма матрицы линейного оператора единственна с точностью до перестановки клеток, хотя сам жорданов базис далеко не единствен.

Сумма порядков жордановых клеток с одним и тем же λ на диагонали равна $\dim V^\lambda(\mathcal{A})$,

то есть кратности корня λ в $f_{\mathcal{A}}(t)$, а количество этих клеток равно $\dim V_\lambda(\mathcal{A})$.

Максимальный порядок этих клеток равен высоте оператора $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{V^\lambda(\mathcal{A})}$.

Def. Пусть $f(t) = a_0 t^n + \dots + a_{n-1} t + a_n$, \mathcal{A} - линейный оператор. Тогда можно определить

$f(\mathcal{A}) = a_0 \mathcal{A}^n + \dots + a_{n-1} \mathcal{A} + a_n \mathcal{E}$. Аналогично можно определить $f(A)$ для матриц.

Если в каком-то базисе оператор \mathcal{A} имеет матрицу A , то оператор $f(\mathcal{A})$ имеет матрицу $f(A)$. Понятно, что:

1. $(f + g)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A})$;
2. $(fg)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) \cdot g(\mathcal{A})$.

Def. Многочлен f называется аннулирующим многочленом оператора \mathcal{A} , если $f(\mathcal{A}) = 0$.

Лемма. Для любого линейного оператора \mathcal{A} существует ненулевой аннулирующий многочлен.

Доказательство. Так как $\dim L(V) = n^2 < \infty$ ($L(V)$ - пространство линейных операторов), то система

$$\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{n^2}$$

линейно зависима. Значит, существует аннулирующий многочлен с коэффициентами линейной зависимости этой системы операторов. Степень этого многочлена равна n^2 . **Q.E.D.**

Любой многочлен, кратный аннулирующему, тоже является аннулирующим.

Лемма. Пусть m - аннулирующий многочлен оператора \mathcal{A} минимальной степени. Тогда всякий аннулирующий многочлен кратен m .

Доказательство. Пусть f - аннулирующий многочлен. Поделим: $f = qm + r$.

Но тогда $r = f - qm$ - тоже аннулирующий многочлен. Но тогда $r = 0$, потому что его степень меньше степени m . **Q.E.D.**

Def. Аннулирующий многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1 называется минимальным многочленом оператора \mathcal{A} . Обозначается $m_{\mathcal{A}}$. Всякий другой аннулирующий многочлен кратен ему.

Лемма 1. Пусть J - жорданова клетка порядка m с собственным значением λ . Тогда $m_J = (t - \lambda)^m$.

Доказательство. $(J - \lambda E)^m = 0 \Rightarrow (t - \lambda)^m$ - аннулирующий многочлен.

Значит, $m_J = (t - \lambda)^k$, $k \leq m$. Но $(J - \lambda E)^{m-1} \neq 0 \Rightarrow k = m$. **Q.E.D.**

Лемма 2. Если

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix},$$

то $m_A = \text{НОК}(m_{A_1}, \dots, m_{A_k})$.

Доказательство. Вытекает из того, что операции над клеточно-диагональной матрицей сводятся к тем же самым операциям над клетками. Поэтому $f(A) = 0 \Leftrightarrow f(A_i) = 0 \forall i \Rightarrow$
 $\Rightarrow m_A = \text{НОК}(m_{A_1}, \dots, m_{A_k})$. **Q.E.D.**

Теорема. Пусть характеристический многочлен оператора \mathcal{A} раскладывается на линейные множители: $f_{\mathcal{A}}(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ различны. Тогда $m_{\mathcal{A}}(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}$, где m_i - максимальный порядок жордановых клеток с собственным значением λ в жордановой форме матрицы оператора \mathcal{A} .

Доказательство. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$$

- жорданова форма матрицы оператора \mathcal{A} .

Тогда по Лемме 2 $m_{\mathcal{A}} = \text{НОК}(m_{J_1}, \dots, m_{J_k})$, значит по Лемме 1 **Q.E.D.**

Следствие (Теорема Гамильтона-Кэли). $f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$.

Доказательство. Из теоремы вытекает, что $m_{\mathcal{A}} | f_{\mathcal{A}}$ - действительно, $k_i \geq m_i$.

Значит, $f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$. **Q.E.D.**

Таким образом, видно, что есть аннулирующие многочлены степени не выше n .

Следствие (Критерий диагонализруемости). Матрица A диагонализуема \Leftrightarrow её характеристический многочлен разлагается на линейные множители, а минимальный не имеет кратных корней.

Доказательство. Матрица приводится к диагональному виду \Leftrightarrow её жорданова форма диагональна \Leftrightarrow все m_i в обозначениях теоремы равны 1, то есть $m_{\mathcal{A}}$ раскладывается на линейные множители \Leftrightarrow не имеет кратных корней. **Q.E.D.**

36 Аффинные пространства. Векторизация.

Аффинные системы координат.

Барицентрические линейные комбинации точек.

Пусть V - векторное пространство над полем K .

Def. Аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством V , называется множество S , элементы которого называются точками, вместе с операцией сложения точек и векторов $V \times S \rightarrow S$, $(p, x) \mapsto p+x$, удовлетворяющей следующим условиям:

1. $p + (x + y) = (p + x) + y$;
2. $p + 0 = p$;
3. $\forall p, q \in S \exists! x \in V : p + x = q$, обозначается: $x = \overrightarrow{pq}$.

Само векторное пространство V можно рассматривать как аффинное пространство, ассоциированное с самим собой (тогда сложение точек и векторов - это сложение векторов). При этом $\overrightarrow{pq} = q - p$.

Каждое аффинное пространство S , ассоциированное с V , можно отождествить с V , если фиксировать начало отсчёта $o \in S$. При этом каждую точку $p \in S$ можно отождествить с её радиус-вектором \overrightarrow{op} . При этом операции сложения точек и векторов будет соответствовать операция сложения векторов: $\overrightarrow{o(p+x)} = \overrightarrow{op} + \overrightarrow{px}$, так как $o + (p+x) = (o+p) + x$. Операция выбора точки o и отождествления аффинного пространства S с векторным пространством называется векторизацией.

Свойство: $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.

Действительно, обозначим $\overrightarrow{pq} = x$, $\overrightarrow{qr} = y$, тогда $p + (x + y) = (p + x) + y = q + y = r \Rightarrow x + y = \overrightarrow{pr}$.

Def. Размерностью аффинного пространства называется размерность соответствующего ему векторного пространства.

В аффинном пространстве можно ввести систему координат. Репером в пространстве S называется система $(o; e_1, e_2, \dots, e_n)$, где o - точка (начало отсчёта), а (e_1, \dots, e_n) - базис пространства V .

В репере каждая точка имеет свои координаты: $\forall p \in S \overrightarrow{op} = \sum x_i e_i$; тогда (x_1, \dots, x_n) - координаты точки p относительно репера $(o; e_1, e_2, \dots, e_n)$. Свойства:

1. Координаты точки $p + x$ суть суммы соответствующих координат точки p и вектора x ;
2. Координаты вектора \overrightarrow{pq} суть разности соответствующих координат точек p и q .

Def. Выберем начало отсчёта o и положим $p = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$, где $\vec{op} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{op}_i$. Получим линейную комбинацию точек. Барицентрическими линейными комбинациями точек называются такие линейные комбинации, в которых сумма коэффициентов равна единице: $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Докажем, что точка $p = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$, где $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, не зависит от выбора точки o .

Пусть o' - другая точка. Тогда имеем: $\sum \lambda_i \vec{o'p}_i = \sum \lambda_i (\vec{o'o} + \vec{op}_i) = \sum \lambda_i \vec{o'o} + \sum \lambda_i \vec{op}_i = \vec{o'o} + \sum \lambda_i \vec{op}_i$. Значит $o' + \sum \lambda_i \vec{o'p}_i = o + \vec{o'o} + \sum \lambda_i \vec{op}_i = o + \sum \lambda_i \vec{op}_i$. **Q.E.D.**

Имеет смысл центр масс системы точек p_1, \dots, p_k с массами m_1, \dots, m_k - это точка

$$\text{cent}(p_1, \dots, p_k; m_1, \dots, m_k) = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i p_i.$$

Центр тяжести можно брать по частям, имеет место теорема Архимеда о медианах треугольника.

37 Плоскости аффинного пространства, их задание системами линейных уравнений. Аффинная оболочка системы точек.

Def. Пусть S - аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством V .

Плоскостью в S называется подмножество вида $P = p_0 + U$, где $p_0 \in S$, а $U \subset V$ - подпространство.

Предложение 1. $p_0 \in P \Rightarrow p'_0 + U = P$.

Доказательство. $p'_0 = p_0 + u_0$ для некоторого $u_0 \in U$. Значит $p'_0 + U = p_0 + u_0 + U = p_0 + U$.

Предложение 2. $p_0 + U = p'_0 + U' \Rightarrow U = U'$.

Доказательство. $p'_0 \in p_0 + U \Rightarrow p_0 + U = p'_0 + U = p'_0 + U' \Rightarrow U = U'$.

Def. Подпространство U называется направляющим подпространством плоскости P .

Предложение 3. Плоскость $P \subset S$ является аффинным пространством, ассоциированным с U , относительно той же операции сложения точек и векторов, которая определена в пространстве S .

Доказательство.

- $p \in P, u \in U \Rightarrow p + u \in p + U = P$ - замкнутость относительно операции сложения точек и векторов.
- Свойства $p + (x + y) = (p + x) + y$ и $p + 0 = p$ выполнены, так как они выполнены в S .
- $p, q \in P \Rightarrow P = p + U, q = p + u$ для некоторого $u \in U$. $\Rightarrow \vec{pq} = u \in U$, причём вектор \vec{pq} единствен, так как он единствен во всём пространстве. **Q.E.D.**

Следствие. Любая барицентрическая линейная комбинация точек из P лежит в P .

Плоскость можно определить как подмножество, замкнутое относительно взятия барицентрических линейных комбинаций.

Def. Размерность плоскости - это размерность её направляющего подпространства: $\dim P = \dim U$.

Нульмерные плоскости - это точки, одномерные плоскости называются прямыми, $(n - 1)$ -мерные плоскости называются гиперплоскостями.

Фиксируем в S аффинную систему координат.

Теорема. Множество всех решений совместной системы линейных уравнений является плоскостью в S , и наоборот, любая плоскость является множеством решений некоторой системы линейных уравнений.

Доказательство.

- Пусть есть совместная система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Пусть $p_0 \in S$ - какое-либо её решение. Тогда множество всех её решений получается так: $p_0 + U$, где U - множество решений присоединённой однородной системы линейных уравнений. Но U - подпространство в V , если интерпретировать решения как векторы, значит множество всех решений исходной системы линейных уравнений есть плоскость.

2. Пусть $P = p_0 + U$ - плоскость в S . Существует система линейных однородных уравнений, задающая направляющее подпространство $U: \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$. Подставим в левые части координаты точки p_0 . Получим какие-то числа b_1, \dots, b_m . Рассмотрим систему линейных уравнений $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$, она и будет искомой, её множество решений - это и есть $p_0 + U$. **Q.E.D.**

Если $\dim P = k$, то P задаётся $n - k$ линейно независимыми уравнениями. В частности, одно уравнение $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, где не все $a_i = 0$, задаёт гиперплоскость, и обратно, всякая гиперплоскость задаётся одним линейным уравнением.

Теорема. Через любые $k + 1$ точку $p_0, p_1, \dots, p_k \in S$ проходит плоскость размерности $\leq k$, если же эти точки не лежат в плоскости размерности меньше k , то через них проходит единственная k -мерная плоскость.

Доказательство.

