Лекции по уравнениям математической физики.

Е. В. Радкевич

Первый семестр(2006-2007)

Лекция I. Введение. Предмет исседования теории уравнений с частными производными.

Начнем с простого примера: одномерной частицы движущейся на прямой R^1 в отсутствии внешних сил. Если гладкая функция $v(x,t),\ x \in R^1, t \geq 0,-$ распределение скорости частицы в момент времени t т.е. траектория частицыц подчиняется уравнению

$$\overset{\circ}{x}(t;x_0) = v(x(t;x_0),t),\ t>0, \quad x|_{t=0} = x_0 \in R^1, \tag{1}$$

то в силу уравнения Ньютона в отсутствии внешних сил ускорение

$$\overset{\circ\circ}{x}(t;x_0) = \partial_t v(x(t;x_0),t) + \overset{\circ}{x}(t;x_0)\,\partial_x v(x(t;x_0),t) = 0, \quad t>0.$$

Тогда в силу (1) получим уравнение с частными производными первого порядка для скорости (порядок производных не выше 1):

$$\begin{gathered}\partial_t v(x,t) + v(x,t)\,\partial_x v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in R^2_+ = \{(x,t), x \in R^1,\, t>0\} \\ v(x,t)|_{t=0} = v(x_0,0) = v_0(x),\end{gathered} \tag{2}$$

с заданным начальным распределение скорости $v_0(x)$. По аналогии с обыкновенными уравнениями (см. (1)) такая задача называется задачей Коши для уравнения (69) (уравнения Хопфа).

Теперь посмотрим, всегда ли эта задача имеет гладкое (классическое) решения $v \in C^1(\overline{R^2_+})$ в замыкании области R^2_+. Рассмотрим два начальных распределения $v_0 = \mathrm{arctg}(x)$ и $v_0 = -\mathrm{arctg}(x)$. Для построения решения применим так называемый метод характеристик, с которым вы уже встречались в курсе обыкновенных уравнений. В чем он состоит?

1. Из уравнения (69) следует, что скорость $v(x,t)$ постоянна вдоль траектории (характеристики) частицы:

$$v(x(t;x_0),t) = v_0(x_0) \ \Leftrightarrow \ x(t;x_0)|_{t=0} = x_0,$$

(характеристики уравнения (69)). Тогда из (1) следует что

$$x(t;x_0) = x_0 + v_0(x_0)\,t. \tag{3}$$

2. Теперь рассмотрим любую точку $(x,t) \in R^2_+$. Если через эту точку проходит какая то траектория, т.е. для некоторого x_0 имеем $x = x(t,x_0)$, то в этой точке $v(x,t) = v_0(x_0)$. Таким образом, во всех достижимых точках (x,t) мы однозначно определяем значение скорости $v(x,t)$, если в эту точку приходит **только одна траекторя**, т.е. когда $x_0 = x_0(x,t)$ однозначно определяется по точке (x,t). Множество таких точек будем называть областью определения гладкого решение $\mathcal{O}_s(v_0)$ с заданным начальным условием v_0. Очевидно, что в этой области уравнение

$$x - x_0 + v_0(x_0)\,t = 0 \tag{4}$$

определяет диффеоморфизм $x_0(x,t) : \mathcal{O}_s(v_0) \to R^1$. Очевидно это отображение диффеоморфизм, если выполнено условие

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \partial_{x_0}\Big(x_0 + v_0(x_0)\,t\Big) = 1 + t\,\partial_{x_0} v_0(x_0) > 0, \tag{5}$$

(поскольку $\partial_{x_0}\Big(x_0 + v_0(x_0)\,t\Big)|_{t=0} = 1 > 0$), тогда по теореме о неявной функции однозначно определкляется решение $x_0(x,t)$ уравнения (4). Отсюда следует, что гладкое решение

$$v(x,t) = v_0(x_0(x,t)), \quad (x,t) \in \mathcal{O}_s(v_0)$$

Для первого начального распределения $v_0 = \mathrm{arctg}(x)$ имеем $\partial_x v_0 = 1/(1+x^2) > 0, \forall x \in R^1$, следовательно характеристики не пересекаются во всей верхней полуплоскости R^2_+, тогда решение

$$v(x,t) = \mathrm{arctg}(x_0(x,t)) \quad \forall\, (x,t) \in \mathcal{O}^+_s = R^2_+.$$

Для второго начального распределения $v_0 = -\mathrm{arctg}(x)$ справедливо неравенство (5) если $t < 1+x^2$, т.е. в этом случае $\mathcal{O}^-_s = \{(x,t); t < 1+x^2\}$ и решение

$$v(x,t) = -\mathrm{arctg}(x_0(x,t)) \quad \forall\, (x,t) \in \mathcal{O}^-_s.$$

Таким образом, задача Коши имеет единственное классическое решение в полосе $R^2_1 = \{(x,t),\, x \in R^1,\, t \in (0,1)\}$. В полосе же $R^2_T = \{(x,t),\, x \in R^1,\, t \in (0,T)\}$, $T > 2$, классического решения **не существует.**

Какие выводы можно сделать из этого простейшего примера? Базовая задача для моделей математической физики–задача Коши может не иметь классического решения! Но для физики важнейшим свойством модели, описывающей исследуемый процесс, является ее **корректность**:

1. существование решения;
2. единственность решения;
3. непрерывная зависимость от начальных даных (малое возмущение начальных данных приводит к малым возмущениям решения).

Это приводит к необходимости рассматривать **неклассические– слабые (менее гладкие решение**. Таким образом, исследуемая задача требет своих **классов разрешимости** E_v **(например банаховых пространств) ,** соответствующих классов начальных данных E_{v_0} так что:

1. для любого $v_0 \in E_{v_0}$ существует решение $v \in E_v$;
2. это решение единственное;
3. для решений $v, v_1,\, V|_{t=0} = v_0, v|_{t=0} = v^1_0$, справедлива априорная оценка

$$||v - v_1;\, E_v|| \,<\, C\, ||v_0 - v^1_0;\, E_{v_0}|| \quad \forall v_0, v^1_0 \in E_{v_0},$$

с постоянной C независящей от $v_0, v^1_0 \in\, E_{v_0}$ (откуда следует непрерывная зависимость от начальных данных).

В дальнейшем условия 1.-3. будем называть условиями корректности задачи Коши (69) для пары (E_v, E_{v_0}).

Теперь отметим, что приступая к исследованию модели математик должен учитывать тот факт, что, как говорят физики, все модели получаются при некоторых **усечениях** информации о процессе, когда часть факторов не принимается во внимание. Например, мы можем получить расширение задачи (69), если исследуем движение одномерной частицы без воздействия внешних сил в пористой среде, которая может ускорять ее движение или затормаживать:

$$\partial_t v(x,t) + v(x,t)\, \partial_x v(x,t) + \partial_x \Pi(x,t) = 0, \quad (x,t) \in R^2_+ \tag{6}$$

$$\partial_t \Pi + \mu\, \partial_x v(x,t) + \frac{1}{\tau}\, \Pi = 0, \quad (x,t) \in R^2_+ \tag{7}$$

$$v(x,t)|_{t=0} = v_0(x), \quad \Pi|_{t=0} = \Pi_0(x)$$

где $\Pi(x,t)-$ распределение пор, $\tau > 0-$ время релаксации, являющееся мерой отклонения решений расширенной системы от решений уравнения (69), $\mu = \mathrm{const}$.

Таким образом, мы имеем не одну модель, а иерархию моделей (семейство "вложеных"моделей, семейство расширений моделей). Это чрезвычайно важно понимать, чтобы не рассматривать отдельные модели как абсолют, как некоторое самоцельное, самодостаточное явление. К сожалению, вне физических реалий, математик подвержен искусу абсолютизации и возведения возникающих трудностей в исследовании модели или структурной ее вырожденности в ранг самоцельных содержательных источников исследований, а не всего лишь следствия ее усеченности. Так например, если с этой точки зрения рассмотреть (7) как возмущение (69), считая время релаксации малым $\tau \ll 1$, в окрестности состояния равновесия $v_e = \mathrm{const},\ \Pi = 0$, т.е.

$$v = v_e + \tau\, w, \quad \Pi = \tau\, \sigma,$$

то для отклонения (w, σ) от состояния равновнсия в первом приближении получим так называемое линейное приближение Навье-Стокса

$$\partial_t w(x,t) + v_e\, \partial_x w(x,t) + \partial_x \sigma(x,t) = 0, \quad (x,t) \in R^2_+ \tag{8}$$

$$\mu\,\partial_x w(x,t) + \sigma = 0, \quad (x,t) \in R^2_+ \tag{9}$$
$$w(x,t)|_{t=0} = w_0(x), \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0(x)$$

Второе уравнение в (8) называется замыкающим уравнением, оно позволяет свести эту систему к одному уравнению (линейному одномерному уравнению Навье-Стокса при $\mu > 0$)

$$\partial_t w(x,t) + v_e\,\partial_x w(x,t) = \mu\,\partial_x^2 w(x,t), \quad (x,t) \in R^2_+ \tag{10}$$
$$w(x,t)|_{t=0} = w_0(x).$$

В одной из последующих лекций, мы постараемся понять ту дополнительную информацию, которую предоставило нам расширение (7), чтобы объяснить возникшие трудности в проблеме существования классического решения задачи (69), с которыми мы столкнулись выше, и что важнее понять правило выбора пространства разрешимости (69). Замечательно то, что сама физика, вернее учет реальных задач, возникающих при реконструкции процесса, позволяет с успехом и как увидим с беспорной математической красотой выходить из трудностей.

С еще одной (универсальной) проблемой существания решения мы можем познакомиться, рассмотрев обобщенную задачу Коши для возмущения специального решения уравнения (69) $v_r(x,t) = x/t-$, так называемой волны разряжения, с данными Коши на окржности $S_{(0,2)} = \{(t,x),\, x^2 + (t-2)^2 = 2\}$ радиуса $\sqrt{2}$ с центром в $(0,2)$ в окрестности точки $(1,1)$:

$$v|_{S_{(0,2)}} = \varphi,$$

где $\varphi-$ заданная функция на $S_{(0,2)}$.

Возмущенное решение $v = v_r + \varepsilon\, w$, $\varepsilon \ll 1$, в первом приближении удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w + \frac{x}{t}\partial_x w = 0 \quad \Rightarrow \quad t\partial_t w + x\partial_x w = 0,$$

одна из характеристик которого $x/t = \mathrm{const}$ при $\mathrm{const} = 1$ касается кривой $S_{(0,2)}$, где заданы данные Коши. В любой окрестности точки касания, выше каксательной, характеристики пересекают окружность в двух точках. Пюэтому данные Коши вблизи точки касания не могут быть любыми. Как мы отмечали выше, в этом случае нет окрестности точки касания $(1,1)$, в которой существует классическое решение задачи Коши. Точки типа $(1,1)$ называются характеристическими точками кривой задания данных Коши. Таким образом, для обобщенной задачи Коши есть проблема разрешимости для характеристической кривой задания данных Коши.

Мы выделили только две из универсальных проблем теории уравнений с частными производными, предметом исследования которой, в общем случае, являются физические модели описываемые системами нелинейных уравнений (одним нелинейным уравнением)

$$L_j(u_1,\ldots,u_N) \;\equiv\; F_j(\partial_x^\alpha u_1,\, |\alpha| \le m_1, \ldots, \partial_x^\alpha u_N, |\alpha| \le m_N, x, t) = 0, \quad j = 1,\ldots,N, \quad x \in R^n. \tag{11}$$

или систем линейных уравнений (одним линейным уравнением)

$$L_j(u_1,\ldots,u_N) \;\equiv\; \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\le m_k} a^\alpha_{j,k}(x)\partial_x^\alpha u_k = 0, \quad j = 1,\ldots,N, \quad x \in R^n.$$

Здесь m_k называется порядком системы относительно компоненты u_k решения, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$.

Примеры Приведем примеры хорошо известных систем и уравнений:

1. Уравнение Лапласа $\quad \Delta\, u = \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j} u$;
2. Уравнение теплопроводности (диффузии) $\quad \partial_t u - \Delta\, u = 0$;
3. Волновое уравнение $\quad \Box\, u = \partial_t^2 - \Delta\, u$;
4. Уравнения Гельмгольца $\quad -\Delta\, u = \lambda\, u$;
5. Уравнения Шредингера $\quad i\,\partial_t u + \Delta\, u = 0$ (основное уравнение нерелятивистской квантовой механики);
6. Телеграфное уравнение $\quad \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + b\,\partial_t u$;
5. Уравнение Эйконала $\quad |\nabla_x u| = 1$;

6. Уравнение Гамильтона-Якоби $\quad \partial_t + H(\nabla_x u, x) = 0;$
7. Система уравнений линейной упругости $\quad \mu\Delta\,\overline{u} + (\lambda+\mu)\nabla_x(\mathrm{div}_x\ u) = 0;$
8. Система уравнений Эйлера (идеальный газ)

$$\partial_t\overline{u} + (\overline{u}\cdot\nabla_x)\overline{u} = -\nabla_x p,$$
$$\mathrm{div}_x\,\overline{u} = 0;$$

9. Система уравнений Навье-Стокса (вязкая жидкость)

$$\partial_t\overline{u} + (\overline{u}\cdot\nabla_x)\overline{u} - \Delta\overline{u} = -\nabla_x p,$$
$$\mathrm{div}_x\,\overline{u} = 0;$$

10. Система законов сохранения

$$\partial_t u_j + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_k} f^{jk}(u) = 0, \quad j = 1, \ldots, N \tag{12}$$

описывающие эволюцию консервативных величины u_j. Если u_j стабилизируются на бесконечности

$$u_j \to 0 \quad \text{когда} \quad j = 1, \ldots, N,$$

интегрируя уравнения (12) по x, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{R^1} u_j\,dx = 0 \ \Rightarrow \ \int_{R^1} u_j\,dx = \mathrm{const}\,.$$

11. Система законов сохранения с релаксацией

$$\partial_t u_j + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_k} f^{jk}(u) + b_j(u) = 0, \quad j = 1, \ldots, N$$

описывающие неравновесные процессы, стремящиеся при $t \to \infty$ к состоянию равновесия.

В дальнейшем для нас будет полезно следующее понятие: для линейной системы ее полным символом называется матрица

$$\sigma(L)(x,\xi) = \left(\sum_{|\alpha|\le m_k} a^{\alpha}_{j,k}(x)\xi^{\alpha}\right),$$

главным символом

$$\sigma_0(L)(x,\xi) = \left(\sum_{|\alpha| = m_k} a^{\alpha}_{j,k}(x)\xi^{\alpha}\right),$$

Приложение к 1 Лекции.

Задачи (наш задачник!!!!!!!!!!)–два упражнения.

1. Приведение к каноническому виду. Общее решение.

2. Напомнить (должно быть в курсе ОДУ): линейные уравнения с перемен. коэф., квазилинейные уравнения—как работать с методом характеристик (классические решения); что будет в случае характеристических точек на кривой задания.

Лекция II. Задача Коши.

Выше мы уже говорили, что базовой задачей для моделей, описывющих физические процессы, является задача Коши. Рассмотрим эволюционную модель

$$L_j(u_1, \ldots, u_N) \equiv F_j(\partial^{\alpha}_x u_1, |\alpha| \le m_1, \ldots, \partial^{\alpha}_x u_N, |\alpha| \le m_N, x, t) = 0, \quad j = 1, \ldots, N, \quad x \in R^n, \tag{13}$$

в которой среди независимых переменных выделено время $x = (t, y)$, функции F_j не зависят от y явно. Какие выводы можно сделать о структуре и свойствах решений без привлечения дополнительной физической информации? Т.е. подойдем к исследованию задачи с чисто математической точки зрения: есть абстрактный объект, какова его структура? Но, помнить будем (см. Р. Курант: "Уравнения с частными производными") научное кредо Гильберта: всегда предпочитать чисто формальной общности глубокое проникновение в самую суть математической задачи.

Простейший вариант задачи Коши мы получим для так называемых однородных решений $v(x,t) \equiv v(t)$ этой системы. Тогда система (13) становится системой обыкновенных нелинейных уравнеий

$$F_j(d_t^\alpha\, u_1(t), 0 \le \alpha \le m_1, \dots, d_t^\alpha\, u_N(t), 0 \le \alpha \le m_N,\, t) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad d_t = \frac{d}{dt}, \tag{14}$$
$$U_j|_{t=0} = u_j^0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Обсудим проблему существования вещественно-аналитических решений (теорему Коши) $u_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, N$, которые имеют локальное разложение в абсолютно сходящиеся ряды в окрестности любой точки области определения $t_0 \in \mathcal{D}$:

$$u_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,s}(t_0)\,(t - t_0)^s$$

Для простоты рассмотрим одно нелинейное уравнение:

$$\frac{d\,u}{dt} = F(u, t), \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{15}$$

(доказательство в общем случае аналогично). Приведем (103) к однородным данным Коши, положив $u = v + u_0$. Тогда

$$\frac{d\,v}{dt} = f(v, t), \quad v|_{t=0} = 0, \tag{16}$$

где $f(v,t) \in \mathcal{A}_{loc}$ локально вещественно аналитическая по переменным (v, t) функция.

Теорема Коши. Первое доказательство существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v), \quad t > t_0, \qquad v(t_0) = 0, \tag{17}$$

было получено Коши при условии голоморфности функции f в окрестности точки $(t_0, 0)$. В этом случае им было даказано существование, притом только одного, решения $u(t)$, голоморфного в окрестности точки t_0. Идея доказательства проста. Решение ищем в классе $\mathcal{A}^1_{loc}$ локально аналитических функций $v(t)$, представимых в окресьности $t = t_0$ в виде степенного ряда

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^j,\ a_j \in \mathbf{C},\ t \in R.$$

Напомним некоторые общие свойства аналитических $\mathcal{A}^m_{loc}$ вектор-функций $f(t,x,u) \in \mathcal{A}^m_{loc}$, $t \in R^1$, $u, f \in \mathbf{R}^m$, $x \in R^n$,

$$f(t, u) = \sum_{k,|\alpha|,|\beta| \ge 0} f_{k,,\beta,\alpha}(t - t_0)^k (x - x_0)^\beta (u - u_0)^\alpha, \tag{18}$$
$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m),\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n),\ f_{k,\alpha} \in \mathbf{C}^m.$$

Определение мажоранты. Вещественнозначную аналитическую в точке (t_0, x_0, u_0) функцию

$$g(t, x, u) = \sum_{k,|\alpha|,|\beta| \ge 0} g_{k,\beta,\alpha}(t - t_0)^k (x - x_0)^\beta (u - u_0)^\alpha$$

будем называть мажорантой $g \succ f$ вектор-функции $f(t,x,u)$ в этой точке, если для всех $k, \alpha_j \geq 0, \beta_l \geq 0$, $j = 1,\ldots,m, l = 1,\ldots,n$, справедливы неравенства

$$|f_{k,\beta,\alpha}| \leq g_{k,\beta,\alpha}.$$

Очевидно, что для любой аналитической в окрестности (t_0, x_0, u_0) функции $f(t,x,u)$ сущестыует мажоранта в этой точке. В качестве мажоранты, например, можно взять

$$g = \sum_{k,|\beta|,|\alpha|\geq 0} |f_{k,\beta,\alpha}|(t-t_0)^k(x-x_0)^\beta(u-u_0)^\alpha.$$

Мажоранту можно построить также следующим образом. Пусть ряд (18) абсолютно сходится в кубе $K_\varrho(t_0,x_0,u_0) = \{|t-t_0| \leq \varrho, |x-x_0| \leq \varrho, |u-u_0| \leq \varrho\}$. Тогда существует такое положительное M_f, что

$$|f_{k,\beta,\alpha}| \leq M_f \varrho^{-(k+|\beta|+|\alpha|)}, \quad \forall\, k,\, |\beta| \geq 0,\, |\alpha| \geq 0.$$

Это значит, что мажорантой этой функции являются функции:

$$g = \sum_{k,|\beta|,|\alpha|\geq 0} \frac{M_f(t-t_0)^k(x-x_0)^\beta(u-u_0)^\alpha}{\varrho^{k+|\beta|+|\alpha|}} =$$

$$= M_f\left\{\left(1-\frac{t-t_0}{\varrho}\right)\left(1-\frac{u_1-u_1^0}{\varrho}\right)\ldots\left(1-\frac{u_m-u_m^0}{\varrho}\right)\left(1-\frac{x_1-x_1^0}{\varrho}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n-x_n^0}{\varrho}\right)\right\}^{-1},$$

а также

$$g = M_f\left\{1-\frac{(u_1-u_1^0)+\cdots+(u_m-u_m^0)+(x_1-x_1^0)+\cdots+(x_n-x_n^0)+N(t-t_0)}{\varrho}\right\}^{-1}, \quad \forall N \geq 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{M_f N^k(|\alpha|+|\beta|)!}{\varrho^{k+|\beta|+|\alpha|}\alpha!\beta!} \geq |f_{k,\alpha}|,\ \forall\, k, |\alpha| \geq 0.$$

Сформулируем свойства мажорант , как ряд утверждений леммы:

Лемма 0.1 *Если:*

1.

$$g \succ f \quad \Longrightarrow \quad \partial_t^k \partial_x^\alpha \partial_u^\beta\, g \succ \partial_t^k \partial_x^\alpha \partial_u^\beta\, f, \quad \forall\, k \geq 0, |\alpha| \geq 0, |\beta| \geq 0,. \tag{19}$$

2.

$$g \succ f,\ g_1 \succ f_1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 g + \gamma_2 g_2 \succ \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2, \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in R,\ \gamma_1, \gamma_2 > 0. \tag{20}$$

3.

$$g \succ f \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \int_{u_0}^u g(\tau, y) d\tau\, dy \succ \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \int_{u_0}^u f(\tau, y) d\tau\, dy. \tag{21}$$

4.

$$\text{Если}\ \ g \succ f, g_1 \succ f_1 \quad \Longrightarrow \quad g\, g_1 \succ f\, f_1. \tag{22}$$

5.

$$\begin{aligned} g(t,x,u) \succ f(t,x,u),\, U(t,x) \succ u(t,x) \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad g(t,x,U(t,x)) \succ f(t,x,u(t,x)). \end{aligned} \tag{23}$$

Перейдем к доказательству теоремы Коши для уравнения (17). Рассмотрим правую часть $f(t,v)$ в классе локально аналитических функций $f \in \mathcal{A}^2_{loc}$, т.е. функций представимых в некоторой окрестности $\mathcal{Q}_0 = Q_0 \times (t_0-\delta, t_0+\delta)$ точки $(t_0, 0)$, $Q_0 \in R^1-$ окрестность $v = 0$, в виде абсолютно сходящегося степенного ряда

$$f(t,v) = \sum_{k,\alpha\geq 0}^{\infty} f_{k,\alpha} v^\alpha (t-t_0)^k. \tag{24}$$

Решение ищем в виде ряда

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^j. \tag{25}$$

Подставляя (9) в (8), наидем коэффициенты a_j

$$a_0 = 0, \quad a_1 = f(t_0, u_0), \quad a_2 = \frac{1}{2}\Big(\partial_t f(t, v) + \partial_v f(t, v)\Big)\Big|_{t=t_0, v=0}, \dots.$$

Все последующие коэффициенты находятся дифференцированием обеих частей уравнения (17) и подстановкой в них $t = t_0$ и коэффициентов, полученных на предыдущих шагах. Таким образом, коэффициенты a_j однозначно определяются из уравнения и начальных данных. Для доказательства существования решения достаточно показать, что степенной ряд (25) сходится в некоторой окрестности точки t_0. Здесь применим метод мажорант. Из свойств Леммы (0.1) следует, что мажорирующей задачей Коши будет следующая

$$\frac{dm}{dt} = \frac{M_f}{\Big(1 - \frac{t-t_0}{\varrho}\Big)\Big(1 - \frac{m}{\varrho}\Big)}, \quad t > t_0, \qquad m(t_0) = 0, \tag{26}$$

которая решается методом разделения переменных:

$$m(t) = \frac{1}{2\varrho} m(t)^2 - \varrho M_f \ln\Big(1 - \frac{t - t_0}{\varrho}\Big), \tag{27}$$

т.е.

$$m(t) = \varrho\Big(1 - \sqrt{1 + 2\varrho^2 M_f \ln\Big(1 - \frac{t - t_0}{\varrho}\Big)}\Big)$$

Замечание Как можно показать, что уравнение (26) мажорирует уравнение (17). Дифференциальное уравнение (17) эквивалентно интегральному уравневнию

$$v(t) = \int_0^t f(u(s), s) ds. \tag{28}$$

В силу Леммы (0.1) правая часть (28) мажорируется выражением

$$\int_0^t \frac{M_f}{\Big(1 - \frac{s-t_0}{\varrho}\Big)\Big(1 - \frac{m(s)}{\varrho}\Big)} ds,$$

если $m(t)$ мажоранта для $v(t)$. Отсюда мажорирующим интегральным уравнением для (28) будет

$$m(t) = \int_0^t \frac{M_f}{\Big(1 - \frac{s-t_0}{\varrho}\Big)\Big(1 - \frac{m(s)}{\varrho}\Big)} ds,$$

что эквивалентно уравнению (26).

Из (19)-(23) следует, что при достаточно малом $\varrho > 0$ ряд в правой части (27) мажорирует ряд (25), т.е.

$$|a_j| \le m_j, \quad \forall j \ge 0,$$

если $m_j \ge 0$, $j \ge 1$, $m_0 = 0$. Осталось показать, что

$$m_j > 0, \; j \ge 1. \tag{29}$$

Первым делом заметим, что степенной ряд функции

$$-\ln\Big(1 - \frac{t - t_0}{\varrho}\Big) = \sum_{j \ge 1} \frac{1}{j}\Big(\frac{t - t_0}{\varrho}\Big)^j \tag{30}$$

имеет положитедьные коэффициенты. Тогда из (27) последовательно можно показать справедливость (29) (m_j определяются по коэффициентам степенного ряда (30) и коэффициентам m_s, $1 \leq s \leq (j-1)$, вычисленным на предыдущих шагах). Например

$$m_1 = M_f > 0, \quad m_2 = \frac{1}{2\varrho} m_1^2 + \frac{M_f}{2\varrho} > 0, \quad m_3 = \frac{1}{\varrho} m_1 m_2 + \frac{M_f}{3\varrho^2} > 0.$$

Отсюда следует сходимость рядя для $v(t)$ и существование решения задачи Коши (17).

Теорема Ковалевской. Теорема Коши была обобщена С.В. Ковалевской на дифференциальнве уравнения с частными производными. Эта теорема относится к классу уравнений, которые теперь называются уравнениями типа Ковалевской

$$\partial_t^{n_i} u_i = f_i(t, x, u, \partial_t u, \partial_x u, \dots), \quad i = 1, \dots, m. \tag{31}$$

Здесь ∂_t и ∂_{x_k} производные по t и пространственным переменным $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, функции f_i при каждом $i = 1, \dots, m$, зависят от производных $\partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha} u_j$ функций u_j, $j = 1, \dots, m$, только до порядка n_j, не зависит от $\partial_t^{n_j} u_j$ и являются вещественно аналитическими от всех своих аргументов. Задача Коши для (1.1) состоит в построении решения этой системы, которое прим $t = 0$ принимает заданные начальные значения

$$\partial_t^k u_i(0, x) = \varphi_{i,k}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 1, \dots, m. \tag{32}$$

Предполагается, что начальные данные $\varphi_{i,k}(x)$ являются вещественно аналитическими функциями переменных x в некоторой окрестности $\mathcal{Q}_0$ точки $x = 0$. Очевидно, что также как выше, начальные условия позволяют вычислить значения всех аргументов функций f_i в окрестности точки $x = 0$ при $t = 0$. Фиксируя значения этих производных, дополнительно будем считать, что функции f_i– вещественно аналитические в окрестности этих фиксированных значений.

Теорема 0.1 *(Теорема Ковалевской [1]) Задача Коши (1.1), (1.2) при сделанных предположениях имеет одно и только одно решение $u(t,x)$, вещественно аналитическое в окрестности точки $t = 0, x = 0$.*

Содержание этой теоремы является достаточно простым. Если аналитическая функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (50) и условиям (32), то ее производные любого порядка в точке $t = 0, x = 0$ определяются однозначно. При этом, если порядок дифференцирования функции u_i по переменной t не превосходит $n_i - 1$, то эти производные находятся из условий (32). Остальные производные определяются с помошью дифференцтрования уравнения (50).

Таким образом, мы можем найти все коэффициенты ряда Тейлора искомого решения в точке $(0,0)$, откуда следует единственность аналитического решения. Для доказательства существования решения требуется доказать сходимость построенных степенных рядов для функций u_i, коэффициенеты которых определяются по указанной выше схеме. Это технически сложное доказательство, основанное на методе мажорант. В упрощенном варианте доказательство мы приведем ниже.

Теоремы Ковалевской Если принять производные решения $v_{j,\alpha_0,\alpha} = \partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha} u_j$, $\alpha_0 + |\alpha| < n_j$, за новые неизвестные функции, то можно свести задачу (50), (32) к системе квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_t v_i = \sum_{s=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} a_{ijs}(t, x, v_1, \dots, v_N) \partial_{x_j} v_s + f_i(t, x, v_1, \dots, v_N), \quad i = 1, \dots, K;$$

$$v_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, \dots, K.$$

Для простоты рассмотрим линейную систему, для которой

$$a_{ijs}(t, x, v_1, \dots, v_N) = a_{ijs}(x, t), \quad f_i(t, x, v_1, \dots, v_N) = \sum_{s=1}^{K} b_{is}(x,t) v_s + f_i(x,t).$$

Прежде всего сделаем замену функций $v_i(t,x) = \varphi_i(x) + w_i(t,x)$. Отсюда получим

$$\partial_t w_i = \sum_{s=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{ijs}(t,x)\partial_{x_j} w_s + \sum_{s=1}^{K} b_{is}(x,t) w_s + g_i(t,x), \tag{33}$$

$$w_i(0,x) = 0, \quad i = 1,\dots,K. \tag{34}$$

$$g_i = f_i + \sum_{s=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{ijs}(t,x)\partial_{x_j}\varphi_s + \sum_{s=1}^{K} b_{is}(x,t)\varphi_s \quad i = 1,\dots,K;$$

В силу (19)-(23), для достаточно большого $M > 0$, $\forall\, N \geq 1$, достоточно малого $\varrho > 0$, мажорирующая задача Коши для (33), (34) определяется следующей системой

$$\partial_t W_i = M\Big(1 - \frac{(x_1 - x_1^0) + \dots + (x_n - x_n^0) + N(t - t_0)}{\varrho}\Big)^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{K}\Big(\sum_{l=1}^{n}\partial_{x_l} + 1\Big)W_j + 1\Big], \quad i = 1,\dots,K; \tag{35}$$

с начальными данными вида:

$$W_i(0,x) = 0 \quad i = 1,\dots,K. \tag{36}$$

Заметим, что параметр ϱ определяется областью сходимости степенных рядов коэффициентов $a_{ijs}(t,x), b_{is}(t,x)$ системы (33) и правых частей $g_i(t,x)$.

Наша задача–доказать существование аналитичного в некоторой окрестности

$$Q_{t_0,x_0} = \{(t,x), |x - x_0| \leq \varrho(N), |t - t_0| \leq \varrho(N)\}, \quad \varrho(N) \leq \varrho, \tag{37}$$

точки (t_0, x_0) мажорантного решения, коэффициенты степенного ряда которого неотрицательны.

Вспомогательное решение задачи будем искать в виде

$$W_j = V_j(\eta), \quad j = 1,\dots,K, \qquad \eta = \Big((x_1 - x_1^0) + \dots + (x_n - x_n^0) + N(t - t_0)\Big)/\varrho,$$
$$W_j|_{\eta=0} = 0, \quad j = 1,\dots,K.$$

Тогда получим

$$\Big(\frac{N}{\varrho} - \frac{Mn}{\varrho(1-\eta)}\Big)\frac{d}{d\eta}V_j = \frac{1}{a-\eta}\Big(\frac{Mn}{\varrho}\sum_{j\neq i,\, i,j=1,\dots,K}\frac{d}{d\eta}V_i + M\big(\sum_{i=1}^{K}V_i + 1\big)\Big), \quad j = 1,\dots,K. \tag{38}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{d\eta}V_j = \frac{1}{a-\eta}\Big(b\sum_{j\neq i,\, i,j=1,\dots,K}\frac{d}{d\eta}V_i + c\varrho\big(\sum_{i=1}^{K}V_i + 1\big)\Big), \quad j = 1,\dots,K. \tag{39}$$

Здесь $a = (N - Mn)/N, b = Mn/N, c = M/N$, достаточно большое $N \gg 1$ и достаточно малое $\varrho(N) \leq 1$ в (37) выбираются из условий $a > 0$ и

$$\frac{N}{\varrho}(a - \eta) = N\Big(1 - \frac{(x_1 - x_1^0) + \dots + (x_n - x_n^0) + N(t - t_0)}{\varrho}\Big) - Mn \geq \frac{1}{2}N,$$

$$|t - t_0| \leq \varrho(N), |x_j - x_j^0| \leq \varrho(N), \quad j = 1,\dots,n.$$

Положим $\mathcal{W} = \sum_{i=1}^{K} V_i$. Суммируя уравнениея (39), сведем эту систему к обыкновенному уравнению

$$\frac{d}{d\eta}\mathcal{W} = \frac{cK\varrho}{a - (K-1)b - \eta}(\mathcal{W} + 1), \quad \mathcal{W}|_{\eta=0} = 0, \tag{40}$$

решая которое, получим

$$\mathcal{W} = \frac{(a - (K-1)b)^{cK\varrho}}{(a - (K-1)b - \eta)^{cK\varrho}} - 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для достаточно большого N

$$a-(K-1)b>0,\quad a-(K-1)b-\eta>\frac{1}{2},$$

если

$$|t-t_0|\le\varrho(N),\quad |x_j-x_j^0|\le\varrho(N),\ \ j=1,\dots,n,\quad \varrho(N)\ll 1,\ \ \varrho(N)\le\varrho.$$

Так как $0<a-(K-1)b<1$, то степенной ряд функции

$$\Big(a-(K-1)b-\eta\Big)^{-1}=(a-(K-1)b)^{-1}\Big(1+d_1\eta+\dots\Big),$$

в нуле имеет неотрицательные коэффициеенты. Отсюда, в силу (40), степенной ряд в нуле функции $\mathcal{W}$ также имеет неотрицательные коэффициеенты. Подставляя (40) в (39), получим

$$\frac{d}{d\eta}V_j+\frac{b}{a-\eta}V_j=\frac{1}{a-\eta}\Big(b\frac{d}{d\eta}\mathcal{W}+c\varrho\mathcal{W}+1\Big),\quad V_j(0)=0,\ \ j=1,\dots,N. \tag{41}$$

Следовательно, коэффициенты степенного ряда в нуле правой части в (41)– неотрицательны. Положим

$$V_j=\sum_{k\ge1}v_{jk}\,\eta^k,\qquad G_j=\sum_{k\ge0}g_{jk}\,\eta^k.$$

Умножим (41) на $(a-\eta)$ и подставим в (41) степенные ряды в нуле для функций V_j и правой части G_j в (41). Получим систему для коэффициентов

$$a\,k\,v_{j,k}=(k-1-b)v_{j,k-1}+g_{j,k-1},\quad j\ge2,\quad v_{j,0}=0, v_{j,1}=g_{j,0}/a.$$

Так как $0<b<1$, то все коэффициенты $v_j\ge0$. Следовательно функции

$$V_j|_{t=t_0}=\sum_{s\ge1}v_{j,s}\frac{((x_1-x_1^0)+\dots+(x_n-x_n^0))^s}{\varrho^s}\succ\ 0,\qquad j=1,\dots,N$$

мажорируют начальные данные $w_j|_{t=t_0}=0$ функций $w_j(t,x)$, $j=1,\dots,N$. Простым следствием леммы (0.1) является следующее утверждение:

Предложение 0.1 *Пусть коэффициенты правых частей уравнений*

$$\partial_tV_j=\sum_{s=1}^{K}\Big(\sum_{i=1}^{n}A_{jsi}(x,t)\partial_{x_i}V_s+B_{js}(t,x)V_s\Big)+F_j(x,t),$$
$$\partial_tw_j=\sum_{s=1}^{K}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{jsi}(x,t)\partial_{x_i}w_s+b_{js}(x,t)w_s\Big)+f_j(x,t),$$

мажорируют друг друга

$$A_{jsi}(x,t)\ \succ\ a_{jsi}(x,t),\quad B_{js}(x,t)\ \succ\ b_{j,s}(x,t),\quad F_j(x,t)\ \succ\ f_j(x,t),$$

и начальные данные для V_j

$$V_j|_{t=t_0}=V_j^0(x)\ \succ\ w_j|_{t=t_0}\equiv0$$

мажорируют начальные данные для w_j. Тогда решение первой задачи Коши

$$V_j(t,x)\ \succ\ w_j(x,t),\quad j=1,\dots,K,$$

мажорируют решение второй задачи Коши.

Отсюда получаем, что

$$V_j \succ w_j, \quad j = 1, \ldots, K.$$

в нашем случае в некоторой окрестности $|x - x_0| \leq \varrho(N), |t - t_0| \leq \varrho(N)$ любой точки (t_0, x_0) аналитичности коэффициентов системы и правых частей. q Это завершает доказательство теоремы Ковалевской для системы (33).

Задачи

1. Доказательство предложения (0.1) можно оставить как задачу или сделать комментарий, что замена $V_j = \widetilde{V_j} + V_j^0$ сводит задачу Коши для функций V_j к однородной задаче Коши для функций $\widetilde{V_j}$ с сохранением условия мажорируемости правых частей систем для $\widetilde{V_j}$ и для w_j. Отсюда следует, что

$$\widetilde{V_j} \succ w_j, \ V_j^0 \succ 0 \ \Rightarrow \ V_j = \widetilde{V_j} + V_j^0 \succ w_j, \qquad j = 1, \ldots, K.$$

2. Доказать теорему Ковалевской для квазилинейной системы первого порядка. Например, для одномерной системы газовой динамики

$$\begin{gathered}\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho\, v) = 0,\\ \partial_t(\varrho\, v) + \partial_x\Big(\frac{1}{2}\varrho\, v^2 + \varrho\theta\Big) = 0\\ \partial_t(\varrho\, v^2 + \varrho\theta) + \partial_x\Big(\varrho\, v^3 + 3\varrho\theta\, v\Big) = 0\end{gathered}$$

Здесь $\theta = R\varrho T$, $R-$ газовая постоянная, ϱ плотность, v скорость, T температура.

Приложение к Лекции 2. Теорема Коши-Ковалевской: некоторые примеры и контрпримеры.

Мы продолжаем обсуждение свойств различных уравнений в связи с использованием самого "грубого"метода, для применения которого не нужно знать никакой науки – метода степенных рядов.

Как Вы уже узнали на прошлой лекции, этот метод в применении к уравнениям с частными производными, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, совсем не всемогущ, и его действие ограничивается как его собственными возможностями, так и самой природой тех уравнений, к которым он применяется.

Границы, в которых метод остается дееспособным, описываются теоремой Коши-Ковалевской, и сейчас мы "пощупаем"эти границы на ряде простых примеров.

Пример 1. Рассмотриим уравнение $u_t = u_x$. Будем искать решение в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{ij} \frac{t^i}{i!} \frac{x^j}{j!} \tag{1}$$

Факториалы в знаменателе удобны для того, чтобы потом получались более простые уравнения для коэффициентов. Подставим функцию (1) в уравнение, получим

$$\sum_{i=1,j=0}^{\infty} u_{ij} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \frac{x^j}{j!} = \sum_{i=0,j=1}^{\infty} u_{ij} \frac{t^i}{i!} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}$$

Для того, чтобы приравнять коэффициенты, необходимо обе суммы привести к одинаковому виду (например, к такому же, как в (1)), а для этого удобно провести переобозначения: в левой части равенства заменить $i-1$ на i, а в правой – $j-1$ на j. Это дает

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} u_{i+1,j} \frac{t^i}{i!} \frac{x^j}{j!} = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{i,j+1} \frac{t^i}{i!} \frac{x^j}{j!},$$

и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и x, получаем основное равенство:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j+1}. \tag{2}$$

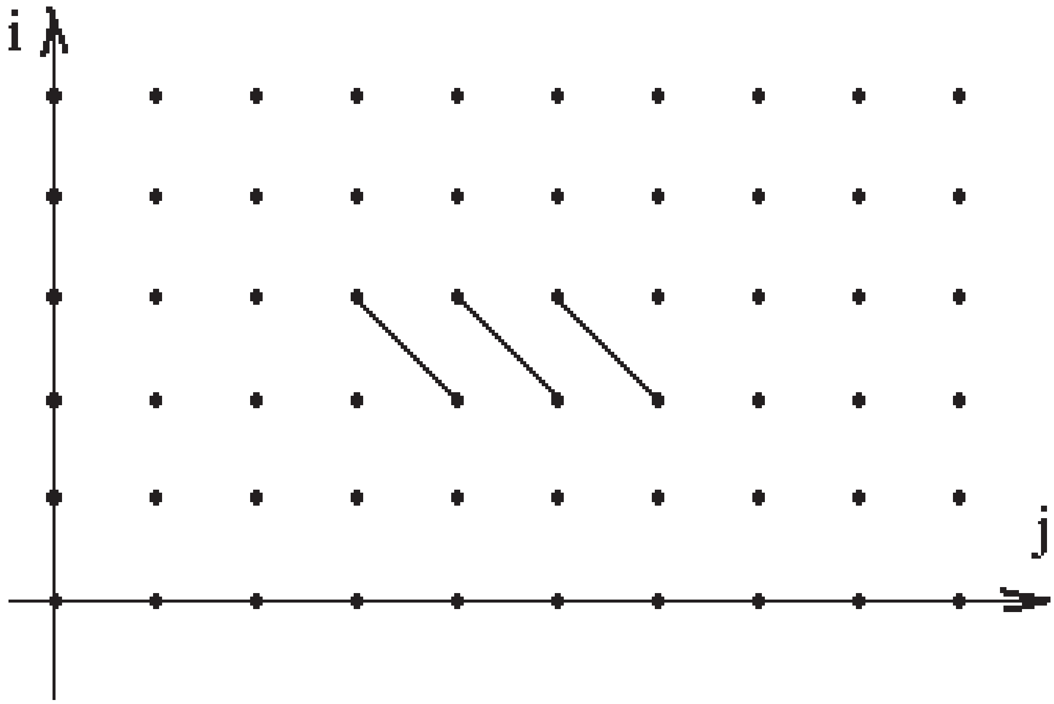

Рис. 1: Графическая схема для уравнения $u_t = u_x$

Для того, чтобы почувствовать, что здесь через что выражается, удобно использовать графическую схему, на которой точками изображены пары номеров (i, j) (см. рис. 1). На этой схеме видно, что элементы i-го слоя выражаются через элементы $i-1$-го слоя. Понятно, что это выражение можно довести до нулевого слоя, что "в формулах"выглядит как

$$u_{i,j} = u_{i-1,j+1} = \cdots = u_{0,i+j}$$

Подставляя в формулу (1) полученные выражения, получаем формулу решения

$$u(t,x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{0,i+j} \frac{t^i}{i!} \frac{x^j}{j!}.$$

В этой формуле удобно (поскольку члены с одним и тем же значением $i+j$ имеют один и тот же коэффициент) произвести перегруппировку суммирования, обозначив $i+j$ через k, и заменив всюду j на $k-i$:

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0,k} \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!} \frac{x^{k-i}}{(k-i)!}.$$

Если при этом $u_{0,k}$ разделить на $k!$, а внутри второй суммы – наоборот, ввести множитель $k!$, то внутренняя сумма станет легко узнаваемым разложением, называемым обычно биномом Ньютона, так что наша формула приобретает вид

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0,k} \frac{(t+x)^k}{k!}.$$

Поскольку коэффициенты $u_{0,k}$ между собой никак не связаны – полученная формула есть просто формула произвольной аналитической (если ряд сходится, конечно) функции от $(t+x)$. Конечно, по некотором размышлении становится ясно, что любая непрерывно дифференцируемая (а не обязательно аналитическая) функция $\phi(t+x)$ будет решением нашего уравнения, так что метод рядов дает далеко не все решения, но тем не менее в этом вот простом случае он вполне эффективно работает.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $u_{tt} = u_{xx}$. Аналогичными рассуждениями мы получаем соотношение $u_{i+2,j} = u_{i,j+2}$, из которого выводится формула $u(t,x) = f(t+x) + g(t-x)$, где f и g – произвольные аналитические (если следовать только методу) или просто непрерывно дифференцируемые (если распространить полученный методом рядов результат) функции. При свертывании разложения необходимо догадаться, что сумма

$$t^k + C_k^2 t^{k-2} x^2 + C_k^4 t^{k-4} x^4 + \dots,$$

содержащая только четные степени бинома Ньютона, может быть получена как полусумма разложений $(t+x)^k$ и $(t-x)^k$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $u_{tt} = u_x$. Этому уравнению отвечает уже соотношение $u_{i+2,j} = u_{i,j+1}$, что дает разложение для решения

$$u(t,x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{0,i+j} \frac{t^{2i}}{(2i)!} \frac{x^j}{j!} + \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{1,i+j} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \frac{x^j}{j!}.$$

Конечно, эти суммы уже так хорошо не "сворачиваются", как предыдущие, однако поскольку $(2i+1)! > i!$, эти суммы можно оценить

$$|u(t,x)| \le \sum_{i,j=0}^{\infty} |u_{0,i+j}| \frac{t^{2i}}{i!} \frac{x^j}{j!} + t \sum_{i,j=0}^{\infty} |u_{1,i+j}| \frac{t^{2i}}{i!} \frac{x^j}{j!} \le \phi(t^2+x) + t\psi(t^2+x),$$

где ϕ и ψ – некоторые аналитические (если ряды $\sum |u_{0,k}| x^k/k!$ и $\sum |u_{1,k}| x^k/k!$ сходятся) функции. Хотя мы здесь и не получили конечно формулы, но тем не менее представление решения в виде ряда уже что-то дает. Нетрудно заметить, что $\sum u_{0,k} x^k/k!$ есть ряд для $u(0,x)$, так что аналитичность начального условия в некоторой окрестности точки $x = 0$ обеспечивает автоматически сходимость в этой окрестности и ряда из модулей коэффициентов, мажорирующего ряд для решения, и сходимость ряда для решения.

Остается заметить, что те же самые рассуждения у нас повторятся и для более высокого порядка производной по t: например, для уравнения $\partial^{10} u/\partial t^{10} = \partial u/\partial x$ решение будет оцениваться через функции вида $\phi(x + t^1 0)$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $u_t = u_{xx}$. Для него отвечает уже соотношение $u_{i+1,j} = u_{i,j+2}$ и решение представляется в форме

$$u(t,x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{0,2i+j} \frac{t^i}{i!} \frac{x^j}{j!}.$$

Оказывается, что эта формула не дает решения даже для простейших аналитических начальных данных. Действительно, пусть $u(0,x) = \frac{1}{1+x^2}$. Указанная функция является аналитической при $|x| < 1$ и разлагается в ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots = 1 - 2!\frac{x^2}{2!} + 4!\frac{x^4}{4!} - \dots$$

Как видно, для функции $u(t,x)$, удовлетворяющей такому начальному условию, коэффициенты u_{0k} для нечетных k равны нулю, а для четных $k = 2p$ – $(-1)^p (2p)!$. Нетрудно проверить, что ряд

$$u(t,x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^j (2i+2j)! \frac{t^i}{i!} \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

расходится в любой окрестности точки $(0,0)$ (например, видно, что при $x = 0$ он превращается в ряд $\sum (2i)! \frac{t^i}{i!}$ с нулевым радиусом сходимости). Таким образом, в этом случае метод степенных рядов оказался неудачным – полученное формально решение на самом деле оказалось просто ничего не означающим набором букв (так как найти по полученной формуле, чему равно, например, $u(1,0)$, невозможно). В чем здесь проблема – в самом уравнении или в методе рядов?

В этом данном конкретном случае дело оказывается в методе. Несколько позже мы с Вами будем изучать это уравнение, и Вы увидите, что оно имеет решение для любого дифференцируемого начального условия. Но это решение не является аналитической функцией, и именно поэтому нам не удалось его построить методом рядов.

По существу пример 4 иллюстрирует тот факт, что применение метода рядов оказывается эффективным не для всех уравнений, а только для таких, у которых выделенная слева производная по t имеет порядок не меньший, чем у остальных фигурирующих в уравнении производных. Как Вы видели, это условие явным образом фигурирует в теореме Ковалевской, без него теорема просто будет неверна (хотя неаналитические решения в этом случае могут и быть).

Пример 5. Рассмотрим уравнение, с которым мы уже работали, $u_t = u_x$ и допустим, что известно его решение не при $t = 0$, а при $t = \lambda x$ (что соответствует, например, равномерно движущемуся датчику). Мы будем считать, что $u(0,x) = \phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k x^k/k!$. Аналогичные проведенным выше рассуждения показывают, что решение в этом случае имеет вид

$$u(t,x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\phi_k}{(\lambda+1)^k} \frac{(x+t)^k}{k!},$$

что дает хорошее, аналитическое решение всегда, когда $\lambda + 1 \neq 0$.

Случай $\lambda = -1$, т.е. когда мы знаем решение на прямой $x + t = 0$, особенный. Вот здесь мы сталкиваемся уже не со свойством метода, а со свойством самого уравнения: даже если мы рассмотрим общее решение этого уравнения (которое Вы уже находили на практических занятиях) $u(t,x) = \phi(t+x)$, подстановка в него $t+x = 0$ дает константу: $u(t,x)|_{x+t=0} = \phi(0)$, так что на прямой $t + x = 0$ решение не может быть произвольной функцией.

Линии $x + t = \text{const}$ называются *характеристиками* уравнения $u_t = u_x$. Эффект появления специфических линий (в случае большего количества переменных – поверхностей), на которых "рушится"начальная задача очень характерен для уравнений с частными производными. Именно поэтому в условиях теоремы Коши-Ковалевской условие *нехарактеристичности* поверхности, на которой задаются начальные условия, оказывается одним из центральных.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $u_{tx} = 0$. Метод рядов дает нам условия $u_{ij} = 0$, если $i \geq 1$ или $j \geq 1$. Таким образом, решение имеет вид

$$u(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{i0} \frac{t^i}{i!} + \sum_{j=1}^{\infty} u_{0j} \frac{x^j}{j!},$$

и подстановка в начальные условия $u(0,x) = \phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k x^k/k!$ позволяет найти коэффициенты u_{0j}. Однако одного условия мало: при такой постановке задачи остаются неопределенными коэффициенты u_{i0}. Можно задать и второе условие – на производную $u_t(0,x)$, однако нетрудно убедиться, что оно, во-первых, никак не помогает найти эти коэффициенты, а во-вторых, эта производная оказывается константой, не зависящей от x, так что задавать ее произвольным образом мы уже не можем. Выходит, что одного условия мало, а двух – много и все равно не хватает! Здесь мы также имеем дело с характеристиками уравнения: для уравнения $u_{tx} = 0$ характеристиками оказываются как раз прямые $t = \text{const}$, а также прямые $x = \text{const}$.