1. Рассмотрим плоскость $P = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \rangle$. $p_0, p_1, \dots, p_k \in P$, $\dim P = \text{rk} \{ \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \} \leq k$.
2. Предположим, что p_0, p_1, \dots, p_k не лежат в плоскости размерности меньше чем k . Тогда векторы

$$\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$$

линейно независимы, и плоскость $P = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \rangle$ является единственной плоскостью, содержащей все точки p_0, p_1, \dots, p_k . Действительно, пусть $P' = p_0 + U'$ - другая k -мерная плоскость, содержащая точки p_0, p_1, \dots, p_k . Тогда $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \in U' \Rightarrow U' = \langle \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \rangle$. **Q.E.D.**

Def. Точки p_0, p_1, \dots, p_k называются аффинно независимыми, если они не содержатся в плоскости размерности меньше чем k , то есть если векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$ линейно независимы.

Пусть $M \subset S$ - произвольное непустое подмножество, $p_0 \in M$. Плоскость $P = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p} : p \in M \rangle$ является наименьшей плоскостью, содержащей M . Она называется аффинной оболочкой множества M и обозначается $\text{aff } M$.

38 Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве.

Рассмотрим две плоскости: $P_1 = p_1 + U_1$ и $P_2 = p_2 + U_2$. Если их пересечение непусто, то оно является плоскостью: $p_0 \in P_1 \cap P_2 \Rightarrow P_1 = p_0 + U_1; P_2 = p_0 + U_2 \Rightarrow P_1 \cap P_2 = p_0 + (U_1 \cap U_2)$.

Теорема. $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} \in U_1 + U_2$.

Доказательство. $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 : p_1 + u_1 = p_2 + u_2$. Но $p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} = u_1 + (-u_2)$. Поэтому существование таких векторов u_1 и u_2 равносильно тому, что $\overrightarrow{p_1p_2} \in U_1 + U_2$. **Q.E.D.**

Def. Плоскости P_1 и P_2 называются параллельными, если $U_1 \subset U_2$ или $U_2 \subset U_1$. Плоскости P_1 и P_2 называются скрещивающимися, если $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ и $U_1 \cap U_2 = 0$.

39 Выпуклые множества. Выпуклая оболочка системы точек. Симплексы.

Пусть S - аффинное пространство над полем \mathbb{R} . Отрезком, соединяющим точки $p, q \in S$, называется множество $pq = \{ \lambda p + (1 - \lambda)q : 0 \leq \lambda \leq 1 \}$. Множество $M \subset S$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками оно содержит и весь отрезок, их соединяющий: $\forall p, q \in M \quad pq \subset M$.

Пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством, всякая плоскость является выпуклым множеством.

Def. Выпуклой комбинацией точек пространства S называется их барицентрическая линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами.

Теорема. Выпуклое множество M вместе с любыми точками p_0, \dots, p_k содержит любую их выпуклую оболочку.

Доказательство. Индукцией по k

При $k = 0$ доказывать нечего. При $k = 1$ по определению любая выпуклая оболочка двух точек лежит на отрезке, их соединяющем, который, в свою очередь, содержится в множестве M .

При $k > 1$ пусть $p = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k$, $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0 \forall i$.

Рассмотрим $p' = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i} (\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_{k-1} p_{k-1}) \in M$ по предположению индукции.

Но тогда $p = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \right) \cdot p' + \lambda_k p_k \in M$ по определению. **Q.E.D.**

Пусть $M \subset S$ - произвольное подмножество.

Теорема. Совокупность всех выпуклых линейных комбинаций точек множества M есть выпуклое множество.

Доказательство. Пусть $p' = \sum_{i=0}^k \lambda'_i p_i$, $p'' = \sum_{i=0}^k \lambda''_i p_i$ - две линейных комбинации точек

$p_0, p_1, \dots, p_k \in M$ (без ограничения общности можно считать, что это линейные комбинации одинакового набора точек). Пусть $\mu', \mu'' \geq 0$, $\mu' + \mu'' = 1$. Тогда надо доказать, что $\mu' p' + \mu'' p'' \in M$.

Но $\mu' p' + \mu'' p'' = \sum_{i=0}^k (\mu' \lambda'_i + \mu'' \lambda''_i) p_i$ - выпуклая комбинация точек $p_0, p_1, \dots, p_k \in M$. **Q.E.D.**

вектори

Def. Совокупность выпуклых линейных комбинаций точек из M называется выпуклой оболочкой множества M . Обозначается $\text{conv } M$. Это наименьшее выпуклое множество, содержащее M .

Def. Выпуклая оболочка аффинно независимых точек p_0, p_1, \dots, p_k называется k -мерным симплексом, натянутым на p_0, p_1, \dots, p_k . Нульмерный симплекс - это точка, одномерный - это отрезок. Двухмерный симплекс называется треугольником, трёхмерный - тетраэдром.

40 Полупространства. Выпуклые многогранники, их грани. Грани симплекса и параллелепипеда.

Def. Полупространством называется множество, задаваемое линейным неравенством $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq b$, где не все $a_i = 0$. При этом гиперплоскость, задаваемая соответствующим равенством $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$, называется граничной гиперплоскостью данного полупространства. Полупространство $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b$ называется противоположным полупространством.

С каждой гиперплоскостью связаны два полупространства.

Утверждение. Полупространство является выпуклым множеством.

Доказательство. Линейное неравенство, задающее полупространство, на любой прямой превращается в неравенство вида $\alpha t + \beta \geq 0$ (если прямая имеет вид $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a} t$). Пересечение полупространства с любой прямой есть либо вся прямая, либо луч, либо оно пусто; то есть в любом случае это выпуклое множество. Значит, полупространство является выпуклым множеством. **Q.E.D.**

Def. Выпуклым многогранником называется пересечение конечного числа полупространств.

Иначе говоря, выпуклый многогранник есть множество решений системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$$

(здесь и все a_{ij} могут быть нулями!).

Def. Функция вида $l(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$ называется аффинно-линейной функцией (здесь x_1, x_2, \dots, x_n - координаты точки x).

Можно переписать систему неравенств, задающую выпуклый многогранник:

$$\begin{cases} l_1(x) \geq 0; \\ \vdots \\ l_m(x) \geq 0. \end{cases}$$

Def. Гранью выпуклого многогранника M называется любое непустое подмножество $\Gamma \subset M$, которое может быть получено заменой некоторых из неравенств, задающих многогранник M , на равенства.

! Может оказаться, что какие-то из оставшихся неравенств выполняются всюду на этой грани как равенства.

! Грань грани Γ - это то же самое, что грань многогранника M , содержащаяся в Γ . Таким образом, выпуклый многогранник сам является своей гранью.

Нульмерные грани называются вершинами, одномерные - рёбрами, $(\dim M - 1)$ -мерные грани называются гипергранями.

Грани симплекса. Рассмотрим симплекс T , натянутый на репер $(p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$. Тогда $T = \{x = x_1p_1 + \dots + x_np_n : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$. Значит, неравенства:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 & i = 1, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n x_j \leq 1 \end{cases}$$

задают симплекс T относительно репера $(p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$.

Грани симплекса T , проходящие через p_0 , суть пересечения координатных плоскостей с симплексом. Это будут симплексы, натянутые на точку p_0 и какие-то из точек p_1, p_2, \dots, p_n . Таким образом, все грани симплекса - это симплексы, натянутые на всевозможные непустые подмножества множества $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$. Их число $2^{n+1} - 1$. Вершины этих симплексов - это какие-то из вершин исходного симплекса.

Грани параллелепипеда. Пусть (e_1, \dots, e_n) - базис пространства V . Параллелепипед - это множество

$$P(p_0; e_1, e_2, \dots, e_n) = p_0 + P(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{ p_0 + \sum_i x_i e_i : 0 \leq x_i \leq 1 \right\}.$$

Таким образом, параллелепипед задаётся неравенствами: $0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, \dots, n)$.

Найдем его грани. С точностью до нумерации координат, всякая грань размерности k задаётся соотношениями:

$$\begin{cases} 0 \leq x_i \leq 1, & i = 1, \dots, k; \\ x_j = \varepsilon_j, & j = k+1, \dots, n; \varepsilon_j \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Число k -мерных граней равно $C_n^k \cdot 2^{n-k}$. В частности, число вершин равно 2^n .

41 Теорема о том, что всякий ограниченный выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин. Задача линейного программирования.

Def. Выпуклое множество $M \subset S$ называется телесным (или выпуклым телом), если его аффинная оболочка совпадает со всем пространством: $\text{aff } M = S$.

Лемма. Выпуклое тело содержит внутренние точки.

Доказательство. Пусть $p_0 \in M$. Тогда $\text{aff } M = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p} : p \in M \rangle = S$.

Значит, $\text{rk } \{\overrightarrow{p_0p} : p \in M\} = \dim S = n \Rightarrow \exists p_1, \dots, p_n \in M$, такие, что $(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$ - базис пространства V . Точки p_0, p_1, \dots, p_n аффинно независимы, и натянутый на них симплекс (в силу выпуклости M) содержится в M . Но симплекс, очевидно, содержит внутренние точки. **Q.E.D.**

Def. $\dim M \doteq \dim \text{aff } M$.

Всякое выпуклое множество M является телом в $\text{aff } M$. Допуская вольность речи, будем называть внутренними точками множества M точки, внутренние по отношению к $\text{aff } M$.

Теорема (Минковского-Вейля). Всякий ограниченный выпуклый многогранник M совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.

Доказательство. Индукцией по $n = \dim M$.

При $n = 0$ доказывать нечего: M - это точка.

Пусть $n > 0$. Заменив S на $\text{aff } M$, можно считать, что M - телесный выпуклый многогранник. Пусть p - какая-либо внутренняя точка M . Все определяющие M неравенства в точке p выполняются как строгие (иначе в любой окрестности точки p есть точки, в которых какое-либо из неравенств неверно). Проведём через p произвольную прямую l . Её пересечение с M есть ограниченное выпуклое множество - отрезок qr . В точках q и r какие-то из неравенств выполняются как равенства, значит, эти точки принадлежат собственным граням многогранника M . По предположению индукции, точки q и r принадлежат выпуклой оболочке множества вершин многогранника $M \Rightarrow$

\Rightarrow значит и qr , и точка p тоже принадлежат этой выпуклой оболочке. **Q.E.D.**

! На самом деле, верно и обратное (выпуклая оболочка конечного числа точек есть выпуклый многогранник) - без доказательства.

Задача линейного программирования. Требуется найти максимум аффинно-линейной функции на ограниченном выпуклом многограннике.

Теорема. Максимум аффинно-линейной функции l на ограниченном выпуклом многограннике M достигается хотя бы в одной из вершин (на самом деле, множество всех точек максимума аффинно-линейной функции есть грань многогранника M - без доказательства).

Доказательство. Воспользуемся тем, что $l(\sum_i \lambda_i p_i) = \sum_i \lambda_i l(p_i)$ ($\sum_i \lambda_i = 1$) - это очевидно.

Пусть p_1, \dots, p_k - все вершины M . Тогда $\forall p \in M : p = \sum_i \lambda_i p_i$ ($\sum_i \lambda_i = 1; \lambda_i \geq 0 \forall i$).

Значит, $l(p) = \sum_i \lambda_i l(p_i) \leq \max_i l(p_i)$. **Q.E.D.**

Метод решения задачи линейного программирования - "симплекс-метод": Возьмём одну вершину, посмотрим, как изменяется функция по рёбрам, выходящим из этой вершины. Если по всем уменьшается, то это - вершина максимума. Если где-то увеличивается, то пойдём по этому ребру.

42 Аффинные отображения, их свойства. Аффинные преобразования. Существование и единственность аффинного преобразования, переводящего один заданный репер в другой. Координатный признак равенства фигур в аффинной геометрии.

Def. Пусть S и S' - аффинные пространства, ассоциированные соответственно с векторными пространствами V и V' . Отображение $f : S \rightarrow S'$ называется аффинным, если существует такое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V'$, что $f(p+x) = f(p) + \varphi(x) \quad \forall p \in S, x \in V$.

Свойство: $\varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} \quad \forall p, q \in S$.

Действительно, $f(q) = f(p + \overrightarrow{pq}) = f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq})$.