Пример 7. Рассмотрим уравнение $u_t + uu_x = 0$. Это уравнение уже нелинейное, но метод рядов применим и к нему. Подстановка (1) в это уравнение дает

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} u_{i+1,j} \frac{t^i}{i!} \frac{x^j}{j!} + \left[\sum_{i,j=0}^{\infty} u_{i,j} \frac{t^i}{i!} \frac{x^j}{j!} \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{k,l+1} \frac{t^k}{k!} \frac{x^l}{l!} \right],$$

после перегруппировки выражение в скобках приводится к виду

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{x^m}{m!} \left[\sum_{\substack{i+k=n,\\ j+l=m}}^{\infty} u_{i,j} u_{i,j+1} \frac{n!}{i!k!} \frac{m!}{j!l!} \right],$$

и мы получаем соотношение

$$u_{n+1,m} = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} u_{i,j}u_{n-i,m-j+1}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{m!}{j!(m-j)!}. \tag{3}$$

Хотя оно гораздо сложнее, чем все, что мы получали до сих пор, тем не менее использование графической схемы (см. рис. 2) показывает, что эта формула позволяет вычислять элемент $n+$

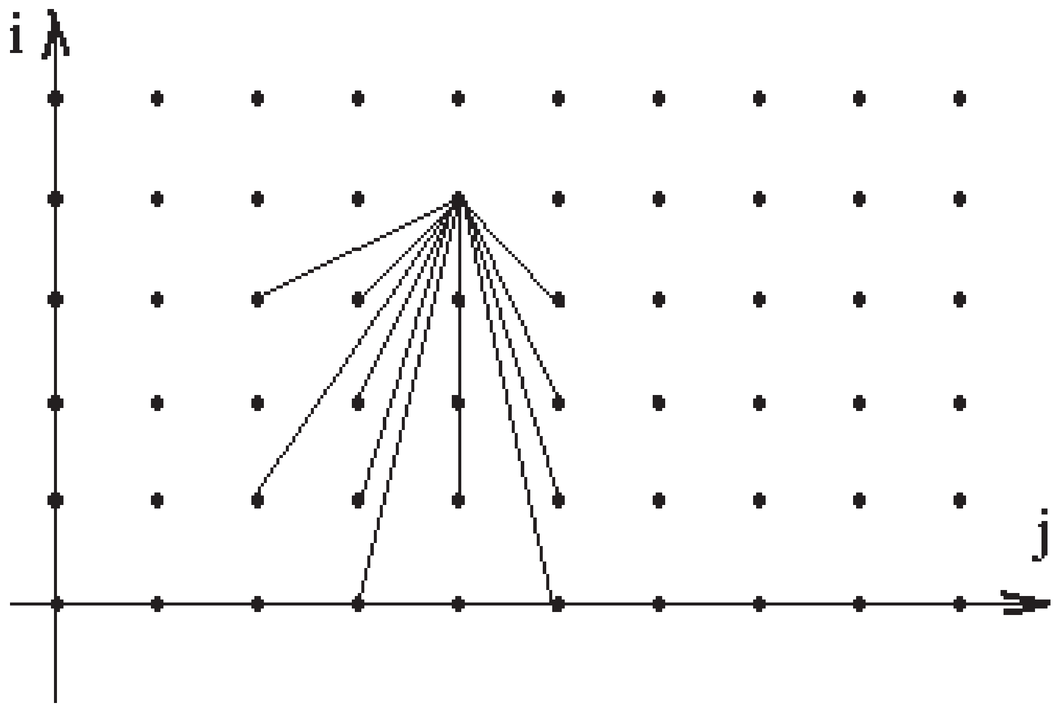

Рис. 2: Графическая схема для уравнения $u_t + uu_x = 0$

1-ой строки по элементам предыдущих строк, так что если известны элементы u_{0j}, являющиеся коэффициентами разложения $u(0,x)$, то последовательно вычисляются и все остальные. Именно этот пример показывает, что получить здесь явное решение методом рядов – задача, близкая к безнадежной, но зато можно получить оценки коэффициентов u_{ij}.

Действительно, из того, что ряд для $u(0,x)$ сходится в интервале $|x| < R$, можно получить, пользуясь формулой для радиуса сходимости степенного ряда, что $|u_{0j}| \leq j!M^j$, где M – некоторая константа. Но тогда, пользуясь формулой (3), можно получить оценки для u_{1j}, затем – для u_{2j} и т.д., а затем, пользуясь этими оценками, доказать сходимость ряда.

Резюмируя эту серию примеров, хотелось бы еще раз обратить внимание на то, что в условиях теоремы Ковалевской присутствуют два важных условия. Первое – что в уравнении $\partial_t^{n_j} u = f(\dots)$ справа должны стоять младшие производные (это условие появляется из-за метода), а второе – что поверхность на которой задаются начальные условия, должна быть нехарактеристической (это уже свойство самого уравнения).

Задачи Еще один простейший метод отыскания частных и общих решений, не требующий никакой особой науки – это метод разделения переменных. Пусть мы рассматриваем, например, уравнение $u_{tt} = u_{xx}$.

Самые простые решения этого уравнения – те, которые зависят только от одной переменной (t или x). Таких решений мало и они сводятся к линейным функциям. Можно расширить класс решений, которые можно найти, если искать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $u(t,x) = \phi(t)y(x)$. Подстановка такого произведения в уравнение приводит к равенству

$$\phi''(t)y(x) = \phi(t)y''(x),$$

собирая все, что содержит t слева, а то, что содержит x – справа (т.е. *разделяя переменные*), мы получим, что

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)}.$$

Слева стоит функция, зависящая только от t, и не зависящая от x. Справа стоит функция, зависящая только от x и не зависящая от t. И это – одна и та же (в силу равенства) функция. Что же это за функция. Ответ тривиален, хотя и не очевиден: эта функция – константа! Обозначая эту константу через, например λ, мы получаем пару обыкновенных дифференциальных уравнений, из которых можно получить уже довольно большой запас решений. Например, решения вида $\cos\omega x \cos\omega t$.

Обратим внимание на следующий факт: то, что $u_{tt} = +u_{xx}$ существенно влияет на вид функций. Действительно, в случае уравнения $u_{tt} = -u_{xx}$ решения имеют уже вид $e^{\omega t}\cos\omega x$. С этими решениями связан эффект, на который мы хотели бы обратить Ваше внимание. Рассмотрим функцию e^t. При $t = 0$ она равна единице. При $t = 1$ – чуть больше двух. При $t = 3$ она уже больше двадцати, а при $t = 7$ переваливает за тысячу. Что это значит? Если мы описываем какой-то закон движения, то движение, которое при $t = 0$ происходило со скоростями порядка миллиметра в секунду, то есть со скоростью улитки, всего через семь секунд уже будет происходить со вполне ощутимой скоростью порядка метра в секунду (это уже скорость бега). А движения, которые при $t = 0$ происходили со вполне человеческой скоростью порядка метров в секунду, через семь секунд обретут уже космические скорости порядка километров в секунду.

Совершенно ясно, что для физики такие решения рассматривать совершенно бессмысленно, ибо все физические модели ограничены вполне определенными рамками рассматриваемых масштабов расстояний, скоростей, масс и пр., и почти мгновенный выход за пределы этих масштабов делает модель просто бесполезной. Именно поэтому математики, вслед за физиками, при изучении дифференциальных уравнений в первую очередь смотрят за тем, чтобы получаемые решения в течение некоторого достаточно ощутимого промежутка времени оставались в рамках тех масштабов, в которых они начались. Математически это формулируется как требование корректности: малое изменение начальных данных не должно сильно изменять решение на конечном промежутке времени. В случае нашего уравнения это не так: функции $u(t,x) = \frac{1}{\omega}e^{\omega t}\cos\omega x$ при $t = 0$ равны $u(0,x) = \frac{1}{\omega}\cos\omega x$, и при увеличении ω это начальное значение становится как угодно малым. Но если взять и зафиксировать любое $t > 0$, то при увеличении ω функция становится очень большой, так как экспонента становится очень большой.

Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и с уравнениями $u_t = \pm u_{xx}$. В случае знака "плюс"решения имеют вид $u(t,x) = e^{-\omega^2 t}\cos\omega x$ и ведут себя вполне прилично, а в случае знака минус экспонента имеет уже положительный показатель, и корректность задачи нарушается. Экспонента с положительным показателем – очень плохая функция!

Лекция III. Характеристики.

Замены переменных. Разрешимость задачи Коши для уравнений первого порядка Замена независимых переменных является одним из основных инструментов теории уравнений в частных производных. Именно с помощью замен обосновываются важнейшие формулы и демонстрируются важнейшие свойства таких уравнений.

Обратимся к уже исследованному нами уравнению $u_t = u_x$. Если сделать в этом уравнении замену независимых переменных $\tilde{x} = x+t$, $\tilde{t} = x-t$, то уравнение приобретет вид $u_{\tilde{t}} = 0$. По существу это – обыкновенное дифференциальное уравнение ($\tilde{x}$ здесь присутствует уже как параметр, по нему ничего не дифференцируется и ничего не интегрируется), его решение имеет вид $u = C(\tilde{x})$. Вернувшись к исходным переменным, мы получаем общий вид решения нашего уравнения: $u(t,x) = C(x+t)$, где C – произвольная функция.

Эту формулу мы получили еще методом рядов, но тогда C оказывалась произвольной аналитической функцией. О том, что можно уменьшить требования на C, мы тогда просто догадались. Теперь же формула решения получена в гораздо более мягких предположениях. Совершенно ясно, что для того, чтобы можно было вычислять производные, необходимо, чтобы u была дифференцируемой.

Обычно для того, чтобы упростить себе задачу, предполагают несколько больше – что u является непрерывно дифференцируемой. Это позволяет безо всяких оговорок осуществлять замены переменных (например, такие, как мы сделали только что). Таким образом, общее решение нашего уравнения в классе непрерывно дифференцируемых функций описывается формулой $u(t,x) = C(x+t)$, где $C(x,t)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

С помощью той же самой замены переменных показывается, что общее решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций описывается формулой $u(t,x) = f(x+t) + g(x-t)$, где f и g – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Отметим в связи с этим небольшой парадокс. Уравнение $u_{\tilde{t}\tilde{x}} = 0$, к которому сводится $u_{tt} = u_{xx}$, имеет решение $u(\tilde{t},\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + g(\tilde{t})$, причем нетрудно проверить, что для удовлетворения уравнению $u_{\tilde{t}\tilde{x}} = 0$ достаточно лишь однократной дифференцируемости f и g. А после возврата к исходным переменным требования к дифференцируемости резко возрастают. Откуда они берутся?

Все дело оказывается именно в замене переменных. Без требования дополнительной (второй) дифференцируемости мы не можем выполнить обратную замену в уравнении и не можем доказать, что полученные нами функции дают решение. Предположение о том, что мы имеем право делать замены переменных без каких-либо оговорок немедленно приводит нас к требованию существования (и, для простоты, непрерывности)не только тех производных решения, которые фигурируют в уравнении (т.е. $u_{\tilde{t}\tilde{x}}$ в нашем примере), но и всех производных соответствующего порядка (т.е. $u_{\tilde{t}\tilde{t}}$ и $u_{\tilde{x}\tilde{x}}$). Именно так и возникает понятие *классического решения*: решением называется функция, непрерывно дифференцируемая столько раз, каков порядок уравнения, которая при подстановке в уравнение дает тождество.

Рассмотрим теперь уравнение более общего вида:

$$a^1 u_{x^1} + a^2 u_{x^2} + \dots + a^n u_{x^n} = 0,$$

где $(x^1, \dots, x^n)$ – компоненты вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $a^1, \dots, a^n$ – коэффициенты. Аналогично простейшему уравнению $u_t = u_x$ хочется подобрать замену переменных так, чтобы в уравнении осталась только одна производная. Такая замена есть, более того, таких замен очень много. Мы приведем одну из них, при этом будем считать, что $a^n \neq 0$ (поскольку хотя бы один коэффициент в уравнении должен быть ненулевым, можно считать, что это именно последний коэффициент):

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x}^1 &=& a^1 x^1 + \dots + a^n x^n, \\ \tilde{x}^2 &=& a^n x^1 - a^1 x^n, \\ \dots && \dots \\ \tilde{x}^n &=& a^n x^{n-1} - a^{n-1} x^n, \end{array}$$

В новых переменных уравнение примет вид $u_{\tilde{x}^n} = 0$, и его решение будет иметь вид $u(x) = C(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{n-1})$, где $C(\cdot)$ – произвольная функция $n-1$ переменной.

Для того, чтобы выделить из всех решений какое-то одно, необходимо задать некоторую поверхность, и указать, чему равно решение на этой поверхности. Поверхность обычно задают в виде неявной функции: $S(x^1, \dots, x^n) = 0$ (предполагая, для корректности, что градиент функции S не обращается в нуль), а поведение решения на этой поверхности задают некоторой функцией от точки поверхности.

Замена переменных преобразует уравнение поверхности в другое, но поскольку при этом и уравнение, и его решение приобретают чрезвычайно простой вид, удобно вопрос о разрешимости обсудить сначала в новых переменных. Здесь принципиально различными являются два случая: если $\partial S/\partial \tilde{x}^n \neq 0$ и если $\partial S/\partial \tilde{x}^n \equiv 0$. В первом случае уравнение поверхности можно разрешить относительно $\tilde{x}^n$ и в качестве координат на поверхности задать $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{n-1}$. Тогда любая функция от точки поверхности описывается функцией $\phi(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{n-1})$, и решение уравнения $u(x)$, совпадающее на поверхности S с ϕ, будет определяться однозначно и будет равно $u(x) \equiv \phi(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{n-1})$. Во втором случае S не зависит от $\tilde{x}^n$, на поверхности можно менять координату x^n, оставляя остальные постоянными, и в качестве координат на поверхности можно выбрать x^n и несколько из остальных x^i. Но тогда нам не удастся найти решение с произвольными начальными данными: соответствующая функция $\phi(x^n, \dots)$ может зависеть от x^n произвольным образом, а в силу нашего уравнения u при изменении x^n меняться не должно.

Как мы видим, наши два случая геометрически отличаются тем, что в первом случае прямые $x^1 = \mathrm{const}$, ..., $x^{n-1} = \mathrm{const}$ "протыкают"поверхность, а во втором – лежат на ней. Возвращаясь к исходным переменным, мы видим, что два случая отличаются тем, как расположена поверхность относительно прямых $a^n x^i - a^i x^n = \text{const}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, т.е. прямые, направляющим вектором которых является вектор $(a^1, \ldots, a^n)$.

Эти прямые называются *характеристиками*, поверхности, состоящие из таких прямых – *характеристическими*, а поверхности, "протыкаемые"такими прямыми – *нехарактеристическими*. Условие нехарактеристичности обычно записывают в виде $(\nabla S, a) \neq 0$ на поверхности, где ∇S – градиент функции S, а a – вектор коэффициентов $(a^1, \ldots, a^n)$.

Таким образом, любое уравнение с постоянными коэффициентами есть, с точностью до замены переменных, обыкновенное дифференциальное уравнение (иногда говорят, "с дифференцированием вдоль направления $(a^1, \ldots, a^n)$").

Аналогичная ситуация складывается в случае, когда коэффициенты a^i уравнения зависят от x. В этом случае, конечно, линейными заменами переменных привести уравнение к простейшему виду невозможно, и приходится использовать нелинейные замены: $\tilde{x}^i = \phi^i(x^1, \ldots, x^n)$. В этом случае оказывается, что ϕ^i должны удовлетворять тому же самому дифференциальному уравнению, которое мы решаем. По удачному стечению обстоятельств этому уравнению удовлетворяют первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = a^1(x), \\ \dot{x}^2 = a^2(x), \\ \ldots \\ \dot{x}^n = a^n(x), \end{cases} \tag{4}$$

таких интегралов, являющихся функционально независимыми, (как Вам доказывали в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений) ровно $n-1$ штук, и поэтому общее решение уравнения имеет вид $u = F(\phi^1, \ldots, \phi^{n-1})$. Роль прямых линий в предыдущем примере теперь играют линии, являющиеся фазовыми траекториями системы (4), и разрешимость начальной задачи зависит от того, как расположена поверхность относительно этих линий.

Траектории системы (4) называют *характеристиками* уравнения

$$a^1(x)u_{x^1} + a^2(x)u_{x^2} + \cdots + a^n(x)u_{x^n} = 0,$$

поверхности, состоящие из характеристик, называют *характеристическими*, а поверхности, удовлетворяющие равенству $(\nabla S, a) \neq 0$ – *нехарактеристическими*. Условием разрешимости задачи Коши является, как мы видим, является требование, чтобы поверхность, на которой задаются начальные данные, была нехарактеристической.

Конечно, между характеристическими и нехарактеристическими поверхностями еще остается "зазор" – ведь имеются поверхности, для которых $(\nabla S, a) \not\equiv 0$, но в некоторых точках, может даже на некоторых линиях или подповерхностях меньшей размерности равенство нулю все-таки имеет место. Это – случай, когда поверхность не содержит характеристик, но касается их. Здесь для задачи Коши решение обычно выписывается, но оно может иметь какие-то особенности, разрывы, обращаться в бесконечность и т.п. Таким "пограничные"случаи требуют особого рассмотрения и мы на них останавливаться не будем.

Характеристики линейного уравнения второго порядка В заключение лекции обсудим вопрос об упрощении, с помощью замен переменных, линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \cdots = 0, \tag{5}$$

где многоточием обозначены младшие члены. Замена переменных $\tilde{x} = \phi(x,y)$, $\tilde{y} = \psi(x,y)$ приводит это уравнение к виду

$$(a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2)u_{\tilde{x}\tilde{x}} + (a\phi_x\psi_x + b[\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x] +$$

$$+ c\phi_y\psi_y)u_{\tilde{x}\tilde{y}} + (a\psi_x^2 + 2b\psi_y\psi_y + c\psi_y^2)u_{\tilde{y}\tilde{y}} + \cdots = 0.$$

Обратим внимание, что младшие члены после замены появляются даже если их не было, поэтому две задачи (упростить главную часть уравнения и избавиться от младших членов) лучше решать именно в той последовательности, в которой мы и стали действовать: сначала главная часть, а потом младшие члены.

Наиболее желательно оставить в главной части средний член – смешанную производную (поскольку уравнение $u_{\tilde{x}\tilde{y}} = 0$ мы уже уверенно умеем решать), и поэтому желательно сделать нулевыми крайние члены. Коэффициенты в этих членах однотипны, и условие аннуляции этих коэффициентов приводит к дифференциальному уравнению

$$a(x,y)\phi_x^2 + 2b(x,y)\phi_x\phi_y + c(x,y)\phi_y^2 = 0,$$

которое называется *уравнением характеристик* или *уравнением характеристических поверхностей* для уравнения (5). Понятно, это это – квадратное уравнение относительно ϕ_x/ϕ_y, и если оно имеет два вещественных корня $\lambda^i(x,y)$, то уравнение характеристик распадается на два:

$$(\phi_x - \lambda^1\phi_y)(\phi_x - \lambda^2\phi_y) = 0.$$

Каждое из полученных уравнений – это уравнение первого порядка, которое мы умеем решать, и первые интегралы каждого из этих уравнений дают нам искомые функции ϕ и ψ.

Отметим, что соответствующие уравнения характеристических линий для той и другой поверхности имеют вид

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\lambda^1(x,y)}, \qquad \frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\lambda^2(x,y)},$$

и объединение этих уравнений дает уравнение

$$(dy + \lambda^1 dx)(dy + \lambda^2 dx) = 0,$$

которое после применения теоремы Виета приводится к виду

$$a(x,y)dy^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0.$$

Это уравнение называют *уравнением бихарактеристик*, оно удобно тем, что его можно выписать сразу по исходному уравнению: достаточно заменить производные на дифференциалы "другой"переменной и поменять знак у среднего члена.

Конечно, на первый взгляд, такая манипуляция производит впечатление махинации, однако ничего сверхестественного в такой операции нет: просто матрица квадратичной формы уравнения бихарактеристик и матрица, отвечающая исходному уравнению, являются взаимно обратными, а построение обратной к матрице второго порядка как раз и дает такой алгоритм действий (правда, с делением на детерминант исходной матрицы, но для уравнения этот множитель можно безболезненно опустить).

Некоторые обобщения теоремы Ковалевской Рассмотрим случай, когда система уравнениний не приведена к нормальному виду, т.е. не разрешена относительно старшей производной

$$F_i(x, u, \partial_x u, \ldots, \partial_x^\alpha u, \ldots) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{42}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $\partial_x^\beta u = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} u$. Предположим, что функции F_i являются аналитическими и зависят от производных функций u_j порядка $\leq n_j$. Начальные условия рассмотрим на гладкой аналитической гиперповерхности Γ

$$\partial_\nu^k u_i(x) = \varphi_{i,k}(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, 1, \ldots, n_i - 1;\ i = 1, \ldots, m. \tag{43}$$

Здесь ∂_ν производная по нормали к Γ.

Сначала сведем эту задачу к нормальному вида :

$$\partial_t^{n_j} u_j = G_i(t, y, u, \partial_t u, \partial_y u, \ldots, \partial_t^k \partial_y^\alpha u, \ldots), \quad k \leq n_j - 1,\ |\alpha| \leq n_j, \quad j = 1, \ldots, K \tag{44}$$

$$\partial_t^k u_j|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(y)_{jk}, \quad k = 0, \ldots, n_j - 1,\ j = 1, \ldots, K \tag{45}$$

Сделать это можно при дополнительных условиях. Введчм в окрестности некоторой точки $P_0 \in \Gamma$ локальную систему координат $(t, y_1, \ldots, y_{n-1})$ так, чтобы эти координаты выражались через x

аналитически и чтобы переменная t менялась в направлении нормали к Γ так, что поверхность Γ определяется равенством $t = 0$, а координаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ при $t = 0$ были бы локальными координатами на Γ:

$$t = S(x),\ y_j = S_j(x), \quad j = 1, \ldots, n-1, \qquad \det \begin{pmatrix} \nabla_x S \\ \nabla_x S_1 \\ \ldots \\ \nabla_x S_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

где S, S_j– вещественно аналитичесеkие функции, уравнение $S = 0$ локально определяет поверхность Γ. В новых координатах начальные условия приобретают форму (45) и система (44) примет следующий вид:

$$\widetilde{F}_i(t, y, \partial_t^{n_1} u_1, \ldots, \partial_t^{n_K} u_K, \ldots, \partial_t^k \partial_y^\alpha u_s, \ldots) = 0, \quad i = 1, \ldots, K. \tag{46}$$

Условие (45) позволяет вычислить все производные функции u_j при $t = 0$ до порядка $n_j - 1$. Более того, дифференцирование начальных условий позволяет найти при $t = 0$ все производные $\partial_t^k \partial_y^\alpha u_j$, которые имеют по t порядок $\leq n_j - 1$ (любого порядка по y). Таким образом, при $t = 0$ из начальных условий можно найти значения всех аргументов функций $\widetilde{F}_i$, исключая производные по t максимального порядка n_j для u_j, так что эти уравнения при $t = 0$ можно записать в виде уравнений

$$\widetilde{F}_i(0, y, \partial_\nu^{n_1} u_1(0, y), \ldots, \partial_\nu^{n_m} u_m(0, y), \ldots, \partial_t^k \partial_y^\alpha \widetilde{\varphi}_s, \ldots) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{47}$$

относительно старших производных производных по t. Если потребовать, чтобы якобиан

$$\frac{\partial(\widetilde{F_1}, \ldots, \widetilde{F_K})}{\partial(\partial_t^{n_1} u_1, \ldots, \partial_t^{n_K} u_K)} \neq 0$$

был отличен от нуля при $t = 0$, систему (42) можно локально привести к нормальному виду (44).

Если поверхность Γ задается уравнением $S(x) = 0, |\nabla_x S| \neq 0$, то это условие в старых координатах можно записать в виде

$$\det \Big|\Big| \sum_{|\alpha| = n_j} \frac{\partial F_i}{\partial(\partial_x^\alpha u_j)} (\partial_x S)^\alpha \Big|\Big|_{i,j=1,\ldots,K} \neq 0, \quad t = 0. \tag{48}$$

Таким образом, локальное приведение к нормальному виду требует выполнения условия нехарактеристичности (48) границы Γ и ее локальной вещественной аналитичности ($S \in \mathcal{A}_{loc}$).