Значит, φ однозначно определяется по f . Линейное отображение φ называется дифференциалом аффинного отображения f и обозначается df .

Если выбрать в S и S' начала отсчёта o и o' , то получим $f(o+x) = f(o) + \varphi(x) = o' + \overrightarrow{o'f(o)} + \varphi(x)$. Положим $\overrightarrow{o'f(o)} = b \in V'$. Тогда в векторизованной форме отображение f записывается в виде $f(o+x) = f(x) = \varphi(x) + b$. В координатной форме: если $f(x) = y$, то $y_i = \sum_j a_{ij}x_j + b_i$ в некоторых базисах V и V' . В частности, аффинно-

линейные функции - это аффинные отображения из S в K . В случае $K = \mathbb{R}$ понятие дифференциала аффинного отображения согласуется с общим понятием дифференциала гладкого отображения.

Свойства аффинного отображения:

1. Если $P \subset S$ - плоскость, то $f(P) \subset S'$ - тоже плоскость, причём если аффинное отображение f биективно, то $\dim f(P) = \dim P$.

Действительно, $P = p_0 + U \Rightarrow f(P) = f(p_0) + df(U)$ - плоскость в S' .

Если f биективно, то df тоже биективно (выберем согласованные начала отсчёта в S и S' , где $f = df$) $\Rightarrow \dim df(U) = \dim U$.

2. $f\left(\sum_i \lambda_i p_i\right) = \sum_i \lambda_i f(p_i)$, где $\sum_i \lambda_i = 1$.

По определению, $\sum_i \lambda_i p_i = o + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{op_i}$. Значит,

$$f\left(\sum_i \lambda_i p_i\right) = f(o) + \sum_i \lambda_i df(\overrightarrow{op_i}) = f(o) + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{f(o)f(p_i)} = \sum_i \lambda_i f(p_i)$$

по определению барицентрических линейных комбинаций в S' .

Def. Простое отношение трёх точек на прямой в аффинном пространстве. Пусть точки p, q и r лежат на одной прямой. $q \neq r \Rightarrow \overrightarrow{pr} = c \cdot \overrightarrow{rq}$. Число c называется простым отношением $(p, q; r)$. Если $q = r$, но $p \neq q$, то можно считать $(p, q; r) = \infty$. Простое отношение сохраняется при аффинном отображении (если данная прямая не переходит в точку): $(f(p), f(q); f(r)) = (p, q; r)$.

Def. Аффинным преобразованием пространства S называется аффинное отображение $f : S \rightarrow S$.

$f(p+x) = \overrightarrow{f(p)} + Ax$, где $A = df$ - линейный оператор в пространстве V . В векторизованной форме $f(x) = Ax + b$, где $b = of(o)$.

Теорема. Пусть $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ и $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ - две аффинно независимые системы точек в n -мерном аффинном пространстве S . Тогда существует единственное аффинное преобразование f , переводящее первую систему точек во вторую: $f(p_i) = q_i \quad i = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство. Если такое f существует, то $f(p_0+x) = q_0 + \varphi(x)$, где φ - такое линейное преобразование, что $\varphi(\overrightarrow{p_0 p_i}) = \overrightarrow{q_0 q_i} \quad (i = 1, \dots, n)$. Так как векторы $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$ образуют базис пространства V , то существует единственное линейное преобразование φ , для которого

$$\varphi(\overrightarrow{p_0 p_i}) = \overrightarrow{q_0 q_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Значит, f единственно.

Обратно, если определить аффинное преобразование f по формуле $f(p_0 + x) = q_0 + \varphi(x)$, где φ определено выше, то $f(p_i) = q_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). **Q.E.D.**

Группа аффинных преобразований пространства S определяет аффинную геометрию. Две фигуры (то есть подмножества S) F_1 и F_2 называются равными (или конгруэнтными), если существует такое аффинное преобразование g , что $gF_1 = F_2$.

Координатный признак равенства фигур в аффинной геометрии.

Теорема. Фигуры F и F' равны в аффинной геометрии \Leftrightarrow существуют такие реперы $(o; e_1, \dots, e_n)$ и

$$(o'; e'_1, \dots, e'_n),$$

что

$$o + \sum_i x_i e_i \in F \Leftrightarrow o' + \sum_i x_i e'_i \in F',$$

то есть F и F' одинаково выглядят по отношению к этим реперам.

Доказательство. Пусть $F' = f(F)$, $f \in \text{GA}(S)$. Пусть $(o; e_1, \dots, e_n)$ - любой репер и рассмотрим репер

$$(f(o); df(e_1), \dots, df(e_n)).$$

Тогда $p = o + \sum_i x_i e_i \in F \Leftrightarrow f(p) = f(o) + \sum_i x_i df(e_i) \in F'$.

Обратно, пусть $(o; e_1, \dots, e_n)$ и $(o'; e'_1, \dots, e'_n)$ - реперы, удовлетворяющие условиям теоремы. Рассмотрим $f \in \text{GA}(S)$, определяемое условиями:

$$f(o) = o'; \quad df(e_i) = e'_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Докажем, что $f(F) = F'$. Действительно, $p = o + \sum_i x_i e_i \in F \Leftrightarrow f(p) = o' + \sum_i x_i e'_i \in F'$. **Q.E.D.**

43 Дифференциал как гомоморфизм аффинной группы в линейную. Параллельные переносы и гомотетии.

Теорема. Пусть $f : S \rightarrow S'$ и $g : S' \rightarrow S''$ - аффинные отображения. Тогда отображение $gf : S \rightarrow S''$ также аффинно, причём $d(gf) = dg \cdot df$.

Доказательство. Действительно,

$$gf(p+x) = g(f(p+x)) = g(f(p) + df(x)) = g(f(p)) + dg(df(x)) = (gf)(p) + (dg \cdot df)(x). \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Теорема. Аффинное отображение $f : S \rightarrow S'$ биективно $\Leftrightarrow df$ биективно.

При этом f^{-1} также аффинно, и $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$.

Доказательство. Выберем согласованные начала отсчёта в S и S' таким образом, чтобы $o' = f(o)$. Тогда в векторизованной форме $f = df$. **Q.E.D.**

Биективные аффинные преобразования образуют группу $\text{GA}(S)$, а невырожденные линейные преобразования - группу $\text{GL}(V)$. Дифференциал есть гомоморфизм групп $d : \text{GA}(S) \rightarrow \text{GL}(V)$.

Def. Параллельным переносом на вектор $a \in V$ называется аффинное преобразование $t_a : p \mapsto p + a$. Параллельные переносы образуют подгруппу, так как $t_a t_b = t_{a+b}$; $(t_a)^{-1} = t_{-a}$; $id = t_0$. Эта подгруппа изоморфна группе V .

Теорема. Аффинное преобразование f является параллельным переносом $\Leftrightarrow df = \mathcal{E}$.

Доказательство. $t_a(p+x) = p+x+a = t_a p + x = t_a p + \mathcal{E}x \Rightarrow dt_a = \mathcal{E}$.

Обратно, если $df = \mathcal{E}$, то $f(o+x) = f(o) + x = o + \overrightarrow{of(o)} + x = o + x + a$, где $a = \overrightarrow{of(o)}$. **Q.E.D.**

Теорема. Группа параллельных переносов является нормальной подгруппой в $\text{GA}(S)$.

Доказательство. Подгруппа $H \subset G$ нормальна $\Leftrightarrow \forall g \in G \quad gHg^{-1} = H$. Докажем, что $\forall f \in \text{GA}(S) \quad ft_a f^{-1} = t_{df(a)}$. Действительно, $(ft_a f^{-1})(p) = f(f^{-1}(p) + a) = p + df(a)$. **Q.E.D.**

Def. Гомотетией с центром $o \in S$ и коэффициентом $\lambda \in K^*$ называется аффинное преобразование, определяемое по следующему правилу:

$$f(o+x) = o + \lambda x.$$

Гомотетия с коэффициентом -1 называется центральной симметрией относительно точки o .

Теорема. Аффинное преобразование f является нетождественной гомотетией $\Leftrightarrow df = \lambda \mathcal{E}$, $\lambda \neq 0, 1$.

Доказательство. Дифференциал гомотетии с коэффициентом λ равен $\lambda \mathcal{E}$.

Обратно, пусть $df = \lambda \mathcal{E}$. Достаточно доказать, что f имеет неподвижную точку.

В векторизованной форме: $f(x) = \lambda x + b$. Уравнение $\lambda x + b = x$ имеет единственное решение при $\lambda \neq 0, 1$. Это и будет центр гомотетии. **Q.E.D.**

44 Квадрики в аффинном пространстве.

Центральные, конические и цилиндрические квадрики.

Будем далее считать, что $\text{char } K \neq 2$.

Def. Аффинно-квадратичной функцией в пространстве S называется функция, которая в векторизованной форме записывается в виде $Q(x) = q(x) + l(x) + c$, где q - квадратичная функция, l - линейная функция, $c \in K$.

В координатах: $Q(p) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$, где $a_{ij} = a_{ji}$, а (x_1, \dots, x_n) - координаты точки p .

Очевидно, что $c = Q(o)$, $b_i = \frac{\partial Q}{\partial x_i}(o)$, где o - начало координат.

Def. Квадрикой (или гиперповерхностью второго порядка) в пространстве S называется множество, задаваемое уравнением $Q(p) = 0$, где Q - аффинно-квадратичная функция; при условии, что оно непусто и не является плоскостью (в частности, $q \neq 0$).

Введём обозначение: $X(Q)$ - множество точек, удовлетворяющее уравнению $Q(p) = 0$.

Def. Точка o называется центром квадрики X , если $o + x \in X \Rightarrow o - x \in X$, то есть $s_o X = X$.

Def. Вершиной квадрики называется принадлежащий ей центр.

Теорема. Если $X(Q_1)$ и $X(Q_2)$ - совпадающие квадрики, то уравнения Q_1 и Q_2 пропорциональны.

Доказательство. Возьмём в качестве точки o какую-нибудь точку квадрики X , не являющуюся её вершиной (такие точки есть, иначе квадрика была бы плоскостью). Тогда в векторизованной форме: $Q_1(x) = q_1(x) + l_1(x)$, $Q_2(x) = q_2(x) + l_2(x)$, где $l_1, l_2 \neq 0$. Точки пересечения прямой $o + \langle x \rangle$ с квадрикой X определяются любым из уравнений $t^2 q_1(x) + t l_1(x) = 0$ или $t^2 q_2(x) + t l_2(x) = 0$. Так как относительно t эти уравнения должны иметь одинаковые решения, то при $l_1(x), l_2(x) \neq 0$ получаем, что

$$\frac{q_1(x)}{l_1(x)} = \frac{q_2(x)}{l_2(x)}.$$

Поэтому $q_1(x)l_2(x) = q_2(x)l_1(x)$. Умножая на $l_1(x)l_2(x)$, получаем, что

$$q_1(x)l_2(x)l_1(x)l_2(x) = q_2(x)l_1(x)l_1(x)l_2(x)$$

верно уже для всех x . Но так как в кольце многочленов нет делителей нуля, то можно сократить последнее равенство, поэтому можно считать, что $q_1(x)l_2(x) = q_2(x)l_1(x)$ верно тоже для всех x . Пусть l_1 и l_2 не пропорциональны. Тогда в подходящем базисе $l_1(x) = x_1$, $l_2(x) = x_2$. Поэтому $q_1(x)x_2 = q_2(x)x_1$. Рассматривая левые и правые части, видим, что должно быть:

$$q_1(x) = l(x)x_1, \quad q_2(x) = l(x)x_2$$

для некоторой линейной функции $l(x)$. Значит, $Q_1(x) = (l(x) + 1)x_1$, $Q_2(x) = (l(x) + 1)x_2$. Так как $X = X(Q_1)$, то X содержит гиперплоскость $x_1 = 0$. Значит, Q_2 должна обращаться в ноль всюду на этой гиперплоскости. Но ни один из множителей x_2 и $l(x) + 1$ не обращается на ней в ноль. Так как в кольце многочленов нет делителей нуля, то получаем противоречие. Поэтому линейные, а значит, и квадратичные части аффинно-квадратичных функций пропорциональны. **Q.E.D.**

Def. Квадрика называется центральной, если у неё есть хотя бы один центр.

Теорема. Множество всех центров квадрики $X(Q)$ задаётся системой линейных уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Примем o - центр квадрики - за начало координат. Тогда в векторизованной форме $Q(x) = q(x) + l(x) + c$. Квадрика $s_o X(Q)$ задаётся уравнением $Q(-x) = 0$, то есть $q(x) - l(x) + c = 0$. Эти квадрики совпадают, значит, $Q(-x) = \lambda Q(x)$ для некоторого $\lambda \in K^*$. Сравнивая квадратичные части, видим, что $\lambda = 1$.

Поэтому $s_o X = X \Leftrightarrow l(x) \equiv 0$, то есть $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n$. **Q.E.D.**

Следствие. Множество всех центров либо пусто, либо является плоскостью.

Следствие. Если q невырождена, то квадрика центрально, причём центр единствен.

Доказательство. $Q(p) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$.

$\frac{\partial Q}{\partial x_i}(p) = 2 \sum_j a_{ij}x_j + b_i$. Таким образом, множество всех центров задаётся системой линейных уравнений, матрица

которой есть матрица квадратичной функции q . По теореме Крамера, центр существует и единствен. **Q.E.D.**

Теорема. Точка o является вершиной квадрики X тогда и только тогда, когда

$$o + x \in X \Rightarrow o + \lambda x \in X \quad \forall \lambda \in K,$$

то есть квадратика инвариантна относительно всех гомотетий с центром в точке o .

Доказательство. Пусть в векторизованной форме $X = X(Q)$. Запишем уравнение квадратика, приняв за начало отсчёта точку o : $q(x) + c = 0$. Если o - вершина, то $c = 0$.

Обратно, пусть X инвариантна. Пусть h_λ - гомотетия с центром o и коэффициентом λ .

Если $h_\lambda X = X$, то уравнение квадратика $h_\lambda X$ имеет вид $\lambda^{-2}q(x) + c = 0$, так как $h_\lambda : x \mapsto \frac{x}{\lambda}$.

Это уравнение должно быть пропорционально уравнению квадратика X . Значит, $c = 0$.

Q.E.D.

Def. Множество, которое вместе с каждой точкой $o + x$ содержит и точку $o + \lambda x \quad \forall \lambda \in K$, то есть инвариантное относительно всех гомотетий с центром в точке o , называется конусом с вершиной в точке o . Квадратика, являющаяся конусом (то есть имеющая вершину), называется конической.

Def. Квадратика X называется цилиндрической, если $\exists a \in V, a \neq 0$, такой что $t_a X = X$, значит, $\forall \lambda \in K \quad t_{\lambda a} X = X, \lambda \neq 0$.

Пусть α - симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной функции q .

Теорема. Множество всех таких векторов a , что $t_a X = X$, является подпространством $\text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } l$.

Доказательство. Пусть $Q(x) = q(x) + l(x) + c = 0$ - уравнение квадратика X . Уравнение квадратика $t_a X$ имеет вид

$$Q(x - a) = \alpha(x - a, x - a) + l(x - a) + c = q(x) - 2\alpha(x, a) + q(a) + l(x) + c - l(a) = 0.$$

$t_a X = X \Leftrightarrow$ эти уравнения пропорциональны. Сравнивая квадратичные части, видим, что коэффициент пропорциональности равен единице. Значит, $\alpha(x, a) = 0 \quad \forall x \in V$, и $l(a) = 0$, так как $q(a) = \alpha(a, a) = 0$. Таким образом, $a \in \text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } l$. **Q.E.D.**

45 Аффинная классификация невырожденных вещественных квадратик.

Выберем базис пространства V , согласованный с $U = \text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } l$. Пусть $U = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$. Тогда уравнение квадратика не будет содержать членов с x_{m+1}, \dots, x_n .

Def. Квадрики, не являющиеся цилиндрическими, называются невырожденными. Достаточно изучать только их, потому что вырожденные квадратик сводятся к невырожденным меньших размерностей.

Типы невырожденных квадратик.

1. Неконические центральные квадратик.

Приняв центр за начало координат, приведём уравнение квадратика к виду $q(x_1, \dots, x_n) = 1$, где q - невырожденная квадратичная функция.

2. Конические квадратик.

Приняв центр за начало координат, приведём уравнение квадратика к виду $q(x_1, \dots, x_n) = 0$, где q - невырожденная квадратичная функция.

3. Нецентральные квадратик.

$\text{Ker } q \neq 0, \text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } l = 0$. Значит, $\dim \text{Ker } l = n - 1, \dim \text{Ker } q = 1$, и $V = \text{Ker } l \oplus \text{Ker } q$.

Выберем базис в V так, чтобы $\text{Ker } l = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle, \text{Ker } q = \langle e_n \rangle$. Начало отсчёта выберем на квадратике. Тогда уравнение квадратика приводится к виду $q_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n$, где q_1 - невырожденная квадратичная функция в $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$.

Рассмотрим случай $K = \mathbb{R}$.

За счёт выбора базиса в пространстве V уравнение невырожденной квадратика приводится в одному из следующих видов:

1. $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = 1 \quad (0 < k \leq n)$;
2. $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0 \quad \left(\left[\frac{n}{2} \right] \leq k < n \right)$;
3. $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{n-1}^2 = x_n \quad \left(\left[\frac{n-1}{2} \right] \leq k < n \right)$.

В случае $n = 2$:

- | | | |
|---|---------------------|-----------------------------|
| 1 | $x_1^2 + x_2^2 = 1$ | эллипс; |
| | $x_1^2 - x_2^2 = 1$ | гипербола; |
| 2 | $x_1^2 - x_2^2 = 0$ | пара пересекающихся прямых; |
| 3 | $x_1^2 = x_2$ | парабола. |

В случае $n = 3$:

- | | | |
|---|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ | эллипсоид; |
| | $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ | однополостный гиперболоид; |
| | $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ | двуполостный гиперболоид; |
| 2 | $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ | квадратичный конус; |
| 3 | $x_1^2 + x_2^2 = x_3$ | эллиптический параболоид; |
| | $x_1^2 - x_2^2 = x_3$ | гиперболический параболоид. |

В силу координатного признака равенства фигур в аффинной геометрии, чтобы узнать, аффинно эквивалентны ли квадрики, над \mathbb{R} надо уравнения обеих квадрик привести к каноническому виду. Если уравнения совпадут, то и квадрики совпадут.

46 Евклидовы аффинные пространства. Расстояние между точками и между плоскостями.

Def. Евклидовым аффинным пространством называется вещественное аффинное пространство, ассоциированное с евклидовым векторным пространством.

Def. Расстояние между точками определяется по следующей формуле: $\rho(p, q) \doteq |\vec{pq}|$.

Свойства:

- $\rho(p, q) > 0$ при $p \neq q$, $\rho(p, p) = 0$;
- $\rho(p, q) + \rho(q, r) \geq \rho(p, r)$.

Действительно, $|\vec{pq} + \vec{qr}| \leq |\vec{pr}|$, что вытекает из неравенства Коши-Буняковского.

Таким образом, евклидово аффинное пространство является метрическим.

Def. Расстояние между подмножествами P и Q определяется следующим образом:

$$\rho(P, Q) = \inf_{p \in P, q \in Q} \rho(p, q).$$

Теорема. Для двух плоскостей P_1 и P_2 существует общий перпендикуляр, если $U_1 \cap U_2 = 0$, то он единствен. Его длина равна $\rho(P_1, P_2)$ (если плоскости пересекаются, то под общим перпендикуляром понимается точка).

Доказательство. Отрезок $[p_1 + u_1, p_2 + u_2]$ есть общий перпендикуляр \Leftrightarrow он ортогонален $U_1 + U_2$. Но этот отрезок равен $\vec{p_1 p_2} - u_1 + u_2$, то есть он является общим перпендикуляром $\Leftrightarrow \vec{p_1 p_2} = u_1 - u_2 + v$, где $u_1 - u_2 \in U_1 + U_2$, а значит, $v \in (U_1 + U_2)^\perp$.

Далее, $\rho(P_1, P_2) = \inf_{u_1 \in U_1, u_2 \in U_2} \rho(p_1 + u_1, p_2 + u_2) = \inf |\vec{p_1 p_2} - u_1 + u_2| = \rho(\vec{p_1 p_2}, U_1 + U_2) = |\text{ort}_{U_1 + U_2} \vec{p_1 p_2}| = |v|$ - длина общего перпендикуляра.

47 Движения. Дифференциал как гомоморфизм группы движений в ортогональную группу. Собственные и несобственные движения.

Def. Движением аффинного пространства S называется аффинное преобразование, дифференциал которого есть ортогональное преобразование.

Так как $d(fg) = df \cdot dg$, и так как ортогональные преобразования образуют группу $O(V)$, то и движения образуют группу $\text{Isom}(S)$. Геометрия этой группы называется евклидовой геометрией.

В векторизованной форме движения записываются так: $f(x) = Ax + b$, где $A = df \in O(V)$, а вектор b зависит от начала отсчёта.

Значит, дифференциал осуществляет гомоморфизм $d : \text{Isom}(S) \rightarrow O(V)$.

Отображение $\det d : \text{Isom}(S) \rightarrow \{\pm 1\}$ - тоже гомоморфизм.

Def. Движение f , для которого $\det df = 1$, называется собственным, для которого -1 - несобственным. Собственные движения образуют подгруппу $\text{Isom}_+(S)$, несобственные - смежный класс по этой подгруппе. Значит, $[\text{Isom}(S); \text{Isom}_+(S)] = 2$.

Классификация движений прямой:

- Если движение f собственное, то $df = \mathcal{E}$, и f - параллельный перенос.

2. Если f - несобственное, то $df = -\mathcal{E}$. В векторизованной форме $f(x) = -x + b$, значит, $b/2$ - неподвижная точка, то есть f - центральная симметрия относительно этой неподвижной точки.

48 Ось движения. Геометрическое описание движений плоскости и трёхмерного пространства.

Теорема. Для любого движения f существует однозначно определённая плоскость $P = p_0 + U$ со следующими свойствами:

1. $f(P) = P$;
2. $f|_P$ - параллельный перенос;
3. df не имеет неподвижных векторов в U^\perp .

Доказательство. Если искомая плоскость P существует, то её направляющее пространство должно совпадать с пространством неподвижных векторов оператора $\mathcal{A} = df$. Обозначим это подпространство за U . В векторизованной форме $f(x) = \mathcal{A}x + b$. Пусть $b = b_0 + b_1$; $b_0 \in U$, $b_1 \in U^\perp$. Так как оператор $\mathcal{A} - \mathcal{E}$ невырожден на U^\perp , то существует единственный вектор $x_0 \in U$, такой, что $\mathcal{A}x_0 + b_1 = x_0$. Пусть p_0 - соответствующая ему точка. Тогда $f(p_0) = p_0 + b_0$. Плоскость $P = p_0 + U$ и является той единственной плоскостью, удовлетворяющей условиям теоремы. **Q.E.D.**

Def. Плоскость из теоремы называется осью движения.

Из канонического вида матрицы ортогонального преобразования следует:

$\dim U^\perp$ чётно, если f - собственное движение, и нечётно в противном случае.