Условие нехарактеристичности (48) поверхности Γ имеет особенно простой смысл, когда F_i линейно зависят от производных. Например для уравнения

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u + f(x) = 0, \tag{49}$$

условие (48) примет вид

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) (\partial_x S)^\alpha \neq 0, \quad S(x) = 0.$$

В точках, в которых (48) равен нулю, говорят что нормаль к Γ в таких точках имеет характеристическое направление. Если в любой точке Γ определитель в (48) равен нулю, поверхность Γ называется характеристической. В этом случае система (47) порождает при $t = 0$ нетривиальное соотношение для начальных данных

$$\mathcal{R}(\varphi_{1,0}, \ldots, \varphi_{m,0}, \ldots, \partial_x \varphi_{i,j}, \ldots) = 0.$$

Например для (49) при $S(t, y) = t$, $x = (t, y)$, получим соотношение

$$\sum_{k+\beta \leq m,\, k \neq m} a_{k,\beta}(0, y) \partial_y^\beta \varphi_k(y) + f(y, 0)) = 0.$$

Пример несуществования аналитического решения Что же будет в характеристическом случае? Рассуждения, которые были использованы выше при доказательстве единствености аналитического решения задачи Коши, применимы к системам вида

$$\partial_t^{n_i} u_i = f_i(t, x, u, \partial_t u, \partial_x u, \dots), \quad i = 1, \dots, m. \tag{50}$$

и в том случае, когда правые части могут содержать , например, производные $\partial_t^k \partial_x^\alpha u_j$ с $k + \alpha > n_j,\ k < n_j$ (**для системы типа Ковалевской требуется, чтобы** $k + \alpha \le n_j,\ k < n_j$). Однако в этом случае аналетическое решение, вообще говоря, существует не для всех начальных данных.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad x \in R^1,\ t > 0; \quad u(0, x) = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{51}$$

В этом случае $S(x, t) = t \ \Rightarrow\ \nabla S = (0, 1)$ и

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha (\partial_x S)^{\alpha_1} (\partial_t S)^{\alpha_2} \equiv 0.$$

Таким образом задача (51) –характеристическая. Докажем, что в этом случае нет аналитического решения в окрестности начала координат $(0, 0)$.

Будем доказывать от противного. Предположим существование решения, аналитического в начале координат:

$$u(t, x) = \sum_{|\alpha| \ge 0} u_{\alpha_1, \alpha_2} t^{\alpha_1} x^{\alpha_2}.$$

Тогда коэффициенты u_{α_1, α_2} имеют следующий вид

$$u_{2s,k} = \frac{(2s + 2k)!}{(2s)! k!} (-1)^{k+s}, \quad u_{2s+1,k} = 0, \quad s \ge 0,\ k \ge 0.$$

Но тогда этот ряд не сходится ни в какой окрестности начала координат, поскольку он расходится, например, в любой точке $(0, x),\ x \ne 0$.

Комментарий Теперь сделаем комментарии к теореме Коши (теоремы Ковалевской), доказанной нами на предыдущей лекции. Очевидно, все свойства мажорант и мажорантных уравнений переностся на вещественно аналитические функции $u \in \mathcal{A}^C_{loc}$ локально представимых в виде абсолютно сходящихся степенных рядов

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \ge 0} u_\alpha (x - x_0)^\alpha, \qquad u_\alpha \in C^1, \quad x \in R^n,\ n \ge 1,$$

коэффициенты которых принимают комплексные значения, и уравнения

$$\frac{d}{dx} u = f(u, x)$$

или системы

$$\partial_t^{n_j} u_j = F_j(t, y; u_1, \dots, u_K, \dots, \partial_t^k \partial_y^\alpha u_s,\ 0 \le\ k \le n_s - 1, |\alpha| + k \le\ n_s, |\alpha| \ge 0),$$

правые части которых вещественно аналитичны по $x = (t, y)$ и голоморфны по u и ее производным, т.е. локально представимых в виде абсолютно сходящихся рядов

$$\begin{gathered} F_j(t, y; \xi_1, \dots, \xi_K, \dots, \xi_{k,\alpha,s};\ 0 \le |\alpha| + k \le\ n_s;\ 0 \le\ k \le n_s - 1;\ s = 1, \dots, K) = \\ = \sum_{l + |\beta| + |\beta_{k,\alpha,s}| \ge 0} f_{l,\beta;\beta_{k,\alpha,s}} (t - t_0)^l (y - y_0)^\beta (\xi_{k,\alpha,s} - \xi^0_{k,\alpha,s})^{\beta_{k,\alpha,s}}, \\ f_{l,\beta;\beta_{k,\alpha,s}}, \quad \xi_{k,\alpha,s}, \quad \xi^0_{k,\alpha,s} \in C^1, \quad (t, y) \in R^n. \end{gathered} \tag{52}$$

Отсюда следует существование решения $\psi(x) \in \mathcal{A}^C_{loc}$ задачи Коши для уравнения (59) с $\psi(x_0) = \psi^0$. Тогда

$$\psi(x) = \psi_R(x) + i\, \psi_I(x),$$

$\psi_R(x)$, $\psi_I(x)$-линейно независимы, вещественно аналитичны и принимают вещественные значения. Нетрудно проверить, что замена переменных

$$x_1 = y - \psi_R(x), \quad x_2 = y - \psi_I(x)$$

приводит уравнение (53) к каноническому (эллиптическому) виду

$$Lu = Q(x_1, x_2)\Big(\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}\Big)u + \ldots, \qquad Q(x_1, x_2) \neq 0.$$

точками обозначены младшие члены уравнения.

Приведем пример качественного различия решений гиперболического $\Box u \equiv \partial^2_t u - \partial^2_x u = 0$ и эллиптического $\Delta u \equiv \partial^2_x u + \partial^2_y u = 0$ уравнений. Поставим такую задачу: для какого из этих уравнений существует нетривиальное классическое решение с замкнутой линией уровня?

Решением первого уравнения в единичном круге с нулевыми данными на границе круга будет нетривиальное решение $u = t^2 + x^2 - 1$. В тоже время, для второго уравнения (к этому мы вернемся позднее) справедлив так называемый принцип максимума, т.е. для классических решений максимум и минимум решения достигаются на границе области. Тогда единственным решением второго уравнения с нулевыми данными на границе круга будет только тривиальное решение $u \equiv 0$.

Рассмотрим еще один пример (уравнение Трикоми):

$$\partial^2_x u + x\,\partial^2_y u = 0$$

Уравнение для характеристик

$$S^2_x + x\,S^2_y = 0,$$

которое в гиперболической зоне $x < 0$ определяет два семейства линейно независимых характеристик

$$S^{\pm} = y - \varphi_{\pm}(x), \qquad \pm\,\varphi'_{\pm} = \sqrt{-x} \implies \varphi(x) = \pm\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \mathrm{const}$$

Замена

$$t = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad z = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$$

приводит уравнение в гиперболической зоне ($x < 0$)к каноническому (гиперболическому) виду

$$-\Big(\frac{3}{4}(t-z)\Big)^{2/3}\,\partial_t\partial_z u + \ldots$$

В эллиптической зоне ($x > 0$):

$$\varphi' = i\,\sqrt{x} \quad \implies \quad \varphi(x) = \frac{2}{3}\,i\,x^{3/2}, \qquad i^2 = -1.$$

Первый интеграл

$$S(x,y) = y - \frac{2}{3}\,i\,x^{3/2}$$

определяет замену переменных

$$x_1 = \mathrm{Re}\ S = y, \quad x_2 = \mathrm{Im}\ S = -\frac{2}{3}\,x^{3/2},$$

которая приводит уравнение Трикоми к каноническому (эллиптическому) виду в эллиптической зоне ($x > 0$):

$$\Big(-\frac{2}{3}\,x_2\Big)^{2/3}\Big(\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}\Big)u + \ldots$$

Приложение к Лекции 3.

Примеры. Приведем несколько примеров. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$L\,u = a(x,y)\partial_x^2 u + 2b(x,y)\partial_x\partial_y u + c(x,y)\partial_y^2 u = 0.$$

Невырожденные характеристические поверхности $S(x,y) = 0, \nabla S \neq 0$, определяются уравнением

$$a(x,y)S_x^2 + 2b(x,y)S_xS_y + c(x,y)S_y^2 = 0. \tag{53}$$

Из невырожденности поверхности $S = 0$ можно искать в виде $S(x,y) = y - \varphi(x)$ либо $S(x,y) = x - \varphi(y)$. Остановимся на первом случае. Тогда уравнение (53) примед вид

$$a(x,y)(\varphi')^2 - 2b(x,y)\varphi' + c(x,y) = 0, \quad y = \varphi(x). \tag{54}$$

I. Если $b^2 - ac > 0$, имеем:

$$\frac{d}{dx}\varphi^\pm = \lambda_\pm(\varphi^\pm, x), \qquad \lambda_\pm = \frac{1}{a}\Big(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\Big).$$

В этом случае есть два различных вещественных корня, т.е. два линейно независимых первых интеграла $S^\pm = y - \varphi^\pm(x)$, которые определяют замену переменных

$$\xi = S^+(x,y), \quad \eta = S^-(x,y),$$

в которой уравнение (53) примет канонический (гиперболический) вид

$$L\,u = Q(\xi,\eta)\partial_\xi\partial_\eta\, u + \ldots, \tag{55}$$

точками обозначены младшие члены уравнения. Коэффициенты при старших производных $\partial_\xi^2 u, \partial_\eta^2 u$ равны нулю в силу характеристичности поверхностей $S^\pm$. Здесь

$$Q(\xi,\eta) = \Big(a(x,y)S_x^+S_x^- + b(x,y)(S_x^+S_y^- + S_x^-S_y^+) + c(x,y)S_y^+S_y^-\Big)\Big|_{x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)} \neq 0, \tag{56}$$

поэтому уравнение (55) эквивалентно уравнению

$$\partial_\xi\partial_\eta\, u + \ldots, \tag{57}$$

Неравенство (56) доказывается следующим образом. Возмем любую точку x_0, y_0. Не ослабляя общности можно считать, что в координатах (x,y) в точке x_0, y_0 квадратичная форма

$$a(x_0,y_0)X^2 + 2b(x_0,y_0)XY + c(x_0,y_0)Y^2 = \mu_1X^2 + \mu_2Y^2$$

приведена к каноническому виду. Тогда

$$\varphi^\pm(x_0) = \pm\sqrt{-\mu_2/\mu_1} \implies \mu_1S_x^+(x_0,y_0)S_x^-(x_0,y_0) + \mu_2S_x^+(x_0,y_0)S_x^-(x_0,y_0) = 2\mu_2 \neq 0.$$

Теперь рассмотрим главную часть уравнения (57)

$$\partial_\xi\partial_\eta\, v = \partial_z^2 v - \partial_t^2 v = 0 \tag{58}$$

в системе координат (t,z), повернутой на $\pi/2$ относительно системы координат (ξ,η). Из (58) следует, что любое классическое решение

$$v(t,z) = f(z-t) + g(z+t)$$

с двумя произвольными функциями f, g. Отсюда легко получить формулу Даламбера решения задачи Коши с данными Коши :

$$v|_{t=0} = \varphi(z), \quad \partial_t v|_{t=0} = \psi(z),$$

вида

$$v(t,x) = \frac{1}{2}(\varphi(z-t) + \varphi(z+t)) + \frac{1}{2}\int_{z-t}^{z+t}\psi(s)ds$$

Из этой формулы следует, что значение функции v в точке (z,t) определяется значениями данных Коши $\varphi(z),\psi(z)$ на отрезке $z\in[(z-t),(z+t)]$, отсекаемым двумя характеристиками, выходящими из точки (t,x), что связано с конечной скоростью распространения возмущения.

II. Если $b^2-ac=0$, уравнение (53) имеет один кратный вещественный корень

$$\frac{d}{dx}\varphi=\frac{b(x,y)}{c(y,x)}\Big|_{y=\varphi},$$

что определяет семейство характеристик $S(x,y)=y-\varphi(x)=\mathrm{const}$. Сделав замену переменых $t=S(x,y), z=S_1(x,y)$, где

$$\det\begin{pmatrix}\nabla S\\ \nabla S_1\end{pmatrix}\neq 0,$$

получим канонический вид уравнения (53):

$$Lu=Q(t,z)\partial_z^2u+\dots$$

$$Q(t,z)=\Big(a(x,y)(\partial_xS_1)^2+2b(x,y)\partial_xS_1\partial_yS_1+c(x,y)(\partial_yS_1)^2\Big)\Big|_{x=x(t,z),y=y(t,z)}\neq 0,$$

так как $S_1=\mathrm{const}$ не являются характеристическими поверхностями. Главной частью этого уравнения может быть уравнение теплопроводности

$$\partial_z^2v-\partial_tv=0,$$

которое при $t>0$ имеет решение

$$E(t,z)=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Big(-\frac{z^2}{4t}\Big)>0\qquad\forall t>0,\ z\in R^1.$$

В тоже время, для любого $z\neq 0$

$$E(t,z)\,\rightarrow\,0\qquad t\,\rightarrow\,0.$$

Таким образом, точечный источник при $t=0$ для $t>0$ порождает решение неравное нулю для любого $z\in R^1$. В этом случае мы имеем бесконечную скорость распространения возмущения. Конечно, это идеализированая модель, но рассмотренные случаи уравнения второго порядка показывают на существенное различие структуры решения в зависимости от числа линейно независимых семейств характеристик.

III. Пусть $b^2-ac<0$, тогда уравнение (53) имеет коплексно сопряженные корни. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=\frac{1}{c}\Big(b+\sqrt{b^2-ac}\Big)\tag{59}$$

правая часть которого вещественно аналитическая функция, принимающая комплексные значения, если вещественно аналитичны a,b,c.

Задачи(наш задачник!!!!!!!!!!) Примеры на построение мажорант в теореме Ковалевской, задачи на теорему Ковалевской из нашего задачника.

Лекция IV. Симметризуемые системы. Условие Годунова

Большинство базовых систем уравнений математических физики может быть записано в виде так называемых систем законов сохранения вида

$$\partial_tu^j+\sum_{k=1}^n\partial_{x_k}f^{j,k}=0,\quad j=1,\dots,m,\quad x\in R^n.\tag{60}$$

Здесь $f^{j,k}$ функции величин $u=(u^1,\dots,u^m)$. Из (60) следует, что для гладких решений, стабилизирующихся на бесконечности ($u\to 0$ если $|x|\to\infty$), средние

$$\int u^j(t,x)\,dx=\mathrm{const},$$

т.е. u^j сохраняют при эволюции свои пространственные средние (являются консервативными величинами).

В этом параграфе мы приведем необходимые и достаточные условия симметризуемости системы закон сохранения (60). Покажем, что эта задача связана с существованием так называемого выпуклого (по Годунову [2,5]) расширения системы (60), т.е. дополнительного закона сохранения

$$\partial_t \Phi(u) + \sum_{k+1}^{n} \partial_{x_k} \Psi^k(u) = 0, \tag{61}$$

который является следствием системы (60) (это уравнение справедливо для всех гладких решений (60)). Гладкие функции ($\Phi(u)$, $(\Psi^1, \dots, \Psi^n(u))$ называются энтропией и потоком энтропии соответственно. Энтропия называется строго выпуклой, если матрица вторых производных

$$\Big(\partial_{u_k} \partial_{u_j} \Phi(u) \Big) > 0. \tag{62}$$

положительно определена.

Лемма 0.2 *Система (60) –симметризуема, если существует ее строго выпуклое расширение.*

Достаточность Пусть существует дополнительный закон сохранения с любыми гладкими функциями ($\Phi(u)$, $(\Psi^1, \dots, \Psi^n(u))$. Следуя [6] положим $\Phi_j = \partial_{u_j}\Phi$, $f_l^{j,k} = \partial_{u_l} f^{j,k}$, $F_l = \partial_{u_l}\Psi$. Очевидно, (61) является следствием (60) тогда и только тогда, когда

$$\Phi_j f_l^{j,k} = \Psi_l^k, \quad j,l = 1,\dots,m, \quad k = 1,\dots,n. \tag{63}$$

Дифференцируя (67) по u^s, получим

$$\Phi_{j,s} f_l^{j,k} = \Psi_{l,s}^k - \Phi_j^k f_{l,s}^{j,k}. \tag{64}$$

Из симметричности правой части (64) следует симметричность еч левой части. Отсюда, умножая уравнения системы (60) на $\Phi_{j,h}$ и суммируя по j, получим систему уравнений

$$\Phi_{jh} \partial_t u^j + \Phi_{j,h} f_l^{j,k} \partial_{x_k} u^l = 0, \quad h = 1,\dots,m, \tag{65}$$

с симметричными, в силу (64), матрицами $\partial^2\Phi = (\Phi_{j,h})$, $\mathcal{F}_{hl}^k = (\Phi_{j,h} f_l^{j,k})$. Таким образом, существование расширения (61) является достаточным условием симметризуемости системы законов сохранения (60). Остался открытым вопрос о приводимости системы (**??**) к нормальному виду с единичной матрицей при производной ∂_t (см. [2] инварианты Римана). В простейшем случае системы (60) с линейным потоком (матрица $(f_l^{j,k})$– маирица с постоянными коэффициентами, энтропия $\Phi(u) = \sum a_{jk} u^j u^k$ –квадратичная функция) достаточно потребовать строгую выпуклость энтропии. Тогда существует замена переменных $u = \mathcal{O}v$ приводящая систему (65) к нормальному виду

$$\partial_t v_j + \lambda_j^{-1} G_l^{j,k} \partial_{x_k} v_l = 0, \quad (G_l^{j,k}) = \mathcal{O}^{-1} \mathcal{F}^k \mathcal{O}, \tag{66}$$

$\lambda_j > 0$– собственные значения матрицы $\partial^2\Phi$.

Необходимость Заметим, что если система (60) симметрична

$$f_l^{j,k} = f_j^{l,k} \tag{67}$$

функции

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (u^j)^2, \quad \Psi^k = u^j f^{j,k} - g^k,$$
$$\nabla_{x_j} g^k = f^{j,k}. \tag{68}$$

определяют строго выпуклое расширение при условии разрешимости системы уравнений (68). Условия симметричности (67) гарантирует существование гладкого решения системы

$$\nabla_{x_j} g^k = f^{j,k}.$$

Пример. Приведем примеры симетризуемых систем:

1. Исследуем на предмет симметризуемости систему, расмотренную нами выше

$$\partial_t v(x,t) + v(x,t)\,\partial_x v(x,t) + \partial_x \Pi(x,t) = 0, \quad (x,t) \in R^2_+ \tag{69}$$
$$\partial_t \Pi + \mu\,\partial_x v(x,t) + \frac{1}{\tau}\,\Pi = 0, \quad (x,t) \in R^2_+$$

Нетрудно видеть, что энтропийная пара в этом случае

$$\Phi(v,\Pi) = \frac{\mu}{2}\,v^2 + \frac{1}{2}\,\Pi^2, \qquad \Psi(v,\Pi) = \frac{\mu}{3}\,v^3 + \mu\,v\Pi.$$

Тогда выпуклое диссипативное расширение:

$$\partial_t\Big(\frac{\mu}{2}\,v^2 + \frac{1}{2}\,\Pi^2\Big) + \partial_x\Big(\frac{\mu}{3}\,v^3 + \mu\,v\Pi\Big) + \frac{1}{\tau}\,\Pi^2 = 0$$

Матрица вторых производных

$$\partial^2\Phi = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} v & 1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \partial^2\Phi \cdot F = \begin{pmatrix} \mu\,v & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует симметризуемость системы (69)

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \begin{pmatrix} v \\ \Pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\,v & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} v \\ \Pi \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi \end{pmatrix} = 0.$$

Теперь можно получить априорную оценку в $C((0,\infty); L_2(R^2_+))$. Получим

$$\int_{R^1} \Big(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \begin{pmatrix} v \\ \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \Pi \end{pmatrix} \Big) dx + \int_{R^1} \Big(\begin{pmatrix} \mu\,v & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} v \\ \Pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \sigma \end{pmatrix} \Big) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{R^1} \begin{pmatrix} \mu\,v^2 \\ \Pi^2 \end{pmatrix} dx = -\frac{1}{\tau}\int_{R^1} \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi^2 \end{pmatrix} dx$$

Таким образом, имеем:

$$\mu\frac{d}{dt}\int_{R^1} v^2 dx = 0, \quad \frac{d}{dt}\int_{R^1} \Pi^2 dx + \frac{2}{\tau}\int_{R^1} \Pi^2 dx = 0,$$

т.е. величина v консервативна

$$\int_{R^1} v^2 dx(t) \;\equiv\; \int_{R^1} v|^2_{t=0} dx,$$

неравновесная переменая $\Pi \to 0$:

$$\int_{R^1} \Pi^2 dx(t) = e^{-t/\tau}\int_{R^1} \Pi|^2_{t=0} dx \;\to\; 0 \quad \text{если} \quad t \to \infty.$$

2. Расмотрим одномерную систему первого порядка

$$\partial_t u + \partial_x v = 0, \tag{70}$$
$$\partial_t v - \partial_x u - \partial_x \sigma = 0,$$
$$\partial_t \sigma - 3\partial_x v = 0.$$

Нетрудно проверить, что эта система имеет строго выпуклое расширение

$$\partial_t\big[u^2 + v^2 + (\sigma + 2u)^2\big] - 2\partial_x\Big[v\sigma + uv\Big] = 0,$$

для энтропийной пары

$$\Phi = u^2 + v^2 + (\sigma + 2u)^2, \quad \Psi = -2\Big[v\sigma + uv\Big].$$

Здесь матрица вторых производных

$$\partial^2\Phi = \left(\begin{array}{ccc} 10 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{array} \right); \qquad \det\left(\partial^2\Phi\right) \neq 0.$$

Применяя эту матрицу к системе (70), получим симметризованную систему

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \partial_t U + \left(\begin{array}{ccc} 10 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{array} \right) \partial_x U = 0, \quad U = (u, v, \sigma)^\top,$$

которую можно (см. (66)) привести к симметричному нормальному виду системы типа Ковалевской

$$\partial_t U + A\ \partial_x U = 0.$$

Решение задачи Коши для симметричной системы В этом параграфе мы продолжим исследование задачи Коши для систем первого порядка, но для простоты ограничимся линейным случаем. Пусть в полосе $Q_T = \{0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^n\}$ задана система N уравнений

$$\mathcal{L}(u) = u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j(t,x) u_{x_j} + Bu = f(t,x), \tag{3.1}$$

где $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$, $f(t,x) = (f_1(t,x), \ldots, f_N(t,x))$. Матрицы A^j $(j = 1, \ldots, n)$ предполагаются симметрическими: $A^j = (A^j)^*$. Приведчм ряд определений:

Определение 0.1 *Система (3.1) называется* гиперболической *по направлению оси t, если уравнение* $\det\left\|\sum_{j=1}^n A^j\xi_j + \lambda E\right\| = 0$ *относительно λ при всех действительных $\xi \neq 0$ имеет ровно N действительных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, возможно кратных.*

Определение 0.2 *Система (3.1) называется* строго гиперболической*, если эти корни действительны и различны для любого $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$.*

Если A^j — симметрические матрицы, $A^j = (A^j)^*$, тогда система автоматически гиперболична (для любого $\xi_0 \neq 0$ матрица $\sum_{j=1}^n A^j\ \xi_j$ имеет вещественные собственные значения) .

Определение 0.3 *Матрица B называется* положительно определенной*, если $(Bu, u) > 0$ для любого $u \neq 0$ (диссипативность).*

Определение 0.4 *Вектор $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$ называется* характеристическим*, если*

$$\det\left\|\xi_0 E + \sum_{j=1}^{n} \xi_j A^j\right\| = 0.$$

Определение 0.5 *Поверхность $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется* поверхностью пространственного типа*, если для любого вектора $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n)$ внешней нормали к S матрица*

$$\nu_0 E + \sum_{j=1}^{n} \nu_j A^j$$

является положительно определенной.

Очевидно, поверхность $t = \mathrm{const}$ является поверхностью пространственного типа. Значит, такие поверхности существуют.

В дальнейщшем будем называть задачу Коши для (60) корректной, если для любых гладких начальных данных существует единственное гладкое (классическое) решение, по крайней мере в достаточно малой окрестности гиперплоскости $t = \mathrm{const}$ или нехарактеристической гиперповерзности для которго справедлива априорная оценка (например в L_2). Целью этого параграфа является исследование условий корректности задачи Коши для системы (3.1).

Теорема единственности Рассмотрим на плоскости $t=0$ область G и пусть Ω — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченная областью $G \subset \mathbb{R}^n$ и поверхностью S пространственного типа по отношению к своей внешней нормали. Пусть для решения системы (3.1) заданы начальные условия в области G:

$$u\Big|_{t=0} = \psi(x), \tag{3.2}$$

то есть поставлена задача Коши.

Теорема 0.2 *C^1- решение системы (3.1) в G однозначно определяется заданными начальными данными (3.2) в любой точке области Ω.*

Доказательство Рассмотрим сечение области Ω гиперплоскостью $t=\tau$:

$$G_\tau = \Omega \cap \{t=\tau\}.$$

Введем обозначения

$$Q_\tau = \{0 \le t \le \tau,\ x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad \Omega_\tau = \Omega \cap Q_\tau, \qquad S_\tau = S \cap Q_\tau.$$

Умножим векторное равенство (3.1) скалярно на вектор $2u$. Получим

$$(2u, u_t) + 2\sum_{j=1}^n \left(A^j u_{x_j}, u\right) + 2\left(Bu, u\right) = \left(2u, f\right). \tag{3.3}$$

Преобразуем отдельные члены

$$(2u, u_t) = (u,u)_t\,, \qquad \left(A^j u, u\right)_{x_j} = \left(A^j u, u_{x_j}\right) + \left(A^j u_{x_j}, u\right) + \left(A^j_{x_j} u, u\right),$$

откуда в силу симметричности матриц A^j

$$2\left(A^j u_{x_j}, u\right) = \left(A^j u, u\right)_{x_j} - \left(A^j_{x_j} u, u\right).$$

Подставим полученное выражение в равенство (3.3). Получим

$$(u,u)_t + \sum_{j=1}^n \left(A^j u, u\right)_{x_j} + \left(\widetilde{B}u, u\right) = 2\left(u, f\right), \tag{3.4}$$

где $\widetilde{B} = 2B - \sum_{j=1}^n A^j_{x_j}$. Будем считать, что матрица $\widetilde{B}$ удовлетворяет условию

$$\left(\widetilde{B}u, u\right) \ge (u,u).$$

Ниже мы покажем, что на конечном временном интервале $(0,T)$ существования решения это дополнительное условие не ограничивает общности.