Геометрическое описание движений плоскости:

1. f - собственное $\Rightarrow df$ - поворот на угол α . В векторизованной форме $f(x) = \mathcal{A}x + b$, где матрица \mathcal{A} есть $\Pi(\alpha)$.
 - (а) Если $\alpha = 0$, то f - параллельный перенос.
 - (б) Если $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, то \mathcal{A} не имеет неподвижных векторов, значит, уравнение $\mathcal{A}x + b = x$ имеет единственное решение (поскольку оно равносильно уравнению $(\mathcal{A} - \mathcal{E})x = -b$, и $\det(\mathcal{A} - \mathcal{E}) \neq 0$). Если это решение взять за начало координат, то $f(x) = \mathcal{A}x$, то есть f - поворот.
2. Если f - несобственное, то df - отражение относительно некоторого одномерного подпространства l . В векторизованной форме $f(x) = \mathcal{A}x + b$, и разложим: $b = b_0 + b_1$, $b_0 \in l$, $b_1 \perp l$. Рассмотрим прямую $\frac{b_1}{2} + l$. Она инвариантна относительно f : действительно, $f(\frac{b_1}{2} + u) = \mathcal{A}(\frac{b_1}{2} + u) + b = -\frac{b_1}{2} + u + b = (\frac{b_1}{2} + u) + b_0$. Если $o' = o + \frac{b_1}{2}$ - начало отсчёта, то $f(x) = \mathcal{A}x$. Значит, f - либо отражение, либо скользящая симметрия.

Геометрическое описание движений пространства:

Пусть $P = p_0 + U$ - ось движения f .

1. Если $\dim P = 3$, то f - параллельный перенос;
2. Если $\dim P = 2$, то ортогональное дополнение одномерно, значит, $df|_{U^\perp} = -\mathcal{E}$. Поэтому f есть либо отражение относительно P , либо скользящее отражение относительно P ;
3. Если $\dim P = 1$, то $df|_{U^\perp}$ - либо поворот относительно P , либо винтовое движение;
4. Если $\dim P = 0$, то, взяв эту точку за начало отсчёта, имеем, что f - ортогональное преобразование, не имеющее неподвижных векторов, то есть зеркальный поворот (поворот плюс отражение).

49 Прямоугольные системы координат в евклидовом аффинном пространстве. Свойство максимальной подвижности и координатный признак равенства фигур в евклидовой геометрии.

Def. Репер $(o; e_1, \dots, e_n)$ называется ортонормированным, если базис (e_1, \dots, e_n) ортонормированный. Система координат, связанная с таким репером, называется прямоугольной.

Теорема. Для любых двух ортонормированных реперов существует единственное движение f , переводящее первый репер во второй, то есть $f(o) = o'$; $df(e_i) = e'_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Доказательство. Существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый репер во второй, но поскольку df переводит ортонормированный базис векторного пространства в ортонормированный, то df ортогонально, значит, f - движение. **Q.E.D.**

Координатный признак равенства фигур:

Теорема. Фигуры F и F' равны \Leftrightarrow существуют такие ортонормированные реперы

$$(o; e_1, \dots, e_n) \text{ и } (o'; e'_1, \dots, e'_n),$$

$$\text{что } o + \sum_i x_i e_i \in F \Leftrightarrow o' + \sum_i x'_i e'_i \in F'.$$

Доказательство.

1. Существует $f \in \text{GA}(S)$, переводящее первый репер во второй, причём f - движение, и $f(F) = F'$. Значит, фигуры F и F' равны.
2. Пусть f - движение, переводящее первый репер во второй. Возьмём любой ортонормированный репер $(o; e_1, \dots, e_n)$ и рассмотрим репер $(f(o); f(e_1), \dots, f(e_n))$. Тогда $o + \sum_i x_i e_i \in F \Leftrightarrow f(o) + \sum_i x_i df(e_i) \in F'$. **Q.E.D.**

50 Приведение уравнения невырожденной квадрики в евклидовом пространстве к каноническому виду (без доказательства единственности в случае параболоида).

Найдём канонический вид уравнения невырожденной квадрики в прямоугольной системе координат:

1. Неконическая центральная квадрика.

Выберем начало координат в центре квадрики. Свободный член сделаем равным -1 .

Получим $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 1$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки и $\lambda_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

2. Конические квадрики.

$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 0$, и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки и умножения на одно и то же число.

3. Нецентральные квадрики (параболоиды).

Квадратичная функция приводится к виду $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_{(n-1)}^2 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c = 0$.

С помощью переноса начала координат можно получить $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_{(n-1)}^2 + b_n x_n + c = 0$, причём $b_n \neq 0$, иначе квадрика вырождена. Сдвигая по x_n , уберём свободный член и сделаем $b_n = -1$. Получим уравнение вида $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_{(n-1)}^2 = x_n$.

На самом деле, числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ определены однозначно с точностью до перестановки и умножения на -1 — без доказательства.

51 Проективные пространства, их аффинные карты. Однородные и неоднородные координаты.

Def. Проективным пространством, ассоциированным с векторным пространством V , называется множество PV одномерных подпространств пространства V . Множество PU одномерных подпространств, содержащихся в $(k+1)$ -мерном подпространстве U , называется k -мерной плоскостью проективного пространства PV .

Ясно, что нульмерные плоскости — это точки, одномерные — прямые, $(n-1)$ -мерные — гиперплоскости. Если $\dim V = n+1$, то положим $\dim PV \doteq n$. Обозначим: если $0 \neq x \in V$, то через \hat{x} обозначим $\langle x \rangle \in PV$.

Рассмотрим V , точку 0 и гиперплоскость S , не проходящую через 0 . Пусть V_S - направляющее подпространство плоскости S . Любое одномерное подпространство, не лежащее в V_S , пересекает S и V_S . Положим $\varphi_S : PV \setminus PV_S \rightarrow S$, тогда φ_S - биекция.

Def. Гиперплоскость S вместе с отображением φ_S называется аффинной картой пространства PV .

Def. Точки гиперплоскости PV_S называются бесконечно удалёнными по отношению к аффинной карте S .

k -мерная плоскость пространства PV , не лежащая в бесконечно удалённой гиперплоскости, изображается на карте k -мерной плоскостью. Точнее, изображается не вся k -мерная плоскость, а её k -мерная часть.

Пусть (e_0, e_1, \dots, e_n) - базис пространства V .

Def. Однородными координатами точки \hat{x} называются координаты вектора x . Они определены с точностью до одновременного умножения на любое число из K^* . Обозначение: $\hat{x} \doteq (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, причём не все x_i нули. Неоднородные координаты точки $\hat{x} \in PV$ - это аффинные координаты её изображения на аффинной карте. Установим связь между однородными и неоднородными координатами.

Пусть $S = e_0 + \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$. Тогда $\hat{x} = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, и $x_0 \neq 0$.

$$x = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n = x_0 \left(e_0 + \frac{x_1}{x_0} e_1 + \dots + \frac{x_n}{x_0} e_n \right)$$

- та же точка. Вектор $e_0 + \frac{x_1}{x_0} e_1 + \dots + \frac{x_n}{x_0} e_n$ имеет координаты $\frac{x_0}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$ относительно репера $(e_0; e_1, \dots, e_n)$. Таким образом, неоднородными координатами точки \hat{x} служат отношения $\frac{x_0}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$.

Def. Аффинным атласом называется система аффинных карт

$$S_i = e_i + \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle; \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Аффинный атлас полностью покрывает пространство PV .

52 Плоскости в проективном пространстве, их взаимное расположение.

Теорема. Через любые $k+1$ точку $p_0, p_1, \dots, p_k \in PV$ проходит плоскость размерности $\leq k$. Если эти точки не содержатся в плоскости размерности меньше, чем k , то проходящая через них k -мерная плоскость единственна. **Доказательство.** На языке векторного пространства V утверждение теоремы означает следующее: любые $k+1$ векторов $x_0, x_1, \dots, x_k \in V$ содержатся в подпространстве размерности не выше $k+1$, а если они не содержатся в подпространстве размерности меньше $k+1$, то они содержатся в единственном $(k+1)$ -мерном подпространстве. Это очевидно. **Q.E.D.**

Теорема. Пусть π_1, π_2 - такие плоскости пространства PV , что $\dim \pi_1 + \dim \pi_2 \geq n$. Тогда $\pi_1 \cap \pi_2$ непусто, причём $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) \geq \dim \pi_1 + \dim \pi_2 - n$.

Доказательство. Пусть $\pi_1 = PU_1$, $\pi_2 = PU_2$. Тогда по условию, $\dim U_1 + \dim U_2 \geq n+2 > n+1 = \dim V$. Значит, $U_1 \cap U_2 \neq 0$, то есть $\pi_1 \cap \pi_2$ непусто. Более точно, $\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - (n+1)$, поэтому $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) \geq \dim \pi_1 + \dim \pi_2 - n$. **Q.E.D.**

53 Проективные преобразования. Существование и единственность проективного преобразования n -мерного проективного пространства, переводящего одну заданную систему $n+2$ точек общего положения в другую.

Пусть \mathcal{A} - невырожденный линейный оператор в пространстве V . Тогда \mathcal{A} переводит каждое одномерное подпространство в одномерное подпространство. Тем самым, \mathcal{A} определяет некоторое преобразование $\hat{\mathcal{A}}$ пространства PV . Оно называется проективным преобразованием.

Свойства: $\widehat{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{A}} \cdot \hat{\mathcal{B}}$; $\widehat{\mathcal{E}} = id$; $\widehat{\mathcal{A}^{-1}} = (\hat{\mathcal{A}})^{-1}$.

Значит, проективные преобразования образуют группу. Она называется проективной группой и обозначается $PGL(V)$. Отображение $\mathcal{A} \mapsto \hat{\mathcal{A}}$ является гомоморфизмом групп. Но это необязательно изоморфизм.

Лемма. $\hat{\mathcal{A}} = id \Leftrightarrow \mathcal{A} = \lambda \mathcal{E}$.

Доказательство. Ясно, что $\widehat{\lambda \mathcal{E}} = id$. Обратно, пусть $\hat{\mathcal{A}} = id$. Тогда все ненулевые векторы являются собственными векторами оператора \mathcal{A} . Но так как сумма собственных векторов с различными собственными значениями не является собственным вектором, то все собственные значения оператора \mathcal{A} одинаковы. **Q.E.D.**

Следствие. $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$.

Доказательство. $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}} = id \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} = \lambda \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$. **Q.E.D.**

Запись в координатах:

Пусть (e_0, e_1, \dots, e_n) - базис V . Рассмотрим аффинную карту $S_0 = e_0 + \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in S_0$. Тогда $\mathcal{A}x = y_0 e_0 + y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, где $y_i = a_{i0} + a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n$.
Значит, $\mathcal{A}x = (z_1, \dots, z_n)$, где

$$z_i = \frac{y_i}{y_0} = \frac{a_{i0} + a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n}{a_{00} + a_{01} x_1 + \dots + a_{0n} x_n}.$$

Таким образом, проективное преобразование - это дробно-линейное преобразование.

При $n = 1$ оно выглядит как

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$, а $\infty \mapsto \frac{a}{c}$.

Def. Будем говорить, что точки $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in PV$ находятся в общем положении, если никакие $n + 1$ из них не лежат в одной гиперплоскости.

Теорема. Если точки $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in PV$, а также точки $q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in PV$ находятся в общем положении, то существует единственное проективное преобразование f , для которого

$$f(p_i) = q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1.$$

Доказательство. Пусть $p_i = \widehat{e}_i$, где $e_i \in V$. Тогда любые $n + 1$ векторов из e_0, \dots, e_{n+1} линейно независимы, и в частности, e_0, e_1, \dots, e_n - базис пространства V . Тогда e_{n+1} раскладывается по этому базису. Но за счёт нормировки базисных векторов можно добиться $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \dots + e_n$. При этом e_0, e_1, \dots, e_n определены однозначно с точностью до одновременного умножения на одно и то же число.

Аналогично, существуют такие векторы $f_0, f_1, \dots, f_{n+1} \in V$, что $q_i = \widehat{f}_i$, и $f_{n+1} = f_0 + f_1 + \dots + f_n$. Пусть \mathcal{A} - линейное преобразование, переводящее базис (e) в базис (f) , тогда $\mathcal{A}e_{n+1} = f_{n+1}$, поэтому $\widehat{\mathcal{A}}p_i = q_i \quad \forall i$.