Проинтегрируем (3.4) по Ω_τ и воспользуемся теоремой Гаусса–Остроградского для преобразования объемного интеграла в поверхностный. ($\vec{n}$ везде обозначает единичный вектор внешней нормали к поверхности, ограничивающей Ω_τ). Получим:

$$\int_{\Omega_\tau} \left\{(u,u)_t + \sum_{j=1}^n \left(A^j u, u\right)_{x_j} + \left(\widetilde{B}u, u\right)\right\} dxdt = 2\int_{\Omega_\tau} (u,f)dxdt$$

или

$$\int_{\partial\Omega_\tau = G\cup G_\tau \cup S_\tau} \left\{(u,u)\cos(\vec{n},t) + \sum_{j=1}^n \left(A^j u, u\right)\cos(\vec{n},x_j)\right\} d\sigma +$$

$$+\int_{\Omega_\tau}\left(\widetilde{B}u,u\right)dxdt=2\int_{\Omega_\tau}(u,f)dxdt.$$

На G_τ имеем $\cos(\vec{n},t)=1$, $\cos(\vec{n},x_j)=0$, в тоже время на G — $\cos(\vec{n},t)=-1$, $\cos(\vec{n},x_j)=0$. Отсюда

$$\begin{aligned}\int_{G_\tau}(u,u)dx \quad &- \quad \int_G(u,u)dx+\int_{S_\tau}\left(\left[E\cos(\vec{n},t)+\sum_{j=1}^{n}A^j\cos(\vec{n},x_j)\right]u,u\right)d\sigma\\ &+ \quad \int_{\Omega_\tau}\left(\widetilde{B}u,u\right)dxdt=2\int_{\Omega_\tau}(u,f)\,dxdt.\end{aligned}$$

Так как S –поверхность пространственного типа, нормаль
$\vec{n}=(\cos(\vec{n},t),\cos(\vec{n},x_1),\ldots,\cos(\vec{n},x_n))$, то

$$\int_{S_\tau}\left(\left[E\cos(\vec{n},t)+\sum_{j=1}^{n}A^j\cos(\vec{n},x_j)\right]u,u\right)\geq 0.$$

Учитывая, что $\left(\widetilde{B}u,u\right)\geq(u,u)$, получим неравенство

$$\int_{G_\tau}(u,u)\,dx+\int_{\Omega_\tau}(u,u)dxdt\leq\int_G(u,u)\,dx+2\int_{\Omega_\tau}(u,f)\,dxdt. \tag{3.5}$$

Для любых векторов v,w справедливо $2(v,w)\leq(v,v)+(w,w)$, откуда

$$2\int_{\Omega_\tau}(u,f)\,dxdt\leq\int_{\Omega_\tau}(u,u)\,dxdt+\int_{\Omega_\tau}(f,f)\,dxdt.$$

С учетом начальных условий неравенство (3.5) запишется в виде

$$\int_{G_\tau}(u,u)\,dx\leq\int_G(\psi,\psi)\,dx+\int_{\Omega_\tau}(f,f)\,dxdt. \tag{3.6}$$

Это неравенство носит название *энергетического неравенства* или *априорной оценки* C^1- решения задачи Коши.

Пусть теперь $u'(t,x)$ и $u''(t,x)$ —два решения системы (3.1), удовлетворяющие начальному условию (3.2). Тогда $v=u'-u''$ есть решение однородной системы, соответствующей системе (3.1), т.е. при $f(t,x)=0$, с начальным условием $v\big|_{t=0}=0$. Из энергетического неравенства для v следует, что $v(t,x)\equiv 0$, т.е. $u'\equiv u''$.

Из априорной оценки (3.6) следует также теорема о непрерывной зависимости решения (3.1) от начальных данных и правой части f. В самом деле, если f мало в норме пространства $L_2(\Omega)$ и ψ мало в норме $L_2(G)$, то и u мало в норме $L_2(\Omega)$.

Покажем теперь, что условие $\left(\widetilde{B}u,u\right)\geq(u,u)$ не ограничивает общности наших рассмотрений.

Пусть оно не выполнено. Сделаем замену искомой функции $v=ue^{-\mu t}$, где μ — некоторая константа, которую и выберем ниже. Новый вектор v удовлетворяет системе

$$v_t+\sum_{j=1}^{n}A^jv_{x_j}+Bv+\mu Ev=fe^{-\mu t}.$$

Константу $\mu>0$ выберем достаточно большой, чтобы для новой системы матрица

$$\widetilde{B}=2B+2\mu E-\sum_{j=1}^{n}A^j_{x_j}$$

удовлетворяла условию $\left(\widetilde{B}u,u\right)\geq(u,u)$.

Так как $v\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}=\psi(x)$, то энергетическое неравенство для v примет вид

$$\int_{G_\tau}\left(ue^{-\mu t},ue^{-\mu t}\right)dx\leq\int_G(\psi,\psi)\,dx+\int_{\Omega_\tau}\left(fe^{-\mu t},fe^{-\mu t}\right)dxdt$$

или

$$\int_{G_\tau} (u,u)dx \le e^{-\mu T}\Big[\int_G (\psi,\psi)dx + \int_{\Omega_\tau} (f,f)dxdt\Big].$$

Так как μ, при фиксированном T, зависит только от коэффициентов системы (3.1) и не зависит от правой части, то из этого неравенства сразу следуют теоремы о единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных и правой части (**корректность задачи Коши в классе классических решений**).

Приложение к Лекции 4.

Задачи

Леция V. Обобщенные функции. Основные свойства

Теперь ослабим условия гладкости решений (3.1). Для этого сформулируем необходимые в дальнейшем понятия и утверждения. Пусть $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций. Определим класс S функций Шварца: функция $u(x)$ принадлежит S, если выполнены условия:

1. $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. для любых мультииндексов α, β существует константа $M_{\alpha,\beta}$ такая, что

$$\left|x^\beta D^\alpha u\right| \le M_{\alpha,\beta}.$$

В классе S определено преобразование Фурье, переводящее S в S по формуле:

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x)dx.$$

Норму в S можно ввести следующим образом:

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le s} |D^\alpha u|^2\, dx, \qquad s = 0,1,2,\dots$$

(для функций $u(x) \in S$ такие интегралы абсолютно сходится).

Определение 0.6 *Пространством H_s называется пространство, полученное замыканием S по норме $\|u\|_s$.*

При $s = 0$ получим $H_0 = L_2(\mathbb{R}^n)$. Как задачу можно предложить следующие утверждения

Предложение 0.2 *Пусть последовательность $\{u_m(x)\}$, $u_m(x) \in S$, фундаментальна в норме $\|u\|_s$. Тогда из ограниченности $\|u_m\|_s$ следует существование у предельной функции обобщенных производных до порядка s включительно, суммируемых в квадрате.*

Предложение 0.3 *Пространство H_s содержит все функции, у которых существуют обобщенные производные до порядка s, суммируемые в квадрате.*

Теперь введем в H_s эквивалентную норму. Пусть $u, v \in S$, тогда из равенства Парсеваля

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} u\overline{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}}(\xi)d\xi.$$

Если положить $u = \overline{u}$, получим

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

где $\overline{v}-$ функцию, комплексно сопряженную к u. Для преобразования Фурье функции $u(x)$ справедлива формула $\widehat{D^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$. Поэтому $\|u\|_s$ можно записать в виде

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le s} \left|\widehat{D^\alpha u}\right|^2 d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le s} \xi^{2\alpha} \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

т.е. $\|u\|_s$ эквивалентна норме, задаваемой формулой:

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Приложение к Лекции 5.

Задачи

Лекция VI. Фундаментальные решения

Приложение к Лекции 6.

Задачи

Лекция VII. Теоремы вложения

Теорема 0.3 (Соболев) *Пусть $u \in H_{l+k}$ ($l, k \ge 0$ — целые). Тогда, если $2l > n$, то функция $u(x)$ имеет непрерывные производные во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ до порядка k включительно. Другими словами $H_{l+k} \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ при $n < 2l$.*

Более того если последовательность $\{u_m\}$, $u_m \in H_{l+k}$, сходится в норме пространства H_{l+k}, то она сходится и в норме пространства $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Здесь

$$\|u\|_{C^k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u| \Big).$$

Доказательство Для $u(x) \in S$ имеем

$$D^\alpha u = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{D^\alpha u} d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Отсюда

$$\sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u| = \sum_{|\alpha|\le k} (2\pi)^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi \right| \le (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le k} |\xi|^\alpha |\widehat{u}(\xi)| d\xi$$

$$\le C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{k/2} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi = C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{(k+l)/2} \left(1+|\xi|^2\right)^{-l/2} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi.$$

Здесь константа C_1 зависит только от k. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u| \le C_1 \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k+l} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi} \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-l}\, d\xi}.$$

Так как $2l > n$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-l} d\xi < \infty.$$

С учетом эквивалентности введенных в H_{l+k} норм имеем

$$\sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u(x)| \leq C\|u\|_{l+k}.$$

Эта оценка равномерна по $x \in \mathbb{R}^n$, поэтому для всех $u \in S$

$$\|u\|_{C^k} \leq C\,\|u\|_{l+k}\,. \tag{3.7}$$

Теперь пусть $u_m \in S$, $m = 1, 2, \ldots$, и $u_m \to u \in H_{l+k}$ в норме пространства H_{l+k}. Если мы докажем, что последовательность $\{u_m\}$ фундаментальна в норме $C^k(\mathbb{R}^n)$, то в силу полноты последнего пространства теорема будет полностью доказана. Из неравенства (3.7) следует, что

$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{C^k} \leq C\,\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{l+k}\,.$$

Последовательность $\{u_m\}$ фундаментальна в H_{l+k}, то есть $\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{l+k} \to 0$ при $m_1, m_2 \to \infty$. Поэтому $\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{C^k} \to 0$ при $m_1, m_2 \to \infty$. Значит, $\{u_m\}$ фундаментальна в $C^k(\mathbb{R}^n)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим оператор оганичения на многообразие $\Gamma \in R^n$ коразмерности 1. Нас будет интересовать простейший случай ограничения на плоскость $x_1 = 0$ (смешнная задача) или $t = 0$ (задача Коши).

Теорема 0.4 (Теорема о следе) *Для любого $s > 1/2$ оператор вложения*

$$H^s(R^n) \;\Rightarrow\; H^{s-1/2}(R^{n-1})$$

непрерывен, т.е.

$$||H^{s-1/2}(R^{n-1})|| \;\leq\; C_s\; ||u; H^s(R^n)||, \qquad\qquad \forall u \in\; H^s(R^n). \tag{71}$$

Постоянная C_s-не зависит от u.

Доказательство Рассмотрим случай $\Gamma = \{x_1 = 0\}$. В силу полноты простpнства Шварца S в H^s, достаточно доказать равномерность в S оценки (71). Пусть $u_j \to u$ в H^s, $u_j \in S$. По формуле связи частичного преобразования Фурье по x' ($x = (x_1, x')$) и полного преобразования Фурье для функций $u_j \in S$ имеем

$$\widehat{u_j}(x_1, \xi') = \int\; e^{ix_1\xi_1}\;\widetilde{u_j}(\xi_1, \xi')d\xi_1$$

Отсюда

$$\widehat{u_j}(0, \xi') = \int\;\widetilde{u_j}(\xi_1, \xi')d\xi_1$$

Таким образом, мы определили преобразование Фурье ограничения гладкой функции u_j на плоскость $x_1 = 0$. Отсюда, из формуле Гельдера, следует, что

$$|\widehat{u_j}(0, \xi')|^2 \leq\; \Big(\int\;(1 + |\xi|^2)^s|\widetilde{u_j}(\xi_1, \xi')|^2 d\xi_1\Big) \times \int\;\frac{d\xi_1}{(1 + |\xi|^2)^s}$$

Сделав замену $\xi_1 = (1 + |\xi'|^2)^{s/2}z$, получим

$$\int\;\frac{d\xi_1}{(1 + |\xi|^2)^s} = (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}\;\int\;\frac{dz}{(1 + z^2)^s}.$$

Очевидно, последний интеграл сходится тогда и только тогда, если

$$s >\; 1/2,$$

что определяет ограничения для s в теореме о следе. Отсюда следует, что

$$\int\;(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}|\widehat{u_j}(0, \xi')|^2 d\xi' \leq\; C_s^2\;\int\;(1 + |\xi|^2)^s|\widetilde{u_j}(\xi_1, \xi')|^2 d\xi_1 d\xi', \qquad C_s^2 = \int\;\frac{dz}{(1 + z^2)^s}.$$

По равенству Парсеваля

$$||u_j; H^{s-1/2}(R^{n-1})||^2 = \int (1+|\xi'|^2)^{s-1/2}|\widehat{u_j}(0,\xi')|^2 d\xi',$$

следовательно

$$||u_j; H^{s-1/2}(R^{n-1})|| \leq \ C_s \ ||u_j; H^s(R^n)||.$$

По непрерывности получим требуемый результат, что

$$||u; H^{s-1/2}(R^{n-1})|| \leq \ C_s \ ||u; H^s(R^n)||, \quad \forall u \in H^s(R^n).$$

Здесь уместо замечание, что и в теореме вложения. В каком смысле мв понимаем ограничение функции из H^s, т.е. регулярных распределений (функций из L_2). Понимать нужно в том смысле, что в классе смежности функции u из H^s найдется единственная гладкая функция, отличающаяся от u на мере нуль, ограничение которой на плоскость $x_1 = 0$ принадлежит классу смежности функции $u|_{x_1=0} \in H^{s-1/2}(R^n - 1)$.

Теперь докажем предкомпактность ограниченного множества H^{s_1} в H^{s_2} при $s_2+1 \leq \ s_1$. Непрерыверсть оператора вложение $H^{s_1}(R^n) \ \subset \ H^{s_2}(R^n)$ очевидно.

Теорема 0.5 (Теорема о компактности вложения) *Для любых $s_2+1 < s_1$ любое ограниченное множество $\mathcal{F}$ функций в H^{s_1}, носитель которых принадлежит ограниченному замкнутому множеству $\Omega \in R^n$ (т.е. $\mathcal{F} \in \overset{\circ}{H}{}^1 (\Omega)$) предкомпактно в H^{s_2}.*

Напомним, что компактность линейного оператора $A: \ E_1 \to E_2$, где E_j банаховы пространства, означает, что образ единичного шара $B_1 = \{x \in E_1, \ ||x||_{E_1} \leq 1\}$ является предкомпактным множеством в E_2. Предкомпактность множества F, лежащего в полном метрическом пространстве E, по определению означает, что оно вполне ограничено, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ имеет конечную $\varepsilon-$ сеть (конечное множество точек $x_1, \ldots, x_N \in E$, таких что для любой $x \in Q$ найдется индекс $k = k(x)$, что $\varrho(x, x_k) < \varepsilon$, где $\varrho-$ метрика E). Пусть $O_1(\Omega)$ 1-окрестность множества Ω. Рассмотрим пространство $C(O_1)$ непрерывных комплекснозначных функций на O_1. Пусть $\mathcal{F} \in C(O_1)$. Теорема Арцеля дает критерий предкомпактности $\mathcal{F}$. Множество $\mathcal{F}$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, т.е. $\sup |f(x)| \leq \ M, \ \forall f \in \mathcal{F}$ и что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x') - f(x")| \leq \ \varepsilon, \quad \forall x', x" \in \mathcal{F}$.

Отметим очевидное следствие общих фактоа о компактности. Если $Q \subset E$ полного метрического пространства E, то для предкомпактности Q достаточно чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало предкомпактное множество $Q_\varepsilon \in E$, что Q лежит в $\varepsilon-$ окрестности множества Q_ε. В самом деле, если взять конечную $\varepsilon/2$ сеть множества $Q_{\varepsilon/2}$, то она будет ε сетью для множества Q.

Доказательство Воспользуемся операцией усреднения. Положим

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{f_\varepsilon(x) = \int \omega_\varepsilon(y) f(x-y) dy.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу финитности $f \in \ L^1_{loc}(R^n)$. Отметим, что предкомпактность в $H^{s_2}(R^n)$ множества $\mathcal{F}$ равносильна предкомпактности в $L_2(R^n)$ всех множеств $\mathcal{F}_\alpha = \{\partial^\alpha_x f, \ f \in \mathcal{F}\}$, где $|\alpha| \leq \ s_2$.

Далее, из условия $f \in \overset{\circ}{H}{}^s (\Omega)$ следует, что $\partial^\alpha_x f \in \overset{\circ}{H}{}^{s-|\alpha|} (\Omega), \ |\alpha| \leq \ s$. Ввиду условия $s_1 > s_2$ ясно, что все множества $\mathcal{F}_\alpha$ принадлежат ограниченному подмножеству в $\overset{\circ}{H}{}^1 (\Omega)$. Поэтому достаточно проверить компактность вложения $\overset{\circ}{H}{}^1 (\Omega) \subset \ L_2(\omega)$.

Достаточно доказать эту теорему для $s_2 = 0, s_1 = 1$. Рассмотрим ограниченное множество $\mathcal{F} = \{u \in H^{s_1}(R^n), \ ||u; H^{s_1}|| \leq 1\}$. Мы докажем существование для любого $\delta > 0, \ \delta \ll 1$, конечного $\delta-$ покрытия этого $\mathcal{F}$ как подмножества в $H^{s_2}(R^n)$, что эквивалентно его предкомпактности в $H^{s_2}(R^n)$.

Прежде всего равномерно аппроксимируем это множество гладкими функциями. Для этого расмотрим множество

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{f_\varepsilon(x) = f * \omega_\varepsilon = < f(y), \omega_\varepsilon(x-y) >, \ f \in H^s\}, \quad \omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \ \omega(\frac{x}{\varepsilon}),$$

где через $< f, \dot{>}$ мы обозначили действие распределения $f \in H^s$ на тестовую функцию из S. Нетрудно видеть, что оператор сглаживания $f * \omega_\varepsilon$ перестановочен с оператором обобщенного дифференцирования. Действительно:

$$\Big(\partial_{x_j} f\Big)_\varepsilon = - < f(y), \partial_{y_j} \omega_\varepsilon(x-y) >=< f(y), \partial_{x_j} \omega_\varepsilon(x-y) >= \partial_{x_j} < f(y), \omega_\varepsilon(x-y) >= \partial_{x_j}\ f_\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $f_\varepsilon \in C_b^\infty(R^n)$ классу бесконечно-дифференцируемых ограниченных в R^n функций. Чтобы доказать, что $f_\varepsilon \in S$ требуется установить ограниченность в R^n функций $x^\alpha\ f_\varepsilon$. Достаточно проверить для $x^\alpha = x_j^{\alpha_j}$. Имеем:

$$x^\alpha\ f_\varepsilon = \sum_{r=0}^{\alpha_j} C_r^j\ < y^r f(y), (x-y)^{\alpha_j - r} \omega_\varepsilon(x-y) >= \sum_{r=0}^{\alpha_j}\ < y^r\, f(y), \omega_{\varepsilon,r}(x-y) >$$

где тестовые функции $\omega_{\varepsilon,r}(x) = C_r^j\ x^{\alpha_j - r}\omega_\varepsilon(x) \in S$. Функции $f \in \mathcal{F} \in L_2(R^n)-$ регулярные распределения,носитель которых принадлежит ограниченному замкнутому множеству $\Omega \in R^n$. Отсюда имеем, что

$$| < y^r\, f(y), \omega_{\varepsilon,r}(x-y) > | \leq\ ||y^r\, f(y); L_2(\Omega)||\ ||\omega_{\varepsilon,r}; L_2(R^n_))|| <\ \infty$$

Далее

$$|f_\varepsilon(x)| \leq\ \sqrt{|\Omega|}\ ||f, L_2(\Omega)||$$

где $|\Omega|-$ объем Ω. Таким образом, множество $\mathcal{F}_\varepsilon$ равномерно ограничено в R^n. Более того носитель $\operatorname{supp} f_\varepsilon\ \in\ O_\varepsilon(\Omega)$. Здесь $O_\varepsilon(\Omega), \varepsilon-$ окрестность множества Ω. Также доказывается равномерная ограниченность производных $\partial_x f_\varepsilon,\ f_\varepsilon \in \mathcal{F}_\varepsilon$.

$$|\partial_x f_\varepsilon(x)| = |(\partial_x f)_\varepsilon(x)| \leq\ \sqrt{|\Omega|}\ ||\partial_x f, L_2(\Omega)||$$

По теореме Арцеля множество $\mathcal{F}_\varepsilon$ предкомпактно в $C(O_\varepsilon(\Omega))$. Осталось проверить, что для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon(\delta)$, что $\mathcal{F}$ лежит в $\delta-$ окрестности $\mathcal{F}_\varepsilon$ в $L_2(R^n)$.

Для любой $f \in \mathcal{F}$ пусть последовательность $f_j \to f,\ f_j \in S$, в $H^1(R^n)$. Тогда $||f_j, H^1(R^n)|| \to ||f, H^1(R^n)||$ и

$$\frac{f_j}{s_j}\ \to\ f \quad \text{в} \quad H^1(R^n), \quad s_j = ||f_j, H^1(R^n)||$$

Очевидно

$$||\frac{f_j}{s_j}, H^1(R^n)|| \leq 1, \quad \frac{f_j}{s_j} \in S,$$

Если $f, g \in \mathcal{F},\ \ ||f-g, L_2(\Omega)|| \leq \delta$ то $||f_\varepsilon - g_v e, L_2(\Omega)|| \leq \delta$. Далее, для гладких $f \in S$ имеем

$$f - f_\varepsilon = \int\ [f(x) - f(x-y)]\omega_\varepsilon(y)dy = \int\ dy \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(x) - f(x-ty))\omega_\varepsilon(y)dt = \int\ dy \int_0^1 \sum_{j=1}^n y_j \partial_{x_j} f(x-ty))\omega_\varepsilon(y)dt$$

Отсюда получаем, что

$$||f - f_\varepsilon, L_2(O_\varepsilon(\Omega))|| \leq \int_0^1 dt \int\ \sum_{j=1}^n |y_j| \omega_\varepsilon(y)dy\ ||\partial_{x_j} f, L_2(R^n)|| \leq\leq\ ||f, H^1(R^n)||\ \int\ \sum_{j=1}^n |y_j| \omega_\varepsilon(y)dy \leq \delta lta\ ||f, H^1(R^n)|$$

Здесь $\delta = \sup_{x \in \omega_\varepsilon}\ \sum_{j=1}^n |y_j|$.

Теорема 0.6 (Эквивалентная форма дробного дифференцирования) *В* $H^s,\ |s| < 1$, *эквивалентны нормы*

$$||u; H^s||^2 = \int\ (1 + |\xi|^2)^s\ |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

$$\int\ \int\ \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{2s+n}} dxdy$$

Приложение к Лекции 7.

Задачи

Леция VIII. Априорная оценка

Как приложение результатов предыдущего параграфа получим априорную оценку H^k- решений (3.1), $k \geq 1$. Рассмотрим систему (3.1) R^{n+1}. Пусть $f(t,x)$ финитна в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $\psi(x)$ — финитна в $\mathbb{R}^n$. Пусть далее $f(t,x)$ имеет в Q_T производные с суммируемым квадратом до порядка k включительно, элементы матрицы B имеют ограниченные в Q_T производные до порядка k включительно, а элементы A^j имеют имеют ограниченные в Q_T производные до порядка $k+1$ включительно. Тогда справедлива оценка

$$\int_{G_\tau} \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha u)\, dx \leq C \Big[\int_G \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha u)\, dx$$

$$+ \int_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\alpha f)\, dxdt \Big], \tag{3.8}$$

где C зависит только от матриц A^j, B и их производных.

Докажем это для постоянных A^j, B. Применим D^α к системе (3.1) и обозначим $w = D^\alpha u$. Тогда

$$w_t + \sum_{j=1}^n A^j w_{x_j} + Bw = D^\alpha f$$

и из энергетического неравенства (3.6) для w получаем

$$\int_{G_\tau} (D^\alpha u, D^\alpha u)\, dx \leq C_1 \Big[\int_G (D^\alpha u, D^\alpha u)\, dx + \int_{\Omega_\tau} (D^\alpha f, D^\alpha f)\, dxdt \Big].$$

Суммируем по $|\alpha|$ от 0 до k, получаем искомую оценку.

Существование решения задачи Коши системы с постоянными коэффициентами

Теперь рассмотрим в полосе $Q_T = \{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$ систему (3.1) с постоянными коэффициентами

$$u_t + \sum_{j=1}^n A^j u_{x_j} + Bu = f(t,x), \tag{72}$$

где A^j, B — матрицы с постоянными элементами, A^j — симметрические, а B удовлетворяет условию $(Bu, u) \geq (u, u)$. Ищем решение задачи Коши с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \varphi \in S_x. \tag{3.9}$$

В дальнейшем мы исследуем две задачи:

I) $\qquad \mathcal{L}(u) = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x).$

II) $\qquad \mathcal{L}(u) = f, \qquad u\Big|_{t=0} = 0.$

Сумма их решений дает решение общей задачи (3.1), (3.9). Рассмотрим сначала случай $f \equiv 0$. Предположим существование решения $u(t,x) \in S_x$ для всех t. Применим к обеим частям равенства (3.1) в этом случае преобразование Фурье по x:

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(t,x) dx.$$

Тогда задача Коши (3.1), (3.2) примет вид:

$$\widehat{u}_t + \sum_{j=1}^{n} iA^j \xi_j \widehat{u} + B\widehat{u} = 0, \tag{3.10}$$

$$\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi). \tag{3.11}$$

Мы получили систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с параметрами $\xi_1, \dots, \xi_n$. Для такой системы задача Коши имеет решение. Таким образом в Q_T существует $\widehat{u}(t,\xi)$ — решение системы (3.10) с начальным условием (3.11). Рассмотрим интеграл

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{u}(t,\xi) d\xi. \tag{3.12}$$

Предложение 0.4 *Интеграл (3.12) дает решение задачи Коши I) для системы (3.1) с постоянными коэффициентами, с начальным условием (3.9).*

Выведем оценку для $|\widehat{u}(t,\xi)|$. Для этого запишем систему комплексно сопряженную к (3.1):

$$\overline{\widehat{u}}_t - \sum_{j=1}^{n} iA^j \xi_j \overline{\widehat{u}} + B\overline{\widehat{u}} = 0. \tag{3.13}$$

Умножим систему (3.10) на вектор $\overline{\widehat{u}}$, а (3.13) на $\widehat{u}$ и сложим их с учетом того, что

$$\widehat{u}_t \overline{\widehat{u}} + \overline{\widehat{u}}_t \widehat{u} = |\widehat{u}|^2_t, \qquad \left(iA^j \xi_j \widehat{u}, \overline{\widehat{u}}\right) = \left(\widehat{u}, iA^j \xi_j \overline{\widehat{u}}\right).$$

Получим

$$|\widehat{u}|^2_t + \left(B\widehat{u}, \overline{\widehat{u}}\right) + \left(B\overline{\widehat{u}}, \widehat{u}\right) = 0. \tag{3.14}$$

Здесь выражения $\left(B\widehat{u}, \overline{\widehat{u}}\right)$ и $\left(B\overline{\widehat{u}}, \widehat{u}\right)$ представляют собой билинейные формы относительно $\widehat{u}$ и $\overline{\widehat{u}}$. Поэтому из (3.14) следует оценка $|\widehat{u}|^2_t \le M \cdot |\widehat{u}|^2$. Обозначим $v = |\widehat{u}|^2$. Тогда $v_t \le Mv$. Умножим последнее неравенство на e^{-Mt}. Получим

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Mt} v\right) \le 0.$$

Интегрируя это неравенство по t от нуля до t, получаем $e^{-Mt}v(t) - v(0) \le 0$. Отсюда $v(t) \le e^{Mt}v(0)$. Это означает, что

$$|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \le e^{MT}\left(|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\right), \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.15}$$

Теперь оценим старшие производные функции (3.12). Покажем, что

$$\widehat{u}(t,\xi) \in S \quad \forall\, t \in [0,T],$$

т.е. для любого полинома $P(\xi)$ и любого α

$$|P(\xi) D^\alpha \widehat{u}| \le M_{P,\alpha} = \text{const}\,. \tag{3.17}$$

Умножая (3.15) на любой полином и, учитывая, что $\widehat{\varphi}_0 \in S$ получим оценку (3.17) при $\alpha = 0$. Теперь заметим, что систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно дифференцировать по параметру ξ (т.к. решение гладко зависит от параметра). Получим аналогичную систему для совокупности $D^\alpha \widehat{u} = v_\alpha$, $|\alpha| \le M$ (изменится только B) и $v_\alpha(0,\xi) = D^\alpha \widehat{\varphi}_0(\xi)$. Поэтому

$$\sum_{|\alpha| \le M} |v_\alpha| < C_M \sum_{|\alpha| \le M} |D^\alpha \widehat{\varphi}_0(\xi)|\,,$$

откуда и следует (3.17) для $|\alpha| > 0$.

Таким образом, интеграл

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}\widehat{u}(t,\xi)d\xi$$

сходится и определяет некоторую функцию $u(t,x)\in S$. Проверим, что $u(t,x)$ дает решение задачи I). Заметим, что

$$D^\alpha u(t,x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}(i\xi)^\alpha\widehat{u}(t,\xi)d\xi$$

в силу равномерной сходимости интеграла. Функцию $u(t,x)$ можно тоже дифференцировать по t под знаком интеграла, так как $\widehat{u}_t(t,\xi)$ из (3.13) линейно выражается через $\widehat{u}$ с коэффициентами, зависящими от ξ_j. Подставим $u(t,x)$ в систему I), получим, что $u(t,x)$ есть решение I).

Чтобы построить решение $u \in H^k$ из пространст Соболева, сначала получим равномерные оценки решений $u(t,x)\in S$, построенных выше. Из равенства Парсеваля, в силу неравенства (3.16), следует

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^2\,dx \le C\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_0|^2 dx.$$

Далее, из $\widehat{D^\alpha u} = (i\xi)^\alpha\widehat{u}(\xi)$ и (3.15) получаем, что

$$|(i\xi)^\alpha|^2\,|\widehat{u}(\xi)|^2 \le |(i\xi)^\alpha|^2\,|\widehat{\varphi}(\xi)|^2,$$

откуда из равенства Парсеваля также получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le M}|D_x^\alpha u|^2\,dx \le C\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le M}|D_x^\alpha\varphi|^2\,dx \tag{3.17}$$

Решим теперь задачу I) если $\varphi_0\in H_m$. В пространстве H_m введена норма

$$\|u\|_m^2 = \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le M}|D^\alpha u|^2\,dx.$$

Если $\varphi_0 \in H_m$, то это означает, что существует последовательность $\varphi_0^k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi_0$ в норме H_m и $\varphi_0^k\in S$ для любых $k=1,2,\dots$ Для начальных условий $u\big|_{t=0}=\varphi_0^k$, $k=1,2,\dots$, мы уже построили решение $u^k(t,x)$ задачи Коши (3.1), (3.9). Покажем, что

Лемма 0.3 *Решения $u^k\to u$ задачи Коши (3.1), (3.9) ($u^k(0,x)=\varphi_0^k$) при $k\to\infty$ в норме H_m равномерно по t. Предельная функция u является решением задачи I) с начальной функцией φ_0.*

Последовательность φ_0^k фундаментальна в H_m. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le M}\left|D^\alpha\varphi_0^k - D^\alpha\varphi_0^l\right|dx = \left\|\varphi_0^k-\varphi_0^l\right\|_m^2 \to 0, \qquad \text{при} \quad k,l\to\infty.$$

Из неравенства (3.17) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le M}\left|D^\alpha u^k - D^\alpha u^l\right|dx \le C\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le M}\left|D^\alpha\varphi_0^k - D^\alpha\varphi_0^l\right|dx,$$

или

$$\left\|u^k-u^l\right\|_m \le C\left\|\varphi_0^k-\varphi_0^l\right\|_m$$

для любого t. значит, последовательность u^k фундаментальна в H_m, причем сходимость равномерна по t. Воспользуемся теоремой вложения: если $u\in H_{s+r}$ и $2r>n$, то $u\in C^s(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если последовательность u_m сходится в H_{s+r}, то она сходится в $C^s(\mathbb{R}^n)$. Было доказано, что

$$\|u\|_{C^s} \le M\,\|u\|_{H_{s+r}}.$$

Представим $m=s+r$ и предположим, что $s\ge 0$ и $2r>n$. Тогда

$$\left\|u^k-u^l\right\|_{C^s} \le \widetilde{C}\left\|u^k-u^l\right\|_m \le C\left\|\varphi_0^k-\varphi_0^l\right\|_m.$$

это означает, что $u^k \to u$ равномерно по t, x вместе со всеми производными по x до s-того порядка включительно. Функции $u^k(t,x)$ и производные по x до порядка s включительно от $u^k(t,x)$ сходятся равномерно по t и x, но производные по t от $u^k(t,x)$ выражаются через производные по x из системы I) и систем, полученных из нее дифференцированием по t и x. Поэтому, любые производные по t, x до порядка s включительно от $u^k(t,x)$ сходятся равномерно в $\mathbb{R}^{n+1}$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в системе I), получим, что предельная функция $u \in C^s$, $s \geq 1$, есть решение системы I) с начальным условием $u\big|_{t=0} = \varphi_0$, $\varphi_0 \in H_m$. Для того чтобы $s \geq 1$, нужно брать $m \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$.

Пример Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad \Delta u = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}.$$

Задача Коши:

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \tag{3.18}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0, \quad u_t\Big|_{t=0} = \varphi_1.$$

сводится к задаче Коши для симметрической системы первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим вектор-функцию $(u, u_t, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, число компонент $N = n + 2$. Переобозначим их следующим образом $\left(u, u^0, u^1, \ldots, u^n\right)$. Решение задачи Коши (3.18) очевидно удовлетворяет системе

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u^0 = 0 \\ u^0_t - \sum_{j=1}^n u^j_{x_j} = 0 \\ u^j_t - u^0_{x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array} \right. \tag{3.19}$$

с начальными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} u\Big|_{t=0} = \varphi_0 \\ u^0\Big|_{t=0} = \varphi_1 \\ u^j\Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}. \end{array} \right. \tag{73}$$

Итак, решение задачи Коши для волнового уравнения является решением задачи Коши для симметричной системы. Обратно, пусть имеется решение задачи Коши (3.19). Покажем, что u есть решение волнового уравнения с условиями (3.18). Для этого нужно доказать, что

$$u^j = u_{x_j}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Последние n уравнений системы можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u^j - u_{x_j}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $u^j - u_{x_j}$ не зависит от t. Но при $t = 0$ имеем $u^j = u_{x_j}$. Значит, это верно и для любого t.

Принцип Дюамеля Рассмотрим теперь задачу II)

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \sum_{j=1}^n A^j u_{x_j} + Bu = f(t,x), \\ u\Big|_{t=0} = 0. \end{array} \right. ,$$

для системы с постоянными коэффициентами. Решение этой задачи получим с помощью интеграла Дюамеля. Для этого рассмотрим решение $v(t,x,\tau)$ задачи I) вида

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + \sum_{j=1}^n A^j u_{x_j} + Bu = 0 \\ u\Big|_{t=\tau} = f(\tau, x). \end{array} \right.$$

Будем предполагать, что

1. $f \in C^\infty(Q)$,

2. $f \in S_x$ для любого t, причем постоянные не зависят от t.

Здесь $Q = \{0 \le t \le T; x \in \mathbb{R}^n\}$. Мы показали, что $v(t,x,\tau)$ — бесконечно дифференцируемая функция t и x. Рассмотрим интеграл Дюамеля

$$u(t,x) = \int_0^t v(t,x,\tau)d\tau.$$

Докажем, что этот интеграл дает решение задачи II.

Легко видеть, что $u\big|_{t=0} = 0$. Далее, из представления $v(t,x,\tau)$ с помощью интеграла Фурье, учитывая свойства функции $f(t,x)$ выводим, что $v(t,x,\tau)$, $v_t(t,x,\tau)$ и $v_{x_j}(t,x,\tau)$ непрерывно зависят от τ. Далее имеем

$$u_t(t,x) = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t} d\tau + v(t,x,t).$$

Так как $v(\tau,x,\tau) = f(\tau,x)$, то

$$u_t(t,x) = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t} d\tau + f(t,x), \qquad u_{x_j}(t,x) = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x_j} d\tau.$$

Следовательно,

$$u_t + \sum_{j=1}^n A^j u_{x_j} + Bu = \int_0^t \Big(v_t + \sum_{j=1}^n A^j v_{x_j} + Bv \Big) d\tau + f(t,x) = f(t,x),$$

так как

$$v_t + \sum_{j=1}^n A^j v_{x_j} + Bv = 0.$$

Приложение к Лекции 8.

Задачи

1. Докажите, что полученное решение задачи II является бесконечно дифференцируемой функцией от x и t. Какую гладкость имеет решение задачи II, если $f(t,x)$ имеет лишь конечное число производных по t?

2. Доказать, что для любого гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами задача Коши сводится к задаче Коши для симметрической системы первого порядка.

Лекция IX. Классическое решение задачи Коши для волнового уравнения

Плоские, поверхностные и цилиндрические волны Плоской волной называется решение уравнения

$$\partial_t^2 u = a^2 \Box\, u, \qquad \Box = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2, \tag{74}$$

которое при фиксированном t постоянно на каждой плоскости, параллельной некоторой заданной плоскости. Поворотом в $x-$ пространстве легко добиться того, чтобы рассматриваемое семейство плоскостей имело вид $x_1 = \text{const}$. Тогда плоская волна–это решение уравнения (121), зависящее лишь от t и x_1. Но тогда оно является решением одномерного волнового уравнения

$$\partial_t^2 u = a^2 \partial_x^2 u,$$

т.е. имеет вид

$$u(t,x) = f(x_1 - at) + g(x_1 - at),$$

с любыми произвольными функциями f, g. До поворота каждое слагаемое имело очевидно вид $f(k\dot{}x - at),\ k \in\ R, |k| = 1$. Чтобы сделать аргумент функции f безразмерной величиной в физике и механике используется другой способ записи $f(k\dot{}x - \omega\, t)$, где k уже не единичный вектор. Если t измеряется в секундах, x в метрахб то ω-в 1/сек, а k в 1/м. Подставляя решение типа плоской волны в (121) получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - a^2|k|^2 = 0$$

Ясно, что скорость движения фронта плоской воны $f(k\dot{}x - at)$(т.е. плоскости, где f имеет данное значение) равна $a = \omega/|k|$. Уравнение такого фронта $k\dot{}x - at = \mathrm{const}$. Важный пример плоской волны $e^{i(k\dot{}x - at)}$. В этом случае каждая фиксированная точка x совершает синусоидальные колебания с частотой ω, а при фиксированном t волна синусоидально зависит от $k\dot{}x$, так что происходит синусоидальное изменение по направлению вектора k со скоростью $|k|$. Вектор k называют волновым вектором

Далее будем считать, что размерность $n = 3$ и изучим сферические волны–решения (121), зависящие только от t и $r = |x|$, т.е. $u = u(t, r)$:

$$\frac{1}{a^2}\partial_t^2 u = \partial_r^2 u + \frac{2}{r}\ \partial_r u \tag{75}$$

Если умножить на r, получим

$$\frac{1}{a^2}\partial_t^2(ru) = \partial_r^2(ru),$$

откуда опять получим $ru = f(r - at) + g(r + at)$, т.е.

$$u(t, r) = \frac{f(r - at)}{r} + \frac{g(r + at)}{r}.$$

Это общий вид сферической волны. Волна $\frac{f(r-at)}{r}$ расходится от точки $0 \in\ R^3$, волна же $\frac{g(r-at)}{r}$ наоборот, сходится к ней. В электродинамике обычно рассматривают вону, расходящуюся от источника. Фронтом расходящейся от источника волны естественно считать сферу $r - at = \mathrm{const}$. Скорость распространения фронта попрежнему a.

Что такое–цилиндрическая волна? Это решения, зависящие от t и рассиояния до оси x_3, т.е. $u = u(t, \varrho),\ \ \varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$–решение уравнения для $n = 2$. Однако его удобно считать решением для $n = 3$, независящим от x_3. Один из способов построения цилиндрической волны–взять суперпозицию одинаковых сферических волн, расходящихся из всех точек оси x_3 (или к ней сходящихся). Пусть e_3 единичный вектор, направленный по оси x_3. Тогда цилиндрическая волна

$$v(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(|x - ze_3| - at)}{|x - ze_3|}dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(|x - ze_3| - at)}{|x - ze_3|}dz \tag{76}$$

Положим

$$r = |x - ze_3| = \sqrt{\varrho^2 + (x_3 - z)^2}, \quad \varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Ясно что $v(x, t)$ не зависит от x_3 и зависит лишь от (t, ϱ). Можно считать, что $x_3 = 0$(сдвиг по z). Тогда под знаком интегралов стоят четные функции от z и интеграл достаточно сосчитать от 0 до $+\infty$. Введем r в качестве переменной интегрирования вместо z, тогда

$$dr = \frac{z}{r}dz, \quad dz = \frac{r}{z}dr = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}dr$$

$$v(t, \varrho) = 2\int_0^\infty \frac{f(r - at)}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}dr + 2\int_0^\infty \frac{g(r + at)}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}dr$$

или

$$v(t, \varrho) = 2\int_{\varrho - at}^\infty \frac{f(\xi)}{\sqrt{(\xi + at)^2 - \varrho^2}}dr + 2\int_0^\infty \frac{g(\xi)}{\sqrt{(\xi - at)^2 - \varrho^2}}dr$$

Интегралы сходятся, если

$$\int_M^\infty \frac{|f(\xi)|}{|\xi|}d\xi < \infty, \quad \int_M^\infty \frac{|g(\xi)|}{|\xi|}d\xi < \infty, \quad M > 0.$$

Другой способ получения цилиндрической волны–искать ее в виде $v(\varrho,t) = e^{i\omega\ t}f(\varrho)$. Тогда f-решение уравнения

$$f'' + \frac{1}{\varrho}\ f' + k^2 f = 0, \quad k = \frac{\omega}{a}.$$

Теперь можно взять суперпозицию таких монохроматических волн, интегрируя пл ω.

Сферические волны от мгновенной вспышки. Рассмотрим обощенную расходящуюся волну

$$\frac{\delta(r-at)}{r} = \frac{\delta(r-at)}{at}, \quad r = |x|,$$

(ее можно считать обобщенной функцией по x, зависящей от параметра t), которую определим как слабый предел

$$\frac{\delta(r-at)}{r} = \lim_{j\to\infty}\frac{f_j(r-at)}{r}$$

где f_j- δ образная последовательность ($f_j(s) \in C_0^\infty(R^1)$, $f_j \geq =, f_j = 0\ forall|s| \geq 1/k$, и $\int\ f_j ds = 1$. Имеем

$$< f_j(r-at), \varphi >= \int_{R^3} f(|x|-at)\varphi(x)dx = \int_0^\infty\ f_j(r-at)\Big(\int_{|x|=r}\varphi(x)dS_r\Big)dr,$$

где dS_r элемент площади поверхности сферы радиуса r. Ясно что интеграл $\int_{|x|=r}\varphi(x)dS_r$ является c^∞ функцией от $r,\ r > 0$. Поскольку $\lim_{j\to\infty} f_j(s) = \delta(s)$, то

$$< \delta(r-at), \varphi >= \lim_{j\to\infty} < f_j(r-at)\varphi >= \int_{|x|=r}\varphi(x)dS_r = \lim_{j\to\infty} < f_j(r-at)\varphi >= \int_{|x|=r}\varphi(x)dS_{at}$$

Если перейти к интегрированию по единичной сфере, получим

$$< \delta(r-at), \varphi >= a^2t^2\ \int_{|x|=1}\varphi(at\ x')dS_1.$$

Отсюда

$$< \frac{\delta(r-at)}{r}, \varphi >= a\ t\ \int_{|x|=1}\varphi(at\ x')dS_1. \tag{77}$$

Полезно изучить зависимость от параметра t. Очевидно $\frac{\delta(r-at)}{r} = 0,\ t < 0$ и, по непрерывности (см. (77))

$$\frac{\delta(r-at)}{r}|_{t=0} = 0.$$

Наконец из (77)следует C^∞ этой обобщенной функции по t:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta(r-at)}{r}, \varphi >= \frac{d}{dt} < \frac{\delta(r-at)}{r}, \varphi >= a\int_{|x'|=1}\varphi(atx')dS_1 + a^2t\sum_{j=1}^{3}\int_{|x'|=1}\ x_j\partial_{x_j}\varphi * atx'dS_1.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{lin}_{t\to+0}\partial_t\Big(\frac{\delta(r-at)}{r}\Big) = 4\pi\, a\delta(x).$$

Формула Кирхгофа По произвольной функции $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ построим функцию $M_g(t,x)$, $t > 0$, по следующему правилу:

$$M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at} g(\xi)dS_\xi, \tag{78}$$

dS_ξ — элемент площади на сфере радиуса at (с центром в x). Или, делая замену переменных в (78) $\xi = x + at\eta$, $dS_\xi = (at)^2 dS_\eta$, где dS_η — элемент площади на единичной сфере (с центром в 0), получаем другой вид оператора $M_g(t,x)$:

$$M_g(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\eta|=1} g(x+at\eta)dS_\eta, \tag{79}$$

Из этого представления в частности видно, что гладкость функции $M_g(t,x)$ совпадает с гладкостью функции $g(x)$.

Предложение 0.5 *Для любой функции* $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ *имеем:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_g(t,x) = a^2 \Delta M_g(t,x), \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{80}$$

$$M_g(t,x)\Big|_{t=0} = 0, \tag{81}$$

$$\frac{\partial M_g(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x). \tag{82}$$

Доказательство. Начальное условие (81) — очевидное следствие (79).

Из (79) также находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} g(x+at\eta) dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} (\nabla g(x+at\eta), a\eta)\, dS_\eta. \tag{83}$$

Учитывая то, что $g(x)$ — гладкая функция, имеем

$$\frac{\partial M_g(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} g(x) dS_\eta = g(x),$$

и начальное условие (82) также имеет место.

Для доказательства (80) преобразуем равенство (83) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_g(t,x) &= \frac{M_g}{t} + \frac{at}{4\pi} \int_{|\eta|=1} (\nabla g(x+at\eta), \eta)\, dS_\eta \\ &= \frac{M_g}{t} + \frac{1}{4\pi a t} \int_{|\xi - x|=at} (\nabla g(\xi), \eta)\, dS_\xi = \frac{M_g}{t} + \frac{1}{4\pi a t} \int_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{84}$$

Здесь мы вновь вернулись к переменным $\xi = x + at\eta$, а затем поток векторного поля $\nabla g(\xi)$ через поверхность сферы $|\xi - x| = at$ (η — в точности вектор единичной нормали к этой сфере) преобразовали, в соответствием с формулой Гаусса–Остроградского, к интегралу от дивергенции $\operatorname{div}(\nabla g(\xi)) = \Delta g(\xi)$ по шару $|\xi - x| < at$. Далее, дифференцируя (84) по t еще раз, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi a t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi) d\xi \right), \tag{85}$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M_g}{t}\right) &= \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t} M_g - \frac{M_g}{t^2} = \frac{M_g}{t^2} + \frac{1}{4\pi a t^2} \int_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi) d\xi - \frac{M_g}{t^2} \\ &= \frac{1}{4\pi a t^2} \int_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi) d\xi; \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a t} \int_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi) d\xi \right) &= -\frac{1}{4\pi a t^2} \int_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi) d\xi + \frac{1}{4\pi a t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Производная в правой части (85) легко считается, если перейти к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi) d\xi \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{at} \int_{|\eta|=1} \Delta g(x+r\eta) r^2 dS_\eta dr \right) = a \int_{|\eta|=1} \Delta g(x+at\eta)(at)^2 dS_\eta \\ &= a(at)^2 \int_{|\eta|=1} \Delta g(x+at\eta) dS_\eta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_g(t,x) = \frac{a^2 t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \Delta g(x+at\eta) dS_\eta.$$

С другой стороны, из (79) имеем:

$$\Delta M_g(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\eta|=1} \Delta g(x+at\eta)dS_\eta,$$

и (80) доказано.

Теорема 0.7 *Пусть* $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Тогда решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(t,x), & t>0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{86}$$

задается формулой Кирхгофа

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x), \tag{87}$$

где оператор M *определен в* (78)–(79).

Доказательство. Действительно, как доказано в Предложении 0.5, функция $u^{II}(t,x) \equiv M_\psi(t,x)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt}^{II} = a^2\Delta u^{II}(t,x), \qquad u^{II}\Big|_{t=0} = 0, \qquad u_t^{II}\Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{88}$$

Покажем, что функция $u^I(t,x) \equiv \partial M_\varphi(t,x)/\partial t$ является решением следующей задачи:

$$u_{tt}^{I} = a^2\Delta u^{I}(t,x), \qquad u^{I}\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t^{II}\big|_{t=0} = 0. \tag{89}$$

Действительно, так как $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, то $M_\varphi(t,x) \in C^3(R_+ \times \mathbb{R}^3)$, и поскольку функция $M_\varphi(t,x)$ удовлетворяет волновому уравнению, то и u^I, как производная $M_\varphi(t,x)$, также удовлетворяют этому уравнению. В силу (82) получаем

$$u^I\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

а ввиду (80) и (81) имеем:

$$\frac{\partial u^I}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = a^2\Delta M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = 0.$$

Из (88) и (89) следует, что функция $u(t,x) = u^I(t,x) + u^{II}(t,x)$ удовлетворяет (86).

Метод спуска. Решение задачи Коши в случае $n=2$. Формула Пуассона

Решим теперь задачу Коши в случае двух пространственных переменных, то есть $x \in \mathbb{R}^2$. Здравый смысл подсказывает, что, уменьшив количество переменных, мы не должны получить более сложную задачу. И дело действительно обстоит так. Метод, позволяющий свести задачу меньшей размерности к задаче большей размерности, называется *метод спуска*. Изложим его.

Пусть $u(t,x) = u(t,x_1,x_2,x_3)$ — решение трехмерной по пространственным переменным задачи Коши (86) для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right),$$

и пусть начальные функции φ и ψ не зависят от третьей пространственной переменной x_3, то есть $\varphi = \varphi(x_1,x_2)$, $\psi = \psi(x_1,x_2)$. Заметим, что решение этой задачи мы знаем, и оно задается формулой Кирхгофа (87), где интегрирование функций φ и ψ идет по сферам в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Сделаем сдвиг по оси x_3 на произвольное число $x_3^0 \in \mathbb{R}$. С одной стороны, функция $u(t,x)$ перейдет в $\tilde{u}(t,x) = u(t,x_1,x_2,x_3+x_3^0)$. С другой стороны, уравнение теплопроводности от сдвига по одной из осей не меняется, как и не меняются при сдвиге по оси x_3 начальные условия φ и ψ.