Теперь пусть \mathcal{B} - линейное преобразование, такое, что $\widehat{\mathcal{B}}p_i = q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1$. Тогда $\mathcal{B}e_i = \lambda_i f_i$. Но так как $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \dots + e_n$, то $\mathcal{B}e_{n+1} = \mathcal{B}e_0 + \dots + \mathcal{B}e_n = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = \lambda_{n+1} f_{n+1}$.

Значит, $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} \Rightarrow \mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$. **Q.E.D.**

54 Двойное отношение четвёрки точек, лежащих на одной прямой. Его инвариантность при проективных преобразованиях.

У проективного преобразования нет инварианта даже трёх точек, лежащих на одной прямой.

Пусть $L = PU \subset PV$ - прямая, то есть $\dim U = 2$. Пусть (e_1, e_2) - базис в U . Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4 \in L, p_i = \widehat{u}_i$, где $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$.

Обозначим через $\det(u, v)$ ($\forall u, v \in U$) определитель матрицы, составленный из координат векторов u и v в базисе (e_1, e_2) . Двойное отношение точек p_1, p_2, p_3, p_4 определяется по формуле

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{\det(u_1, u_3)}{\det(u_3, u_2)} : \frac{\det(u_1, u_4)}{\det(u_4, u_2)}.$$

Это выражение не зависит от выбора векторов $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$, также оно не зависит от базиса пространства U .

Выразим двойное отношение через неоднородные координаты точек p_i на прямой L .

Пусть S - аффинная карта PV . $u_1, u_2, u_3, u_4 \in S \cap L, u_i = e_2 + x_i e_1$. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - неоднородные координаты точек p_i . Тогда

$$\det(u_i, u_j) = \begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix} = x_i - x_j, \text{ таким образом, } (p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - x_4}{x_4 - x_2} = \frac{(u_1, u_2; u_3)}{(u_1, u_2; u_4)}.$$

Теорема. Проективное преобразование $f \in \text{PGL}(V)$ сохраняет двойное отношение, то есть

$$(f(p_1), f(p_2); f(p_3), f(p_4)) = (p_1, p_2; p_3, p_4).$$

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4 \in PU, \dim U = 2$. Пусть (e_1, e_2) - базис U , и $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$ таковы, что $\widehat{u}_i = p_i$.

Пусть $f = \widehat{\mathcal{A}}, \mathcal{A} \in \text{GL}(V)$. Пусть $v_i = \mathcal{A}u_i, f_1 = \mathcal{A}e_1, f_2 = \mathcal{A}e_2$. Тогда (f_1, f_2) - базис $\mathcal{A}U, \widehat{v}_i = f(p_i)$.

$$(f(p_1), f(p_2); f(p_3), f(p_4)) = \frac{\det(v_1, v_3)}{\det(v_3, v_2)} : \frac{\det(v_1, v_4)}{\det(v_4, v_2)}.$$

Но v_i выражается через (f_1, f_2) также, как u_i выражался через (e_1, e_2) , поэтому

$$\det(v_i, v_j) = \det(u_i, u_j).$$

Таким образом, двойное отношение сохраняется при проективном преобразовании. **Q.E.D.**

55 Квадрики в проективном пространстве, их аффинные изображения. Проективная классификация невырожденных вещественных квадрик, её сопоставление с аффинной классификацией.

Def. Конусом в векторном пространстве V называется подмножество $X \subset V$, обладающее свойством

$$x \in X \Rightarrow \lambda x \in X \quad \forall \lambda \in K.$$

Проективизацией конуса $X \subset V$ называется множество $PX \subset PV$ всех одномерных подпространств, содержащихся в X . Изображение проективизации конуса X на аффинной карте S есть $X \cap S$.

Квадратичным конусом в пространстве V называется коническая квадрика с вершиной в нуле. Проективизация квадратичного конуса называется проективной квадрикой.

Квадратичный конус - это подмножество, задаваемое уравнением $Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, где Q - квадратичная функция в пространстве V , при условии, что это множество не есть подпространство. Это же уравнение есть уравнение соответствующей проективной квадрики в однородных координатах. Изображение на аффинной карте $S_0 : x_0 = 1$ задаётся уравнением $Q(1, x_1, \dots, x_n) = 0$.

Если это не пустое множество и не плоскость, то это аффинная квадрика (на самом деле, можно доказать, что если поле K бесконечно, то это не может быть пустым множеством). Тип этой аффинной квадрики, безусловно, зависит от аффинной карты.

Бесконечно удалённая часть проективной квадрики задаётся уравнением $Q(0, x_1, \dots, x_n) = 0$. Это уравнение в однородных координатах на бесконечно удалённой гиперплоскости, и если это не пустое множество и не плоскость, то это квадрика.

Всякая аффинная квадрика X на S_0 является изображением однозначно определённой проективной квадрики \hat{X} . Уравнение \hat{X} в однородных координатах получается из уравнения квадрики X путём вставления x_0 в члены первой степени и x_0^2 в свободный член.

Def. Проективная квадрика $Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ называется невырожденной, если квадратичная функция Q невырождена, и вырожденной в противном случае.

Пусть Q вырождена, и F - соответствующая симметрическая билинейная функция.

Пусть $u \in \text{Ker } F$, $u \neq 0$. Тогда $Q(x) = 0 \Rightarrow Q(\lambda x + \mu u) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in K$, потому что

$$Q(\lambda x + \mu u) = \lambda^2 Q(x) + 2\lambda\mu F(x, u) + \mu^2 Q(u) = 0.$$

Это означает, что соответствующая проективная квадрика вместе с каждой точкой p содержит прямую, проходящую через p и точки $o = \hat{u}$.

В аффинном изображении на карте S мы получим конус, если $o \in S$, и цилиндр в противном случае (если $o \notin S$, то это бесконечно удалённая точка, и $p \in$ изображению \Rightarrow прямая, параллельная o , принадлежит изображению).

Таким образом, в проективной геометрии нет разницы между конусом и цилиндром.

Рассмотрим невырожденные проективные квадрики в вещественном проективном пространстве.

Канонический вид уравнения в однородных координатах:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k-1}^2 - \dots - x_n^2 = 0 \quad \left(\frac{n-1}{2} \leq k < n \right).$$

Рассмотрим случаи $n = 2$ и $n = 3$.

При $n = 2$ есть только одна возможность:

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0. \text{ Эта квадрика называется коникой.}$$

При $n = 3$ - две возможности:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \text{ - овальная квадрика, и}$$

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \text{ - линейчатая квадрика.}$$

Таблица:

n	Проективная квадрака	Аффинное изображение	Бесконечно удалённая часть
2	коника	эллипс	пусто
		парабола	точка
		гипербола	пара точек
3	овальная квадрака	эллипсоид	пусто
		эллиптический параболоид	точка
		двуполостный гиперболоид	коника
	линейчатая квадрака	однополостный гиперболоид	коника
		гиперболический параболоид	пара прямых

56 Векторные модели сферической и гиперболической геометрий. Плоскости, расстояние между точками и движения в этих моделях.

56.1 Сферическая геометрия.

Пусть E^{n+1} - $(n+1)$ -мерное евклидово пространство со скалярным умножением

$$(x, x) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Рассмотрим S^n - n -мерную сферу, задаваемую уравнением $(x, x) = 1$. k -мерные плоскости на S^n - это подмножества вида $S^n \cap U$, где U - $(k+1)$ -мерное подпространство в E^{n+1} . Нульмерные плоскости - это пары диаметрально противоположных точек, одномерные - это большие круги, называемые прямыми в сферической геометрии.

Пусть $\dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 \geq n$. Тогда $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$. В частности, любые две прямые на S^2 пересекаются. Через любые две точки проходит прямая.

Расстояние между точками определяется по формуле $\cos \rho(x, y) = (x, y)$, то есть равно длине дуги большого круга.

Групповой смысл:

Рассмотрим однопараметрическую группу поворотов в подпространстве $\langle x, y \rangle$. В ортонормированном базисе

$$\Pi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

$\Pi(t)\Pi(s) = \Pi(t+s)$. Если $y = \Pi(t)x$, $0 \leq t \leq \pi$, то $\rho(x, y) = t$.

Отсюда следует, что расстояние аддитивно: действительно, для точек x, y, z , лежащих на одной полуокружности, и y - между x и z выполняется $\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z)$, так как $y = \Pi(t)x$; $z = \Pi(s)y$, тогда $z = \Pi(t+s)x$.

Группа движений сферической геометрии - это ортогональная группа O_{n+1} , так как эта группа сохраняет сферу.

56.2 Гиперболическая геометрия (геометрия Лобачевского).

Пусть $E^{n,1}$ - псевдоевклидово пространство сигнатуры $(n, 1)$ (пространство Минковского) со скалярным умножением

$$(x, x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Рассмотрим гиперболоид $L^n : (x, x) = -1$; $x_0 > 0$ (рассматривается только одна связная компонента).

Def. $(k+1)$ -мерное подпространство $U \subset E^{n,1}$ называется гиперболическим, если ограничение скалярного умножения на него имеет сигнатуру $(k, 1)$, то есть невырождено и неопределённо.

k -мерной плоскостью пространства L^n называется подмножество вида $L^n \cap U$, где U - $(k+1)$ -мерное гиперболическое подпространство.

Нульмерные плоскости - это точки, одномерные плоскости называются прямыми.

Расстояние между точками определяется по формуле

$$\operatorname{ch} \rho(x, y) = -(x, y).$$

Групповой смысл:

Рассмотрим однопараметрическую группу гиперболических поворотов в двумерном подпространстве $\langle x, y \rangle$. В ортонормированном базисе

$$H(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

Групповое свойство: $H(t)H(s) = H(t+s)$. В подходящем базисе (где $(x, x) = x_0x_1$)

$$H(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Такое преобразование называется ещё преобразованием Лоренца.

Если $y = H(t)x$, то $\rho(x, y) = t$. Действительно, пусть $(e_0 = x, e_1)$ - ортонормированный базис в $\langle x, y \rangle$. Тогда $H(t)x = x \operatorname{ch} t + e_1 \operatorname{sh} t = y$. $(x, y) = -\operatorname{ch} t \Rightarrow \operatorname{ch} \rho(x, y) = -(x, y)$.

Свойство аддитивности расстояний между точками: если точки x, y, z лежат на одной прямой, причём y лежит между x и z , то

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z).$$

Группа движений геометрии Лобачевского - это псевдоортогональная группа $O_{n,1}$ - группа линейных преобразований $E^{n,1}$, сохраняющая скалярное умножение. Точнее, её подгруппа индекса 2 ($O'_{n,1}$), сохраняющая каждую связную компоненту гиперboloида $(x, x) = -1$.

57 Свойство максимальной подвижности в сферической и гиперболической геометриях.

Def. Ортонормированным репером в пространстве S^n (соответственно, L^n) называется система $(e_0; e_1, \dots, e_n)$, где $e_0 \in S^n$ (соответственно, L^n), а (e_1, \dots, e_n) - ортонормированный базис в касательном подпространстве $T_{e_0}(S^n) = \langle e_0 \rangle^\perp$ (соответственно, $T_{e_0}(L^n) = \langle e_0 \rangle^\perp$, а ортонормированный базис в $T_{e_0}(L^n)$ - это базис, для которого $(e_0, e_0) = -1$, $(e_i, e_i) = 1$ при $i > 0$, $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$).

Теорема. Для любых ортонормированных реперов $(e_0; e_1, \dots, e_n)$ и $(e'_0; e'_1, \dots, e'_n)$ существует единственное движение, переводящее первый репер во второй (в S^n и в L^n).