Это означает, что $\tilde{u}(t,x)$ является решением той же самой задачи Коши (86), что и функция $u(t,x)$. В силу единственности решения этой задачи, $\tilde{u}(t,x) \equiv u(t,x)$, то есть

$$u(t,x_1,x_2,x_3+x_3^0) = u(t,x_1,x_2,x_3) \qquad \forall x_3^0 \in \mathbb{R}.$$

Последнее в точности означает, что функция $u(t,x)$ не зависит от x_3; $u = u(t,x_1,x_2)$. Значит, $\partial^2 u/\partial x_3^2 = 0$, и функция $u(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right).$$

Таким образом мы получаем, что функция $u(t,x)$, задаваемая формулой Кирхгофа (87), является и решением двумерной по пространственным переменным задачи Коши (86) для уравнения теплопроводности, если начальные функции $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ считать заданными в $\mathbb{R}^3$, но не зависящими от x_3. Правда, в этом случае интегрирование по сфере в $\mathbb{R}^3$, через которое задаются M_φ и M_ψ (см. (78)), разумно свести к интегрированию по пространству $\mathbb{R}^2$. Проделаем это сведение.

Сфера радиуса R с центром в точке $x = (x_1,x_2,x_3)$ проецируется в круг того же радиуса с центром в (x_1,x_2). Элемент площади на сфере dS и элемент площади на круге $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$ связаны соотношением $d\xi = dS\cos\gamma$, где γ — угол между плоскостью, касательной к сфере, и плоскостью (x_1,x_2), или, что то же самое, угол между нормалью к сфере и осью x_3 (являющейся нормалью к плоскости (x_1,x_2)). Легко видеть, что $\sin\gamma$ равен отношению проекции радиуса сферы на плоскость (x_1,x_2) к самому радиусу R, то есть

$$\sin\gamma = \frac{|\xi - x|}{R} = \frac{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2}}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{R^2-|\xi-x|^2}}{R}.$$

Еще учтем, что $R = at$, а также то, что в каждую точку круга проецируются две точки сферы (с “верхней” и “нижней” половинок), и получаем окончательно, что формула (78) переписывается в двумерном случае так:

$$M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|\le at} g(\xi)\frac{2d\xi_1 d\xi_2}{\cos\gamma} = \frac{2at}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|\le at}\frac{g(\xi)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(at)^2-|\xi-x|^2}}.$$

Окончательно имеем

$$M_g(t,x) = \frac{1}{2\pi a}\int_{|\xi-x|\le at}\frac{g(\xi)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(at)^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}. \tag{90}$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 0.8 *Пусть $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Тогда решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(t,x), & t>0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

задается формулой Пуассона

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x),$$

где оператор M определен в (90).

Формула Даламбера для уравнения струны Естественно, из трехмерного пространства можно “спуститься” не только в двумерное, но и в одномерное пространство, получив *формулу Даламбера* (см. (94) ниже) решения задачи Коши для уравнения струны (напомним, что уравнение струны — это есть одномерное по пространственным переменным волновое уравнение). Сразу оговоримся, что эту формулу легко получить элементарными методами (перейдя к характеристикам и найдя общее решение уравнения струны), да и классическое решение задачи Коши выражается формулой Даламбера не только для начальных условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространств $C^3(\mathbb{R})$ и $C^2(\mathbb{R})$ соответственно (как в трехмерном и двумерном случаях), а при $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, что легко проверяется непосредственным вычислением. Тем не менее, проделаем вывод формулы Даламбера из формулы Кирхгофа все тем же методом спуска.

Итак, как и в предыдущем разделе, мы рассмотрим решение $u(t,x)$ — решение задачи Коши для волнового уравнения в случае, когда $x \in \mathbb{R}^3$, но начальные функции зависят только от одной переменной x_1: $\varphi = \varphi(x_1)$, $\psi = \psi(x_1)$. Тогда задача не меняется при сдвигах по осям x_2 и x_3, и в силу единственности решения, функция $u(t,x)$ также не меняется при этих сдвигах, то есть $u = u(t,x_1)$. Значит, вторые производные решения по x_2 и x_3 равны 0, и $u(t,x_1)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \qquad u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1), \qquad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x_1). \tag{91}$$

Остается только свести интегрирование по сфере в формуле (78) к интегрированию по отрезку $[x_1 - at, x_1 + at]$, который является проекцией этой сферы на ось x_1.

В элемент длины $d\xi_1$ на этом отрезке проецируется сферический слой. Площадь dS этого слоя в $1/\cos\gamma$ раз больше, чем $2\pi r d\xi_1$ — площадь боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, где γ — угол между нормалями к слою и цилиндру (γ — тот же угол, что и в предыдущем разделе). Здесь $r = R\cos\gamma$ — радиус основания слоя и цилиндра, $d\xi_1$ — их высота, $R = at$ — радиус сферы. Итак,

$$dS = \frac{2\pi r d\xi_1}{\cos\gamma} = 2\pi R d\xi_1 = 2\pi a t d\xi_1. \tag{92}$$

Замечание 0.1 *Формула площади сферического слоя $S = 2\pi R h$, которая получается из (92) интегрированием по ξ_1, есть в любом математическом справочнике. Отметим, что эта площадь зависит только от радиуса сферы R и высоты слоя h, и не зависит от того, где этот слой находится на сфере — "посередине" или "с краю". Это означает, что нарезав тонкокожий апельсин "кружочками" одинаковой толщины, в каждом кусочке получаем одинаковое количество кожуры, тогда как мякоти, как мы понимаем, больше в средних дольках, нежели чем в крайних.*

В частном случае $h = 2R$, имеем всем известную формулу площади полной поверхности сферы $S = 4\pi R^2$.

Подставляя (92) в (78), имеем

$$M_g(t,x_1) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{x_1-at}^{x_1+at} g(\xi_1)\cdot 2\pi a t d\xi_1 = \frac{1}{2a}\int_{x_1-at}^{x_1+at} g(\xi_1) d\xi_1. \tag{93}$$

Заметим, что в рассматриваемом одномерном случае

$$\frac{\partial}{\partial t} M_g(t,x_1) = \frac{1}{2a}\left(a g(x_1+at) - (-a) g(x_1-at)\right) = \frac{g(x_1-at)+g(x_1+at)}{2}.$$

Следовательно, решением задачи Коши (91) является следующая функция $u(t,x)$ (уже не нужный индекс $_1$ опускаем):

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \tag{94}$$

Это и есть *формула Даламбера.*

Приложение к Лекции 9.

Задачи

1. Решение уравнения

$$\partial_t^2 u - 4\partial_x^2 u, \quad (x,t) \in R^2,$$

a) Равно нулю в прямоугольнике $R = \{|x| \le 1,\ |t| \le 2\}$. Где еще решение определено однозначно? (1б.)

b) Равно нулю вне прямоугольника R. Где оно обязательно равно нулю?

Лекция X. Качественное исследование формул Кирхгофа, Пуассона, Даламбера.

Уже отмечалось, что (см. Замечание **??**) значение решения $u(t,x)$ задачи Коши (**??**) для волнового уравнения в некоторой точке (t_0, x_0), $t_0 > 0$, в пространстве *любой* размерности зависит от значения начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ только на основании характеристического конуса, то есть на шаре (или же круге в $\mathbb{R}^2$, или отрезке в $\mathbb{R}^1$) $|x - x_0| \leq at_0$. Это же видно и из формулы Пуассона, где интегрирование в (90) идет как раз по этому кругу. Что же касается формулы Кирхгофа, то там, как мы видим из (78), нам важны значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ только в окрестности границы шара $|x-x_0| \leq at_0$, т. е. сферы $|x-x_0| = at_0$. Точнее, для нахождения значения $u(t_0, x_0)$, нам нужно знать значение начальной скорости $\psi(x)$ на этой сфере, а также значения на ней начального смещения $\varphi(x)$ и его производных (так как $M_\varphi(t,x)$ входит в решение через его частную производную по t). Это, на первый взгляд небольшое, различие между формулами Кирхгофа и Пуассона, заключающееся в разных знаках ("$=$" и "$\leq$" соответственно) в определении множества, по которому идет интегрирование, приводит к качественно различным эффектам в процессе распространения волн в пространствах разной размерности.

Важной характеристикой распространения волн является так называемое *множество зависимости* решения от начальных условий. Поясним, что это такое. Предположим, что мы знаем решение $u(t,x)$ задачи Коши для волнового уравнения с некими начальными данными $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Изменим теперь начальные данные, но не на всем пространстве, а лишь на каком-то (например, ограниченном) множестве B, то есть рассмотрим задачу Коши для нашего уравнения с другими начальными данными, $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, причем $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ и $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ при $x \notin B$. Решение этой новой задачи обозначим $\tilde{u}(t,x)$. Возникает вопрос: где решение не изменилось? Точнее, в каких точках $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ мы можем заведомо утверждать, что $u(t,x) = \tilde{u}(t,x)$? Так вот, множество тех точек (t,x), где решение *может измениться* при изменении начальных условий только на неком множестве B и называется *множеством зависимости* решения от значения начальных условий на B.

В силу линейности задачи, можно считать, что $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$, и, соответственно, решение $u(t,x)$ — также нулевое, $u(t,x) \equiv 0$. Положим $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\psi}(x) = 0$ при $x \notin B$, и попытаемся ответить на вопрос: где заведомо $\tilde{u}(t,x) = 0$, а в каких точках мы этого утверждать не можем? Ответ, оказывается, зависит от количества пространственных переменных ($n = 1, 2$ или 3).

Трехмерное пространство. Положим, для определенности, $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ — единичный шар, и пусть лишь в нем начальные условия φ и ψ, возможно, отличны от нуля. Это означает, что в нулевой момент времени в окрестности 0 произошли какие-то возмущения (взрыв). Пусть мы находимся в точке x_0, $|x_0| > 1$. Попробуем понять, когда (по времени) мы почувствуем эти возмущения (услышим взрыв), то есть при каких t, возможно, $u(t, x_0) \neq 0$?

В соответствии с формулой Кирхгофа (87), (78), для определения значения $u(t, x_0)$, мы должны интегрировать начальные условия по сфере $S^{at}_{x_0}$ с центром в точке x_0 и радиусом at. Ненулевой результат мы можем получить лишь тогда, когда эта сфера имеет непустое пересечение с единичным шаром B. Значит, если $at \leq |x_0| - 1$, то шар B лежит вне сферы $S^{at}_{x_0}$, и $u(t, x_0) = 0$. Это означает, что возмущения еще не дошли до точки x_0. Вообще, при произвольном множестве B, в точках (t,x), таких, что x удалено от B более чем на at, значение $u(t,x)$ будет заведомо нулевым. Следовательно, распространение колебаний в пространстве идет со скоростью a.

Если же $at \geq |x_0| + 1$, то шар B попадает целиком внутрь сферы $S^{at}_{x_0}$, интегрирование идет по множеству, где $\varphi = \psi = 0$, а, следовательно, снова $u(t, x_0) = 0$ (волна прошла точку x_0).

Подытоживая сказанное, мы получаем, что в произвольный момент времени $t > 0$ ненулевое значение решение может принимать лишь в точках x, лежащих в шаровом слое

$$at - 1 < |x| < at + 1, \qquad t > 0, \tag{95}$$

(при $t < 1/a$ — в шаре $|x| < at + 1$). В этом случае множество точек (t,x), таких что $|x| = at + 1$ (то есть удаленных от B на расстояние at) называется *передним фронтом волны*, а множество точек, в которых $|x| = at - 1$, — *задним фронтом волны*. Волновые фронты в пространстве распространяются со скоростью a. *Область зависимости* решения от значения начальных условий в B есть множество точек между передним и задним фронтами; в нашем случае область зависимости задается (95).

Двумерное пространство. Принципиальное отличие двумерного случая от трехмерного заключается в том, что интегрирование в (90) идет по всему двумерному кругу $B^{at}_{x_0}$ с центром в точке x_0 и радиуса at, а не по его границе (окружности). Поэтому мы заведомо будем иметь $u(t, x_0) = 0$ лишь при $at \leq |x_0| - 1$, когда единичный шар B лежит вне $B^{at}_{x_0}$, а при $at \geq |x_0| + 1$ (то есть $B \subset B^{at}_{x_0}$), значение $u(t, x_0)$ не обязано быть нулевым. Следовательно, решение $u(t, x)$ может принимать ненулевое значение лишь в точках, удовлетворяющих

$$|x| < at + 1, \qquad t > 0. \tag{96}$$

Итак, при распространении колебаний в двумерном пространстве, *имеется передний фронт* волны, состоящий, как и в $\mathbb{R}^3$, из точек, удаленных от множества B ровно на расстояние at, и *нет заднего фронта.* Множество зависимости решения от начальных условий — область внутри переднего фронта волны, куда попадают точки $x \in \mathbb{R}^2$, удаленные от B менее, чем на at.

Пусть колебания, вызванные возмущением начальных условиями в некотором ограниченном множестве B дошли в какой-то момент времени до точки x_0. Далее по времени в точке x_0 эти возмущения будут постоянно ощущаться, правда, все в меньшей степени. Это обусловлено тем, что в знаменателе подынтегрального выражения в (90) стоит растущая по t величина $\sqrt{(at)^2 - |x_0 - \xi|^2}$ (x_0 фиксировано, а ξ пробегает ограниченное множество B). Как мы видим, наибольшее влияние на величину $u(t, x_0)$ оказывают значения начальных условий $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ в тех точках ξ, которые удалены от x_0 на расстояния, близкие к at, так как именно там знаменатель в (90) мал. Для того, чтобы подчеркнуть, что колебания со временем затухают, говорят о *размытом заднем фронте* волны в $\mathbb{R}^2$ (а не о его отсутствии).

Замечание 0.2 *Проиллюстрируем наши математические выводы физическими примерами. Звуковые волны в трехмерном пространстве распространяется, безусловно, с наличием заднего фронта, иначе любой звук мы бы слышали с долгим (хоть и постепенно затухающим) "эхом". Ну а расходящиеся на поверхности воды круги (а не один круг) от брошенного камня (это и есть сильно локализованное возмущение начальных данных) прекрасно демонстрируют четкий передний и размытый задний фронт волны, распространяющейся в двумерном пространстве.*

Одномерное пространство. Как мы видим из формулы Даламбера (94), значение решения $u(t, x_0)$ задачи Коши для уравнения струны зависит от начального смещения струны φ в точках $x_0 \pm at$ и начальной скорости ψ на отрезке $[x_0 - at, x_0 + at]$. Отрезок здесь — это одномерный шар, а точки $x_0 \pm at$ — сфера в одномерном пространстве (граница шара). Таким образом, решение принципиально по-разному зависит от φ и от ψ: зависимость от φ аналогична трехмерному случаю, а от ψ — двумерному.

Например, если $\psi \equiv 0$, а $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 1$, и $\varphi(x) > 0$ при $x \in (-1, 1)$, то

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2},$$

и $u(t, x) > 0$, если хотя бы одно из чисел $x \pm at$ принадлежит интервалу $(-1, 1)$, и $u(t, x) = 0$ в остальных точках. Множество зависимости решения от значения начального смещения φ на интервале $(-1, 1)$ задается, как и в *трехмерном* случае, неравенствами (95).

Если же, наоборот, $\varphi \equiv 0$, $\psi(x) = 0$ при $|x| \geq 1$, и $\psi(x) > 0$ при $|x| < 1$, то

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi,$$

и $u(t, x) > 0$ при $(-1, 1) \cap (x_0 - at, x_0 + at) \neq$?????? и $u(t, x) = 0$ в остальных точках, то есть при $x_0 - at \geq 1$ или $x_0 + at \leq -1$. Множество зависимости решения от значения начальной скорости ψ на интервале $(-1, 1)$ задается, как и в *двумерном* случае, соотношением (96). Заметим также, что при рассматриваемых финитных начальных условиях, мы не имеем стремления $u(t, x_0)$ к 0 при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} u(t, x_0) = \frac{1}{2a} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{-1}^{1} \psi(\xi) d\xi > 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Это отличает нашу одномерную задачу не только от трехмерной, но и от двумерной.

Неоднородное уравнение. Принцип Дюамеля. Принцип Дюамеля, по существу, утверждает, что, умея решать задачу Коши для однородного волнового уравнения, мы можем решить и неоднородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{97}$$

например, с нулевыми начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 0. \tag{98}$$

Теорема 0.9 *Пусть $U(t,\tau,x)$ — решение задачи Коши для* однородного *волнового уравнения*

$$U_{tt} = a^2 \Delta_x U(t,\tau,x), \qquad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{99}$$

с начальными условиями, заданными при $t = \tau$:

$$U\Big|_{t=\tau} = U(\tau,\tau,x) = 0, \qquad U_t\Big|_{t=\tau} = U_t(\tau,\tau,x) = f(\tau,x). \tag{100}$$

Тогда функция

$$u(t,x) := \int_0^t U(t,\tau,x)d\tau \tag{101}$$

является решением неоднородной *задачи* (97)–(98).

Замечание 0.3 *Постановка начальных условий в задаче (99)–(100) не в момент времени $t = 0$, а при $t = \tau > 0$, влечет только то, что в соответствующей формуле (Кирхгофа, Пуассона, Даламбера) надо везде заменить t на $t - \tau$.*

Замечание 0.4 *Существование решения однородной задачи Коши в двумерном и трехмерном случаях мы доказали при гладкости начальной скорости $\psi \in C^2$, следовательно и решение неоднородной задачи мы получим лишь в предположении $f(t,x) \in C^2$.*

Доказательство. Будем дифференцировать функцию $u(t,x)$, заданную (99). Все дифференцирования ниже законны, так как функция $U(t,\tau,x)$, как решение однородной задачи Коши, является дважды непрерывно-дифференцируемой по t и по x. Для нахождения производных по x, просто дифференцируем по параметру под знаком интеграла:

$$\Delta_x u(t,x) = \int_0^t \Delta_x U(t,\tau,x)d\tau.$$

Для нахождения производных функции $u(t,x)$ по переменной t, дифференцировать приходится как по параметру, так и по верхнему пределу:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(t,\tau,x)d\tau = U(t,t,x) + \int_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau = \int_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau, \\ u_{tt}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau = U_t(t,t,x) + \int_0^t U_{tt}(t,\tau,x)d\tau = f(t,x) + \int_0^t U_{tt}(t,\tau,x)d\tau. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу начальных условий (100), $U(t,t,x) = 0$, $U_t(t,t,x) = f(t,x)$. С учетом того, что $U_{tt} = a^2\Delta_x U$ (см. (99)), получаем (97). Начальные условия (98) также, очевидно, выполнены.

Решение уравнения (97) с произвольными начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

в силу линейности задачи, будет выражаться так:

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} M_{\varphi(x)}(t,x) + M_{\psi(x)}(t,x) + \int_0^t M_{f(\tau,x)}(t-\tau,x)d\tau,$$

где оператор M_g задается (78), (90) или (93) в зависимости от размерности пространства. Например, при $n=1$, формула Даламбера (94) перепишется в виде:

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

Приложение к Лекции 10. Пространство произвольной размерности. Возникает естественный вопрос: что же качественно происходит с распространением волн в случае n пространственных переменных? Или по-другому: по какому множеству, сфере S_x^{at} или шару B_x^{at} идет интегрирование в определении оператора $M_g(t,x)$, если $x\in\mathbb{R}^n$? Формулы, которыми дается решение задачи Коши в случае n пространственных переменных, называются формулами Герглотца–Петровского, и мы их здесь не приводим, давая лишь принципиальный ответ. Интересующимся посоветуем, обратиться, например, к [**?**].

В пространствах нечетной размерности n (за исключением $n=1$), интегрирование в определении оператора M_g идет по поверхности сферы S_x^{at}, следовательно, как в рассмотренном нами трехмерном случае, распространение волн идет с наличием переднего и заднего фронта.

В пространствах четной размерности, интегрирование в определении оператора M_g идет по шару B_x^{at}, следовательно, как в двумерном случае, у волн есть только передний фронт, а задний — размыт.

Пространство размерности один стоит особняком.

Задачи

Лекция XI. Метод Галеркина. Смешанная задача

$$\partial_t^2u-\operatorname{div}(k(x)\nabla u)+a(x)\ u=f,\quad (x,t)\in\ Q_T=Q\times(0,T),$$

$$u|_{S_T}=0,\quad S_T=\partial Q\times(0,T),$$

$$u|_{t=0}=\varphi\in\overset{\circ}{H}{}^1,\quad \partial_tu|_{t=0}=\psi\in\ L^2(Q)$$

Пусть $v_j(x)\in\ C^2(Q),\ v_j|_{\partial Q}=0$,– система линейно независимых функций, полная в $\overset{\circ}{H}{}^1$, . Рассмотрим конечномерные подпространства линейных оболочек $V_m=\mathcal{L}(v_1,\dots,v_m)\subset\ L^2(Q)$. Метод Галеркина состоит в решении конечномерных аппроксимации смещанной задачи, получаемых ортогональной проекцией на V_m, т.е. ищется $w_m(x,t)\in\ H^2(Q_T),\ w_m|_{S_T}=0$, так что $w_m\in\ V_m$ для $\forall t\in[0,T]$ и

$$w_m|_{t=0}=\varphi_m=\sum_{j=1}^m\ \varphi_j\ v_j(x),\quad \partial_tw_m|_{t=0}=\psi_m=\sum_{j=1}^m\ \psi_j\ v_j(x)$$

где $\varphi_m,\ \psi_m$-ортогональные проекции функций $\varphi,\ \psi$ на V_m. Далее, почти всюду выполнено уравнение

$$\partial_t^2w_m-\operatorname{div}(k(x)\nabla w_m)+a(x)w_m=f_m$$

Апроксимирующее решение будем искать в виде $w_m=\sum_{j=1}^m\ c_j(t)\ v_j(x)$. Т.е. ищются функции $c_j(t),\ c_j(0)=\varphi_j,\ c_j'(0)=\psi_j$, так что п.в. $t\in\ (0,T)$ (п.в. t, для которых определен след $f(t,\cdot)$) выполнено интегральное тождество

$$\int_Q(\partial_t^2w_m-\operatorname{div}(k\ \nabla w_m)+aw_m)v_k\ dx=f_k(t)=\int_Q\ f\ v_k\ dx \tag{102}$$

т.е.

$$(\partial_t^2w_m-\operatorname{div}(k\ \nabla w_m)+aw_m)\perp V_m$$

1. существует и единственно w_m,

2. $\{w_m\}$ в некотором слабом смысле сходится к функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1$. Для простоты пусть $\varphi = \psi \equiv 0 \Rightarrow \varphi_m = \psi_m = 0$.

$$\sum_{j=1}^{m} (c_j''(t)(v_m, v_k)_{L^2(Q)} + c_j(t)(v_m, v_k)_{\overset{\circ}{H}{}^1} = f_k(t) \in L^2((0,T)), \quad k = 1, \ldots, m \tag{103}$$

$$c_j(0) = c_j'(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

Норма

$$(h, g)_{\overset{\circ}{H}{}^1} = \int_Q (k\nabla h \nabla g + ahg) dx$$

Доказательство для любой $f_m \in L^2((0,T))$ существования единственного решения $(c_1, \ldots, c_m) \in H^2((0,T))$ системы линейных уравнеений (103) следует из классических результатов для ОДУ, поскольку в силу линейной независимости $(v_1, \ldots, v_m)$ для любого $m \geq 1$ невырожденна матрица Грама

$$\det\left((v_k, v_j)_{L^2(Q)}\right) \neq 0$$

Для матрицы грама

$$\sum_{j,k=1}^{m} (v_k, v_j)_{L^2(Q)} \, \xi_j \xi_k = ||\sum_{j=1}^{m} \xi_j \, v_j||^2 > 0$$

Из теоремы вложения следует, что $(c_1, \ldots, c_m) \in C^1((0,T))$ Умножая m уравнение на c_m' и суммируя получим

$$\int_{Q_T} (\partial_t^2 w_m - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + a w_m) \partial_t w_m \, dxdt = \int_{Q_T} f \partial_t w_m \, dxdt$$

Интегрируя по частям получим

$$\int_{Q_T} (\partial_t^2 w_m - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + a w_m) \partial_t w_m \, dxdt = \frac{1}{2} \int_Q ((\partial_t w_m)^2 + k(\nabla w_m)^2 + a w_m^2) dx|_{t=T}$$

Рассмотрим подпространство $\widetilde{H}^1(Q_T) \subset H^1(Q_T)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на $S_T \cup D_0$, $D_\tau = Q \times \{t = \tau\}$. Можно ввести эквивалентную норму

$$\|w\|_{\widetilde{H}^1(Q_T)} = \left(\int_{Q_T} ((\partial_t w_m)^2 + k(\nabla w_m)^2 + a w_m^2) dxdt\right)^{1/2}$$

тогда

$$2 \int_0^T d\tau \int_{D_\tau} (\partial_t^2 w_m - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + a w_m) \partial_t w_m \, dx = \|w\|^2_{\widetilde{H}^1(Q_T)}$$

Следовательно

$$\|w\|^2_{\widetilde{H}^1(Q_T)} \leq 2\|f\|_{L^2(Q_T)} \, \|w_m\|_{\widetilde{H}^1(Q_T)}$$

Отсюда следует слабая компактность множества $\{w_m\}$ в $\widetilde{H}^1(Q_T)$, т.е. существование подпоследовательности

$$w_{m_j} \rightharpoonup u \in \widetilde{H}^1(Q_T), \quad j \to \infty$$

$u-$ есть обощенное решение смешанной задачи

$$\int_{Q_T} (k\nabla u \nabla v + auv - \partial_t u \, \partial_t v) dxdt = \int_{Q_T} fv dxdt \tag{104}$$

для любой тестовой функции $v \in \widetilde{\widetilde{H}}{}^1(Q_T)$, состоящего из функций из $H^1(Q_T)$, равных нулю на $S_T \cup D_T$.