Доказательство. Для S^n существует единственный линейный оператор \mathcal{A} в E^{n+1} , переводящий базис

$$(e_0, e_1, \dots, e_n)$$

в базис $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n)$, и так как оба базиса ортонормированные, то $\mathcal{A} \in O_{n+1}$;

Для L^n аналогично с тем замечанием, что $\mathcal{A}e_0 = e'_0$, поэтому $\mathcal{A} \in O'_{n,1}$. **Q.E.D.**

58 Сумма углов сферического и гиперболического треугольника.

Измерение углов между прямыми m и l :

Если $m = \Pi(t)l$, где $\Pi(t)$ - поворот вокруг точки $p = m \cap l$ на угол t в плоскости ml , то $\angle ml = t$.

Если e и f - единичные векторы, ортогональные l и m соответственно, то $\cos \angle lm = -(e, f)$.

Составим матрицу для треугольника с углами α, β и γ , вершинами p, q, r и единичными нормальными к сторонам e, f, g соответственно:

$$G(e, f, g) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы обозначим $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \det G(e, f, g) = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma.$$

Если E^2 , то $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, если S^2 , то $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) > 0$, если L^2 , то $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) < 0$.

Теорема. Сумма углов сферического (гиперболического) треугольника больше π (соответственно, меньше π).

Доказательство. Докажем, что для сферического (гиперболического) треугольника $\alpha + \beta + \gamma \neq \pi$. Действительно, иначе существовал бы евклидовыи треугольник с теми же углами, и тогда $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Из соображений непрерывности следует, что $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ имеет один знак для всех треугольников. Для S^2 есть треугольник с $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Для L^2 - идеальный треугольник с $\alpha = \beta = \gamma = 0$. **Q.E.D.**

Рассмотрим равносторонний треугольник с $\alpha = \beta = \gamma$.

Тогда $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \Delta(\alpha, \alpha, \alpha) = 1 - 3 \cos^2 \alpha - 2 \cos^3 \alpha = (1 + \cos \alpha)^2(1 - 2 \cos \alpha)$.

$$1 - 2 \cos \alpha \begin{cases} > 0, & \text{для } S^2; \\ = 0, & \text{для } E^2; \\ < 0, & \text{для } L^2. \end{cases} \quad \text{Поэтому } \alpha \begin{cases} > \frac{\pi}{3}, & \text{для } S^2; \\ = \frac{\pi}{3}, & \text{для } E^2; \\ < \frac{\pi}{3}, & \text{для } L^2. \end{cases}$$

59 Тензорная алгебра векторного пространства.

Def. Полилинейной функцией, или p -линейной функцией на векторном пространстве V над полем K называется отображение $\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \rightarrow K$, линейное по каждому аргументу.

Пусть (e_1, \dots, e_n) - базис пространства V . Положим $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \doteq a_{i_1 \dots i_p}$.

В координатах $\alpha(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p} x_{1i_1} \dots x_{pi_p}$. Здесь первый индекс - это номер вектора, второй - номер координаты.

Пространство p -линейных функций на V обозначается $T_p(V)$. Базис этого пространства составляют функции

$$\{\varepsilon_{i_1 \dots i_p} : i_1, \dots, i_p\},$$

определяемые следующим образом:

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_p}(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = 1;$$

$\varepsilon_{i_1 \dots i_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ в остальных случаях.

Таким образом, $\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p} \varepsilon_{i_1 \dots i_p}$, значит, базис. Поэтому $\dim T_p(V) = (\dim V)^p$.

В частности, $T_0(V) = K$; $T_1(V) = V^*$.

Тензорное умножение определяется как операция

$$\otimes : T_p(V) \times T_q(V) \rightarrow T_{p+q}(V)$$

по следующему правилу: если $\alpha \in T_p(V)$, $\beta \in T_q(V)$, то $\alpha \otimes \beta \in T_{p+q}(V)$, так, что

$$\alpha \otimes \beta(x_1, \dots, x_{p+q}) = \alpha(x_1, \dots, x_p) \cdot \beta(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}).$$

Свойства:

1. Линейность по обоим аргументам: по α и по β ;
2. Ассоциативность: $\alpha \in T_p(V)$, $\beta \in T_q(V)$, $\gamma \in T_r(V) \Rightarrow (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$;
3. $\varepsilon_{i_1, \dots, i_p} \in T_p(V)$, $\varepsilon_{i_{p+1}, \dots, i_{p+q}} \in T_q(V) \Rightarrow \varepsilon_{i_1, \dots, i_p} \otimes \varepsilon_{i_{p+1}, \dots, i_{p+q}} = \varepsilon_{i_1, \dots, i_{p+q}} \in T_{p+q}(V)$.

Def. Тензорным произведением векторных пространств V и U называется векторное пространство W вместе с билинейным отображением $\otimes : V \times U \rightarrow W$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$, обладающим свойством:

Если (e_1, \dots, e_n) - базис V , (f_1, \dots, f_m) - базис U , то $(e_i \otimes f_j : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ - базис W .

Обозначается: $W = V \otimes U$, $\dim W = \dim V \cdot \dim U$.

Таким образом, $T_{p+q}(V) = T_p(V) \otimes T_q(V)$.

Аналогично определяется тензорное произведение нескольких векторных пространств, поэтому

$$T_p(V) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_p.$$

В частности, $\varepsilon_{i_1, \dots, i_p} = \varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_p}$, где $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p}$ - координатные функции из V^* . Для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in V^*$ $(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p)(x_1, \dots, x_p) = \alpha_1(x_1) \dots \alpha_p(x_p)$.

Рассмотрим $T(V^*) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T_p(V) \doteq \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots) : \alpha_p \in T_p(V), \text{ и лишь конечное число } \alpha_p \neq 0\}$.

Операции в $T(V^*)$ определяются покомпонентно. Таким образом, $T(V^*)$ - векторное пространство. Также на $T(V^*)$ определена операция тензорного умножения: $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)(\beta_0, \beta_1, \dots) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$, где

$$\gamma_p = \sum_{q+r=p} \alpha_q \otimes \beta_r.$$

Def. Алгеброй над полем K называется векторное пространство над K , в котором задана билинейная операция умножения $A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$. Всё должно удовлетворять аксиомам:

1. Относительно сложения и умножения A - кольцо;
2. Относительно сложения и умножения на элементы поля K A - векторное пространство;
3. $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Операция умножения в алгебре однозначно определяется произведениями базисных векторов:

$e_i e_j = \sum_k c_{ijk} e_k$. Числа c_{ijk} называются структурными константами алгебры.

$T(V^*)$ - алгебра. Она называется тензорной алгеброй пространства V^* . Это ассоциативная алгебра с единицей (единицей служит единица поля $K = T_0(V)$).

Аналогично можно определить $T(V)$.

$T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V)$, где $T^p(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p$. Элементы $T^p(V)$ можно рассматривать как p -линейные функции

на V^* : $(x_1 \otimes \dots \otimes x_p)(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = x_1(\alpha_1) \dots x_p(\alpha_p)$.

$T^1(V) = V$, потому что векторы - это линейные функции на V^* .

60 Симметрическая алгебра векторного пространства (над полем нулевой характеристики), её связь с алгеброй многочленов.

Пусть S_p - группа подстановок p элементов.

$\forall \sigma \in S_p \quad \forall \alpha \in T_p(V)$ определим $\sigma\alpha \in T_p(V)$ по формуле

$$(\sigma\alpha)(x_1, \dots, x_p) = \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}).$$

Лемма. $(\sigma\tau)\alpha = \sigma(\tau\alpha)$.

Доказательство. $\sigma(\tau\alpha)(x_1, \dots, x_p) = (\tau\alpha)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = (\tau\alpha)(y_1, \dots, y_p) = \alpha(y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(p)}) = \alpha(x_{\sigma\tau(1)}, \dots, x_{\sigma\tau(p)}) = ((\sigma\tau)\alpha)(x_1, \dots, x_p)$. **Q.E.D.**

Def. p -линейная функция называется симметрической, если $\sigma\alpha = \alpha \quad \forall \sigma \in S_p$.

Симметрические функции образуют подпространство $S_p(V) \subset T_p(V)$.

Пусть далее $\text{char } K = 0$.

Рассмотрим отображение симметризации

$$\text{Sym} : T_p(V) \rightarrow T_p(V), \quad \text{Sym } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma\alpha.$$

Теорема. Оператор Sym есть проектор на подпространство $S_p(V)$.

Доказательство.

1. Если $\alpha \in S_p(V)$, то $\text{Sym } \alpha = \alpha$;

2. $\forall \alpha \quad \text{Sym } \alpha \in S_p(V)$:

$$\forall \tau \quad \tau \text{Sym } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \tau\sigma\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma' \in S_p} \sigma'\alpha = \text{Sym } \alpha;$$

3. Из доказательства следует, что $\text{Sym}^2 = \text{Sym}$, поэтому Sym — проектор. **Q.E.D.**

Лемма. $\text{Sym}(\text{Sym } \alpha \otimes \beta) = \text{Sym}(\alpha \otimes \text{Sym } \beta) = \text{Sym}(\alpha \otimes \beta)$.

Доказательство. Действительно, $\text{Sym}(\sigma\alpha \otimes \beta) = \text{Sym}(\alpha \otimes \beta)$, потому что в $\sigma\alpha$ - перестановка аргументов, но в $\text{Sym}(\alpha \otimes \beta)$ потом всё равно переставляем, поэтому ничего не меняется.

Суммируя по всем $\sigma \in S_p$ и деля на $p!$, получаем, что $\text{Sym}(\text{Sym } \alpha \otimes \beta) = \text{Sym}(\alpha \otimes \beta)$.

Вторая часть доказывается аналогично. **Q.E.D.**

Def. Определим операцию симметрического умножения:

$$\vee : S_p(V) \times S_q(V) \rightarrow S_{p+q}(V); \quad \alpha \vee \beta = \text{Sym}(\alpha \otimes \beta).$$

Свойства:

1. Линейность по обоим аргументам;

2. Коммутативность:

$$\beta \vee \alpha = \text{Sym}(\beta \otimes \alpha) = \text{Sym}(\rho(\alpha \otimes \beta)) = \alpha \vee \beta \quad \text{для некоторой } \rho \in S_{p+q}.$$

3. Ассоциативность: вытекает из леммы "Sym — Sym".

Рассмотрим симметрическую алгебру пространства V^* :

$$S(V^*) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S_p(V),$$

где операция умножения продолжается с операции \vee по линейности (аналогично $T(V^*)$).

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in S_1(V) = V^*$.

$$(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_p)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_1(x_{\sigma(1)}) \dots \alpha_p(x_{\sigma(p)}) = \frac{1}{p!} \text{per}(\alpha_i(x_j)) - \text{перманент.}$$

Пусть $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ - базис V^* ; $(\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*) = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V .

Теорема. $\varepsilon_{i_1} \vee \dots \vee \varepsilon_{i_p}$ ($i_1 \leq \dots \leq i_p$) - базис в $S_p(V)$.

Доказательство.

1. Произведения $\varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_p}$ образуют базис в $T_p(V)$, значит, произведения $\text{Sym}(\varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_p}) = \varepsilon_{i_1} \vee \dots \vee \varepsilon_{i_p}$ порождают пространство $S_p(V)$. Но ввиду коммутативности достаточно рассматривать только $\varepsilon_{i_1} \vee \dots \vee \varepsilon_{i_p}$, где $(i_1 \leq \dots \leq i_p)$.
2. Пусть $\sum_{i_1 \leq \dots \leq i_p} a_{i_1 \dots i_p} \varepsilon_{i_1} \vee \dots \vee \varepsilon_{i_p} = 0$. Возьмём $j_1 \leq \dots \leq j_p$ и рассмотрим значение суммы на $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$. Если $(i_1, \dots, i_p) \neq (j_1, \dots, j_p)$, то $(\varepsilon_{i_1} \vee \dots \vee \varepsilon_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0$, в противном случае это значение не равно нулю. Значит, $a_{i_1 \dots i_p} = 0$. **Q.E.D.**

Следствие. $\dim S_p(V) = CC_n^p = \frac{n(n+1) \dots (n+p-1)}{p!}$ (число сочетаний с повторениями).

Def. Функция на V со значениями в K называется многочленом, если в координатах она записывается как многочлен.

Степень многочлена не зависит от базиса (так как замена координат линейна).

Многочлены образуют алгебру $K[V]$.

$$K[V] = \bigoplus_{p=0}^{\infty} K[V]_p,$$

где $K[V]_p$ - пространство однородных многочленов степени p .

Def. Для любой симметрической p -линейной функции $\alpha \in S_p(V)$ определён ассоциированный с ней многочлен $f_\alpha(x) = \alpha(x, x, \dots, x) \in K[V]_p$.

Теорема. Отображение $\alpha \mapsto f_\alpha$ определяет изоморфизм алгебр $S(V^*)$ и $K[V]$.

Доказательство.

1. Докажем, что это гомоморфизм. Надо доказать, что $f_{\alpha \vee \beta} = f_\alpha f_\beta$. Действительно, $f_{\alpha \vee \beta}(x) = (\alpha \vee \beta)(\underbrace{x, \dots, x}_{p+q}) = \alpha(\underbrace{x, \dots, x}_p) \beta(\underbrace{x, \dots, x}_q) = f_\alpha(x) f_\beta(x)$.
2. $f_{\varepsilon_i}(x) = \varepsilon_i(x) = x_i \Rightarrow f_{\varepsilon_{i_1} \vee \dots \vee \varepsilon_{i_p}}(x) = x_{i_1} \dots x_{i_p}$. Но одночлены $x_{i_1} \dots x_{i_p}$ с $i_1 \leq \dots \leq i_p$ образуют базис в пространстве многочленов, а $\varepsilon_{i_1} \vee \dots \vee \varepsilon_{i_p}$ с $i_1 \leq \dots \leq i_p$ образуют базис в пространстве $S_p(V)$, так как $\text{char } K \neq 0$. Поэтому $\alpha \mapsto f_\alpha$ - изоморфизм. **Q.E.D.**

Аналогично строится $S(V)$. Оно изоморфно $K[V^*]$.

61 Внешняя алгебра векторного пространства (над полем нулевой характеристики).

Def. p -линейная функция $\alpha \in T_p(V)$ называется кососимметрической, если $\forall \sigma \in S_p \quad \sigma \alpha = (\text{sgn } \sigma) \alpha$.

Кососимметрические функции образуют подпространство $\Lambda_p(V) \subset T_p(V)$.

Def. Операция альтернирования определяется следующим образом:

$$\text{Alt} : T_p(V) \rightarrow T_p(V), \quad \text{Alt } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \sigma \alpha.$$

Теорема. Alt - проектор на подпространство $\Lambda_p(V)$.

Доказательство.

1. $\alpha \in \Lambda_p(V) \Rightarrow \text{Alt } \alpha = \alpha$.
2. $\forall \alpha \in T_p(V) \text{ Alt } \alpha \in \Lambda_p(V)$. Действительно,
 $\forall \tau \in S_p \quad \tau \text{Alt } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \tau \sigma \alpha = \text{sgn } \tau \cdot \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \sigma \alpha = \text{sgn } \tau \text{Alt } \alpha$.
3. $\text{Alt}^2 = \text{Alt} \Rightarrow \text{Alt}$ - проектор на $\Lambda_p(V)$. **Q.E.D.**

Лемма. $\text{Alt}(\text{Alt } \alpha \otimes \beta) = \text{Alt}(\alpha \otimes \text{Alt } \beta) = \text{Alt}(\alpha \otimes \beta)$.

Доказательство. $\forall \sigma \in S_p \quad \text{Alt}(\sigma \alpha \otimes \beta) = (\text{sgn } \sigma) \text{Alt}(\alpha \otimes \beta)$. Суммируя по всем σ и деля на $p!$, получаем, что $\text{Alt}(\text{Alt } \alpha \otimes \beta) = \text{Alt}(\alpha \otimes \beta)$. **Q.E.D.**

Def. Операция внешнего умножения определяется таким образом:

$$\wedge : \Lambda_p(V) \times \Lambda_q(V) \rightarrow \Lambda_{p+q}(V), \quad \alpha \wedge \beta = \text{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

Свойства:

1. Билинейность;
2. Суперкоммутативность: $\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta$ ($\alpha \in \Lambda_p(V)$, $\beta \in \Lambda_q(V)$) - доказывается аналогично симметрическому умножению: $\text{sgn } \rho = (-1)^{pq}$.
3. Ассоциативность - вытекает из соответствующей леммы.

Можно построить внешнюю алгебру пространства V^* :

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda_p(V).$$

В ней три операции: сумма, умножение на число и внешнее умножение (продолжается по дистрибутивности операции $\wedge : \Lambda_p(V) \times \Lambda_q(V) \rightarrow \Lambda_{p+q}(V)$).

$\Lambda_0(V) = K$, $\Lambda_1(V) = V^*$.

Если $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in V^*$, то $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \alpha_1(x_{\sigma(1)}) \dots \alpha_p(x_{\sigma(p)}) =$
 $= \frac{1}{p!} \det(\alpha_i(x_j))$ - обыкновенный определитель.

Теорема. Произведения $\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$, где $i_1 < \dots < i_p$, образуют базис подпространства $\Lambda_p(V)$.

Доказательство.

1. Так как произведения $\varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_p}$ образуют базис пространства $T_p(V)$, то $\text{Alt}(\varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_p}) = \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$ порождают $\Lambda_p(V)$. Если среди индексов есть одинаковые, то получается ноль. Если нет, то можно упорядочить по строгому возрастанию (при этом умножится на ± 1). Поэтому произведения $\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$, где $i_1 < \dots < i_p$, порождают подпространство $\Lambda_p(V)$.
2. То, что это базис, доказывается аналогично симметрическому произведению. **Q.E.D.**

Следствие. $\dim \Lambda_p(V) = C_n^p$, в частности, $\dim \Lambda_p(V) = 0$ при $p > n$.

$\dim \Lambda(V^*) = 2^n$, $\dim \Lambda_n(V) = 1$.

Аналогично строится внешняя алгебра $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p(V)$.

Элементы $\Lambda^p(V)$ называются p -векторами.

62 Разложимые поливекторы и подпространства векторного пространства.

Теорема. Пусть $a_1, \dots, a_p \in V$. Тогда $a_1 \wedge \dots \wedge a_p = 0 \Leftrightarrow$ векторы линейно зависимы.

Доказательство.

1. Пусть векторы линейно зависимы. Для определённости положим $a_p = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{p-1} a_{p-1}$. Тогда $a_1 \wedge \dots \wedge a_p = a_1 \wedge \dots \wedge a_{p-1} \wedge (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{p-1} a_{p-1}) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i (a_1 \wedge \dots \wedge a_{p-1} \wedge a_i) = 0$.

2. Пусть векторы линейно независимы. Включим их в базис (e_1, \dots, e_n) пространства V , так чтобы $e_i = a_i$ $i = 1, \dots, p$. Тогда $a_1 \wedge \dots \wedge a_p = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ - один из базисных векторов пространства $\Lambda_p(V)$, значит, не равен нулю. **Q.E.D.**

Теорема. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ - две линейно независимые системы векторов V . Тогда $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$ и $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ пропорциональны $\Leftrightarrow \langle a_1, \dots, a_p \rangle = \langle b_1, \dots, b_p \rangle$.

Доказательство.

1. Пусть $\langle a_1, \dots, a_p \rangle = \langle b_1, \dots, b_p \rangle$. Тогда система (b) линейно выражается через систему (a) . Подставляя это выражение в $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$, получаем, что $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ линейно выражается через $a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_p}$. Но эти произведения линейно выражаются через $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$, поэтому и $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ линейно выражается через $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$.
2. Пусть $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$ и $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ пропорциональны. Выберем базис (e_1, \dots, e_n) пространства V , согласованный с $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_p \rangle$. То есть, $\langle a_1, \dots, a_p \rangle = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_p \rangle = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \oplus \langle e_{p+1}, \dots, e_{2p-r} \rangle$. Тогда мы видим, что $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$ пропорционально $e_1 \wedge \dots \wedge e_p$, а $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ пропорционально $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_{2p-r}$. Но $e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ и $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_{2p-r}$ - (при $r < p$) два разных базисных вектора пространства $\Lambda_p(V)$, поэтому они непропорциональны. Значит, $r = p$. **Q.E.D.**

Таким образом, подпространство может характеризоваться лишь внешними произведениями базисных векторов. Пусть $U \subset V$, $\dim U = p$. Пусть (a_1, \dots, a_p) - базис U . Разложим $a_1 \wedge \dots \wedge a_p \in \Lambda_p(V)$ по базису:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} M_{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p},$$

где (e_1, \dots, e_n) - базис пространства V . $M_{i_1 \dots i_p}$, где $i_1 < \dots < i_p$, называются плюккеровыми координатами подпространства U . Они однозначно определяют подпространство, но сами они однородны.

$a_i = \sum_j a_{ij} e_j$, $A_{p \times n} = (a_{ij})$. $M_{1 \dots p} = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{p\sigma(p)}$ - угловой минор матрицы A . Таким образом,

$M_{i_1 \dots i_p}$ - тоже минор, образованный столбцами i_1, \dots, i_p .

Def. p -вектор, представимый в виде $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$, где $a_1, \dots, a_p \in V$, называется разложимым.

Только разложимые p -векторы соответствуют подпространствам.

63 Канонический вид и критерий разложимости бивектора.

Пусть $b \in \Lambda^2(V)$. Это можно рассматривать как кососимметрическую билинейную функцию на V^* . $b(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = b_{ij}$, $B = (b_{ij})$ - матрица бивектора. Она кососимметрическая.

Лемма. $b = \sum_{i,j} b_{ij} e_i \wedge e_j$.

Доказательство. Найдём матрицу бивектора $e_i \wedge e_j$:

$$(e_i \wedge e_j)(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -(e_i \wedge e_j)(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = \frac{1}{2} e_i(\varepsilon_i) e_j(\varepsilon_j) = \frac{1}{2}.$$

Получаем $\frac{1}{2} b_{ij}$. Но в сумме будет b_{ij} , как раз. **Q.E.D.**

Теорема. $\forall b \in \Lambda^2(V)$ существует симплектический базис.

Доказательство. Вытекает из соответствующей теоремы. **Q.E.D.**

Теорема. Следующие условия эквивалентны:

1. Бивектор b разложим;
2. $\text{rk } b \leq 2$;
3. $b \wedge b = 0$.

Доказательство. Пусть b разложим. Можно считать $b \neq 0$. Пусть $b = a_1 \wedge a_2$, и a_1, a_2 линейно независимы. Дополним a_1, a_2 до базиса (e_1, \dots, e_n) пространства V : $a_1 = e_1$, $a_2 = e_2$. Тогда $b = e_1 \wedge e_2$. Значит, $\text{rk } b = 2$ и $b \wedge b = 0$.

Пусть b неразложим. Тогда существует базис, в котором

$$b = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots + e_{2k-1} \wedge e_{2k},$$

где $k \geq 2$ (иначе b разложим). Поэтому $\text{rk } b = 2k > 2$, $b \wedge b = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \dots \neq 0$.

64 Определитель как единственная кососимметрическая n -линейная функция в n -мерном пространстве.

Как известно, $\dim \Lambda_p(V) = C_n^p$, то есть $\dim \Lambda(V) = 1$. Поэтому кососимметрическая n -линейная функция в n -мерном пространстве единственна с точностью до умножения на число.

Рассмотрим определитель n векторов в пространстве V : a_1, \dots, a_n — пусть (e_1, \dots, e_n) - фиксированный базис пространства V , тогда составим определитель координат $\det(a_{ij})$ - первая цифра означает номер вектора, вторая - номер координаты. При переходе к другому базису определитель (как кососимметрическая n -линейная функция в n -мерном пространстве) умножается на определитель матрицы перехода.