Достаточно установить справедливость (104) для нкоторого всюду плотного в $\widetilde{\widetilde{H}}{}^1(Q_T)$ множества $\mathcal{M}$. В качестве $\mathcal{M}$ возьмем $v_k(x)\theta(t)$, где $\theta(t) \in C^1([0,T])$, такая что $\theta(T) = 0$. Докажем справедливость

(104) для любой $v(x,t) = v_k(x)\theta(t)$, т.е. для любой $v \in \mathcal{M}$. Потом докажем всюду плотность $\mathcal{M}$ в $\overset{\approx}{H}{}^1(Q_T)$.

Фиксируем m. Для $k \leq m$ умножим (0.2) на $\theta(t)$ и проинтегрируем по $(0,T)$. Тогда

$$\int_{Q_T} [(k\nabla w_m \nabla v_k + a w_m v_k)\theta - \partial_t w_m \ v_k \ \theta'] dxdt = \int_{Q_T} f v_k \theta \ dxdt$$

Из слабой сходимости следует, что

$$\int_{Q_T} [(k\nabla u \nabla v_k + a u v_k)\theta - \partial_t u \ v_k \ \theta'] dxdt = \int_{Q_T} f v_k \theta \ dxdt$$

Теперь докажем, что $v_k\theta$ плотны в $\overset{\approx}{H}{}^1(Q_T)$. Для этого достаточно установить, что множество $\forall\, \eta(x,t) \in C^2(\overline{Q_T})$, $\eta|_{S_T \cup D_T} = 0$, плотное в $\overset{\approx}{H}{}^1(Q_T)$, можно аппроксимировать функциями из $\mathcal{M}$.

По неравенству Фридрихса интеграл Дирихле

$$(\int_{Q_T} ((\partial_t f)^2 + |\nabla f|^2) dxdt)^{1/2}$$

определяет эквивалентную норму в $\overset{\approx}{H}{}^1(Q_T)$. $\mathcal{M}$ линейная комбинация $v_k^*\theta$, V_k^* ортонормированного базиса в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, где скалярное произведение $(f,g)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = \int_Q \nabla f \nabla g \, dx$. Из v_j получаем ортонормированную систему методом Грама-Шмидта.

$$e_1 = h_1/\|h_1\|, \ e_2 = (h_2 - (h_2,e_1)e_1)/\|h_2 - (h_2,e_1)e_1\|, \ \ldots,$$

$$e_m = (h_m - (h_m,e_1)e_1) - \cdots - (h_m,e_1)e_{m-1})/\|h_m - (h_m,e_1)e_1) - \cdots - (h_m,e_1)e_{m-1}\|$$

Для любой функции $\eta(x,t) \in C^2(Q_T)$, $\eta|_{S_T} = 0$, для любого $t \in [0,T]$ имеем $\eta, \partial_t\eta \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ поэтому их можно разложить в сходящийся в метрике $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ ряд Фурье

$$\eta(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_k(t) v_k^*(x), \quad \partial_t\eta(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_k'(t) v_k^*(x)$$

где $\eta_k(t) = \int_Q \nabla\eta(x,t)\nabla v_k^*(x) dx$, при этом

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\eta_k^2 + (\eta_k')^2) = \int_Q (|\nabla\eta(x,t)|^2 + |\nabla\partial_t\eta|^2) dx.$$

Обозначим через $\eta_N(x,t) = \sum_{j=1}^N \eta_k(t) v_k^*(x)$. Отсюда для любого $N \geq 1$ при всех $t \in [0,T]$ функции $\partial_t\eta - \partial_t\eta_N \in \overset{\circ}{H}{}^1(D_t)$. Поэтому на основании неравенства Стеклова

$$\|\partial_t\eta - \partial_t\eta_N\|_{L^2(D_t)} \leq C\|\partial_t\eta - \partial_t\eta_N\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от области Q. Следовательно, для любого $N \geq 1$ при всех $t \in [0,T]$

$$\|\partial_t\eta - \partial_t\eta_N\|^2_{L^2(D_t)} + \|\eta - \eta_N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)} \leq C^2\|\partial_t\eta - \partial_t\eta_N\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)} + \|\eta - \eta_N\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)} =$$

$$= \sum_{j=N+1}^{\infty} (\eta_k^2 + (\eta_k')^2) \to 0, \quad N \to \infty$$

Поэтому на основании теоремы Леви

$$\|\eta-\eta_N\|^2_{\overset{\approx}{H}{}^1(Q_T)} = \int_0^T \ (\|\partial_t\eta-\partial_t\eta_N\|^2_{L^2(D_t)}+\|\eta-\eta_N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)})dt \to \ 0, \quad N\to \ \infty$$

В силу единственности обобщенного решения вся последовательность w_m слабо в $H^1(Q_T)$ сходится к u.

Теорема Леви

Теорема 0.10 *Любая монотонная п.в. последовательность $f_k(x)$, интегрируемая по Лебегу в Q с ограниченной последовательностью интегралов $\int \ f_k(x)\ dx \le \ M$, п.в. сходится к некоторой интенрируемой по Лебегу функции $f(x)$, так что*

$$\lim_{N\to\infty}(L)\int_Q \ f_N dx=(L)\int_Q \ f dx$$

Приложение к Лекции 12.

Задачи

Лекция XII. Смешанная задача для симметризуемых систем первого порядка.

Мы исследуем смешанную задачу для системы первого порядка с постоянными коэффициентами вида

$$Lu=\partial_t u+\sum_{j=1}^n \ A^j \ \partial_x u=f \tag{105}$$

A^j- комплексные постоянные матрицы порядка $N\times \ N$.

1. Первого ограничение–система (121)–нехарактеристическая, т.е. матрица A^n-невырожденная.

2. Симметризуемость по Фридрихсу:

Определение 0.7 *Система (121) называется симметризуемой по Фридрихсу, если существует симметричная, положительно определенная матрица S, такая что матрицы $SA^j,\ j=1,\dots,n$,-симметричны.*

Наша цель–исследовать условия так называемой L_2- корректности смешанной задачи для системы (121) с граничным условием:

$$\Gamma \ u|_{x_n=0}=g \tag{106}$$

в области $R^{n+1}_+=\{(t,\widetilde{x},x_n),\ (t,\widetilde{x})\in \ R^n,\ x_n>0\}$ для симметризуемой системы (121). Система (106) имеет $1\le \ k\le \ N$ уравнений.

Определение 0.8 *Смешанная задача (L,Γ) (121), (106) называется строго L_2- корректной, если существует постоянная $C>0$, что для любых $\gamma>0,\ f\in \ e^{\gamma\, t}L^2(R^{n+1}_+),\ g\in \ e^{\gamma\, t}L^2(R^n)$ существует и единственно слабое решение $u\in \ e^{\gamma\, t}L^2(R^{n+1}_+)$ этой задачи такое что*

$$\gamma \ \int_{-\infty}^\infty \ e^{-2\gamma\, t}\,\|u(x_n,t,\cdot)\|^2_{L^2(R^n_+)}dt+\int_{-\infty}^\infty \ e^{-2\gamma\, t}\,\|u(0,t,\cdot)\|^2_{L^2(R^{n-1})}dt\le \tag{107}$$

$$\le \ C\Big[\frac{1}{\gamma}\ \int_{-\infty}^\infty \ e^{-2\gamma\, t}\,\|f(x_n,t,\cdot)\|^2_{L^2(R^n_+)}dt+\int_{-\infty}^\infty \ e^{-2\gamma\, t}\,\|g(t,\cdot)\|^2_{L^2(R^{n-1})}dt\Big]$$

Здесь использовано определение строгой L^2 корректности, в силу которого из неравенства (107) следует L^2 оценка следа $u|_{x_n=0}$.

Равномерное условие Лопатинского. В образах Фурье $(x',t) \to \ (\eta,\tau)$ из смешанной задачи (121), (106) получим резольвентное уравнение

$$\frac{d}{dx_n}\widetilde{u} - G(\Lambda)\ \widetilde{u} = A_n^{-1}\ \widetilde{f}, \tag{108}$$
$$\Gamma(\Lambda)\widetilde{u}(0) = \widetilde{g},$$
$$G(\Lambda) = -A_n^{-1}\Big((\gamma+i\tau)E + i\sum_{j=1}^{n-1}\ \eta_j A^j\Big), \quad \Lambda = (\tau,\eta,\gamma). \tag{109}$$

Из гиперболичности системы (121) следует, что

Лемма 0.4 *Для $\gamma > 0$ матрица $G(\Lambda)$ не имеет чисто мнимых собственных значений.*

Действительно, если $G(\Lambda)R = i\mu\, R$, то для $\xi = (\eta, -\mu)$ имеем

$$\det(-i\mu\ A^n + (i\tau+\gamma)E + i\sum_{j=1}^{n-1}\ \eta_j A^j) = i^N\ \det((\tau - i\gamma)E + \sum_{j=1}^{n-1}\ \eta_j A^j - \mu\ A^n) = 0$$

что при условии $\gamma > 0$, противоречит условию гиперболичности.

Рассмотрим устойчивое подпространство $E_-(\Lambda)$ матрицы $G(\Lambda)$. Из леммы (0.4) следует, что его размерность

$$\dim\ E_-(\Lambda) = n^- = \text{const}, \quad \forall\Lambda \in\ \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P} = \{(\tau,\eta,\gamma) : \gamma > 0,\ (\tau,\eta) \in\ R^n\}$. Если выбрать $\Lambda = (0,0,1),\ \eta = \tau = 0, \gamma = 1$, получим что n^-–размерность неустойчивого пространствп матрицы $-(A^n)^{-1}$.

Определение 0.9 *Будем говорить, что для задачи (L,Γ):*

$$\frac{d}{dx_n}u(x_n) - G(\Lambda)\ u(x_n) = f(x_n), \quad x_n \in\ R^+, \tag{110}$$
$$\Gamma(\Lambda)u(0) = g \in\ \mathbf{C}^n, \tag{111}$$

выполнено равномерное условие Лопатинского, если

1. $k = \mathbf{rank}\ \Gamma(\Lambda) = \dim\ E_-(\Lambda), \quad \forall\Lambda \in \mathcal{P}$

2. Справедливо неравенство

$$|v| \leq\ C|\Gamma(\Lambda)\, v|, \quad \forall\ v \in\ E_-(\Lambda) \tag{112}$$

Докажем следующую теорему

Теорема 0.11 *Для нехарактеристической системы (121), симметризуемой по Фридрихсу, смешанная задача (L,Γ) строго L^2 корректна тогда и только тогда, когда Γ удовлетворяет равномерному условию Лопатинского.*

Доказательство состоит из двух шагов. На первом шаге мы докажем, что для нехарактеристической симметризуемой по Фридрихсу системы (121) из строгой L^2 корректности некоторого граничного условия Γ_* следует строгая L^2 корректность любого граничного условия (106), удовлетворяющего равномерному условию Лопатинского. На втором шаге мы докажем строгую L^2 корректность так называемого максимально диссипативного условия Фридрихса Γ^{max}.

Доказательство справедливо для более широкого случая, когда $\mathcal{P}-$ связнок открытое множество. Рассмотрим резольвентное уравнение (108).

Условие 0.1 *Основное условие: матрица $G(\Lambda)$ не имеет чисто мнимых собственных значений для любого $\Lambda \in \mathcal{P}$. Тогда $\dim E_0(\Lambda) = \mathrm{const}$ для $\forall \Lambda \in \mathcal{P}$.*

Определение 0.10 *Для некоторого $\alpha = \alpha(\Lambda) > 0$ задача $L(\Lambda),\ \Gamma(\Lambda)$ для резольвентное уравнение равномерно устойчиво, если для любого $u \in H^1(R^+),\ \Lambda \in \mathcal{P}$, справедлива априорная оценка*

$$\alpha(\Lambda)\|u\|^2 + |u(0)|^2 \leq C\Big[\frac{1}{\alpha(\Lambda)}\|L(\Lambda)u\|^2 + |\Gamma(\Lambda)\ u(0)|^2\Big] \tag{113}$$

Определение 0.11 *Резольвентное уравнение (108) удовлетворяет равномерному условию Лопатинского, если для $\forall \Lambda \in \mathcal{P}$:*

1. $k = \mathbf{rank}\ \Gamma(\Lambda) = \dim E_-(\Lambda)$,

2. Справедливо неравенство

$$|v| \leq C|\Gamma(\Lambda)\, v|, \quad \forall\ v \in E_-(\Lambda). \tag{114}$$

Лемма 0.5 *Условие 2. в равномерном условии Лопатинского необходимо и достаточно, чтобы $L^2(R^+)$ решение уравнения*

$$L(\Lambda)\ u = 0, \quad t > 0, \tag{115}$$

удовлетворяло оценке следа

$$|u(0)|^2 \leq C\ |\Gamma(\Lambda)\, u(0)|^2 \tag{116}$$

с постоянной $C > 0$, независимой от $\Lambda \in \mathcal{P}$.

Доказательство. L^2 решение $u(x_n)$ однородного уравнения (115) определяется однозначно

$$u(x_n) = e^{x_n\ G(\Lambda)}\ u^0$$

о должно убывать при $x_n \to \infty$. Следовательно

$$u^0 \in E_-(\Lambda)$$

Условие 0.2 *Потребуем существование некоторого граничного условия Γ_*, для которого задача*

$$\frac{d}{dx_n}u(x_n) - G(\Lambda)\ u(x_n) = A_n^{-1}\ \widetilde{f}, \tag{117}$$
$$\Gamma_*(\Lambda)\ u(0) = \widetilde{g},$$

для любых $f \in L_2(R^+)$, $g \in C^k$, $k = \mathbf{rank}\ \Gamma$ имеет единственное решение $u \in L^2(R^+)$, удовлетворяюшее оценке

$$\alpha(\Lambda)\|u\|^2 + |u(0)|^2 \leq C\Big[\frac{1}{\alpha(\Lambda)}\|L(\Lambda)u\|^2 + |\Gamma(\Lambda)\ u(0)|^2\Big],$$

постоянная $C > 0$ не зависит от $f, f, \Lambda \in \mathcal{P}$.

Ниже мы покажем, что масимально диссипативное условие Фридрихса удовлетворяет условию (0.2).

Предложение 0.6 *Пусть для резольвентного уравнение (117) выполнено условие (0.2) при некотором выборе параметра $\alpha(\Lambda)$. Тогда для любого граничного условия*

$$\Gamma(\Lambda)\ u(0) = g \in \mathbf{C}^n,$$

удовлетворяющего равномерному условию Лопатинского, задача (110)–строго устойчиво с тем же параметром $\alpha(\Lambda)$.

Доказательство. Пусть $u(x_n) \in \ H^1(R^+)$-есть решение задачи (110). Введем вспомогательную задачу для граничного условия Γ_* из (0.2):

$$\frac{d}{dx_n}w - G(\Lambda)w = f, \quad x_n > 0,$$

$$\Gamma_*(\Lambda)\ w(0) = g,$$

для которой в силу условия (0.2) существует единственное $L*2-$ решение такое, что

$$\alpha(\Lambda)\|w\|^2_{L^2(R^+)} + |w(0)|^2 \leq \ C_*\frac{1}{\alpha(\Lambda)}\ \|f\|^2_{L^2(R^+)}.$$

Теперь рассмотрим корректор $v = u - w \in \ L^2(R^+)$. Тогда

$$\frac{d}{dx_n}v - G(\Lambda)v = 0, \quad x_n > 0,$$

$$\Gamma(\Lambda)\ v(0) = \Gamma(\Lambda)(u(0) - w(0)) = g - \Gamma(\Lambda)w(0).$$

Из равномерного условия Лопатинского (114)

$$|v(0)|^2 \leq \ C\ |\Gamma(\Lambda)v(0)|^2 \leq \ C[|g|^2 + |\Gamma(\Lambda)w(0)|^2] \leq \ 2C[|g|^2 + C_1C_*\frac{1}{\alpha(\Lambda)}\ \|f\|^2_{L^2(R^+)}]$$

С другой стороны $v(x_n)$ является решением резольвентного уравнения со специальным граничным условием Γ_*

$$\frac{d}{dx_n}v - G(\Lambda)v = 0, \quad x_n > 0,$$

$$\Gamma_*(\Lambda)\ v(0) = \Gamma_*(\Lambda)(u(0) - w(0)).$$

Отсюда

$$\alpha(\Lambda)\|v\|^2_{L^2(R^+)} + |v(0)|^2 \leq \ C_*|\Gamma_*(\Lambda)\ v(0)|^2 \leq \ 2c_2C_*[|g|^2 + C_1C_*\frac{1}{\alpha(\Lambda)}\ \|f\|^2_{L^2(R^+)}],$$

где C_1- матричная норма $\Gamma(\Lambda)$, C_2- матричная норма $\Gamma_*(\Lambda)$. Здесь мы используем равномерную ограниченность этих норм в $\mathcal{P}$. Суммируя эти оценки, получим

$$\alpha(\Lambda)\ \|u\|^2_{L^2(R^+)} + |u(0)|^2 \leq \ 2\alpha(\Lambda)\ \|v\|^2_{L^2(R^+)} + 2|v(0)|^2 + 2\alpha(\Lambda)\ \|w\|^2_{L^2(R^+)} + 2|w(0)|^2 \leq$$

$$\leq \ 4C_*C_2[|g|^2 + C_1C_*\frac{1}{\alpha(\Lambda)}\ \|f\|^2_{L^2(R^+)}] + 2C_*\frac{1}{\alpha(\Lambda)}\ \|f\|^2_{L^2(R^+)} \leq \ c_0[\frac{1}{\alpha(\Lambda)}\ \|f\|^2_{L^2(R^+)} + |g|^2]$$

Это завершает доказательство Предложения (0.6). Теперь перейдем ко второму шагу в доказательстве Теоремы (0.11)–построим максимально диссипативное граничное условие Фридрихса, удовлетворяющее утверждениям условия (0.2).

Максимально диссипативное граничное условие Фридрихса. Построим граничное условие (106) с матрицей Γ_{Ph}, так называемые максимально диссипативное граничное условия Фридрихса , для которого смешанной задача (L, Γ_{Ph}) строго L_2- корректна в области $R^{n+1}_+ = \{(t, \widetilde{x}, x_n),\ (t, \widetilde{x}) \in \ R^n,\ x_n > 0\}$ для симметризуемой системы (121).
Через $L^2_\gamma(R^{n+1}_+),\ \gamma \geq \ 0$, обозначим гильбертово весовое пространство функций $u \in \ L_{loc}$, таких что $v = \exp(-\gamma t)\ u \in \ L^2(R^{n+1}_+)$. Тогда

$$L_\gamma\ v = \partial_t v + \gamma\, v + \sum_{j=1}^n\ A^j\ \partial_x v = F, \quad F = \exp(-\gamma\ t)f. \tag{118}$$

Для $v \in \ H^1(R^{n+1}_+)$, интегрируя по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(\partial_t v, Sv)dt + \gamma(v, Sv) + \sum_{j=1}^n (SA^j\ \partial_x v, v)]dt = \tag{119}$$

$$= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} (v, Sv)_{L_2(R^n_+)} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (SA^n\, v|_{x_n=0}, v|_{x_n=0})_{L_2(R^{n-1})} dt$$

Здесь мы воспользовались симметрией матриц $SA^j,\ j = 1, \dots, n$.
Отрицательные собственные значения матрицы A^n называются неустойчивыми. Пусть E_- подпростарнство, натянутое на собственные вектора неустойчивых собственных значений, размерность $\dim\, E_- = n^-$.

Определение 0.12 *Граничное условие (106) с матрицей* Γ^{Ph} *называется максимально диссипативным по Фридрихсу, если число уравнений в этом условии равно* n^-, *т.е.* Γ^{Ph} *матрица порядка* $n^- \times N$, *и матрица* SA^n *отрицательно определена на* $\ker\, \Gamma^{Ph}$.

Теорема 0.12 *Для любой симметризуемой по Фридрихсу системе (121) существует махсимально диссипативное граничное условие (106), для которого справедлива априорная оценка*

$$\gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma\, t}\ ||u||^2_{L_2(R^n_+)} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma\, t}\ ||u|_{x_n=0}||^2_{L_2(R^{n-1})} dt \leq$$

$$\leq\ C\Big(\frac{1}{\gamma}\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma\, t}\ ||L\, u||^2_{L_2(R^n_+)} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma\, t}\ ||\Gamma^{Ph}\, u|_{x_n=0}||^2_{L_2(R^{n-1})} dt\Big)$$

Перейдем к построению максимально диссипативного граничного условия. Положим $H^- = SE_-$. ^{n} можно представить как прямую сумму $C^n = H^\perp \bigoplus H^-$ ортогональных подпространств. Рассмотрим проекцию

$$\pi^+ :\ C^N\ \to\ H^\perp.$$

Положим

$$\Gamma^{Ph} = T\, \pi^+,$$

где $T-$ линейный изоморфизм

$$T:\ H^\perp\ \to\ C^{N-n^-}$$

Для любого $h \in C^N$ меем

$$h = h^- + h^\perp,\ h^- \in\ H^-,\ h^\perp \in\ H^\perp,\ (h^-, h^\perp) = 0,\quad h^- = \sum_{j=1}^{N^-}\ c_j h_j,$$

где h^-_j собственные вектора симметричной матрицы SA^n, отвечающие отрицательным собственным значениям. Отсюда

$$-(SA^n h, h) = \sum_{j=1}^{n^-}\ |\lambda_j|\ c_j^2 - (SA^n h^\perp, h^\perp) - 2(SA^n h^-, h^\perp) >\ c_0\ |h^-|^2 - C_0\ |h^\perp|^2.$$

Здесь $c_0 = \frac{1}{2} \min_{j=1,\dots,N^-}\ |\lambda_j|$. Существует изоморфизм $T_0 :\ \mathrm{Im}\ \Gamma^{Ph} \to\ H^\perp$ такой что

$$h^\perp = T_0^{-1}\ \Gamma\, h.$$

Отсюда следует, что

$$-(SA^n h, h) \geq\ c_0\, |h|^2 - C_1\, |\Gamma^{Ph}\, h|^2 \tag{120}$$

К сожалению, это граничное условие чрезвычайно специальное.

Теорема 0.13 *Смешанная задача для симметризуемой по Фридрихсу системы (121) с максимально диссипативным граничным условие Фридрихса (106) является строго* L_2 *корректной.*

Из стандартных соображений (см. например [?]) существование и единственного L_2 рещения смешанной задачи (121), (106) является следствием справедливости априорной оценки (107) для задачи (121), (106) и ее сопряженной. Сопряженная система L^* является симметризуемой и граничное условие с матрицей $(\Gamma^{Ph})^*$ –максимально диссипативным по Фридрихсу. Здесь $S^{-1}-$ симметризатор для L^* и $S^{-1}(A^n)^*-$ (см. [?]) положительно определена на ядре $\ker\, (\Gamma^{Ph})^*$. Отсюда априорные оценки для смешанных задач (L, Γ^{Ph}) и $(L^*, (\Gamma^{Ph})^*)$ являются следствием оценок (119) и (120).

Приложение к Лекции 13.

Пример Годунова. Приведем построения максимально диссипативного граничного условие по Фридрихсу для системы газовой динамики

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

L_2 корректна смешанная задача с граничным условием

$$\Gamma U|_{x=0}=T\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}U|_{x=0}=g \tag{121}$$

где

$$T\ :\ R^3\ \rightarrow\ R^3,\quad \det T\neq 0,\quad U=(u,v,w,p).$$

Сделаем замену $U=\exp(\gamma\, t)V$. Тогда

$$E(\partial_t+\gamma)\ V+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\partial_x\ V+$$

$$+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\partial_y\ V+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\partial_z\ V=0$$

$$A^x-\mu\ E=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\mu & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}-\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\mu & 0\\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\mu\end{pmatrix}$$

Собственые значения

$$(\frac{1}{2}-\mu)^2[(\frac{1}{2}-\mu)^2-1]=0\quad\Rightarrow\quad \mu_1=3/2,\ \mu_{2,3}=1/2,\ \mu_4=-1/2$$

Собственные вектора

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}R_{2,3}=0\quad\Rightarrow\quad R_2=(0,1,0,0)^\top,\ R_3=(0,0,1,0)^\top$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}R_4=0\quad\Rightarrow\quad R_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)^\top$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}R_1=0\quad\Rightarrow\quad R_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^\top$$

Отсюда

$$H^+ = \{\xi_1 R_1 + \xi_2 R_2 + \xi_3 R_3,\ \xi \in\ R^3\},\quad H^- = \{\xi_4 R_4,\ \xi_4 \in R^1\}$$

$$V = \xi_1^v R_1 + \xi_2^v R_2 + \xi_3^v R_3 + \xi_4^v R_4$$

$$\xi_1^v = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+p),\quad \xi_2^v = v,\quad \xi_3^v = w,\quad \xi_4^v = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-p)$$

Априорная оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(\partial_t V, V)dt + \gamma\ (V,V) + \sum_{j=1}^{3}(A^j\ \partial_{x_j} V, V)]dt = \gamma\ \int_{-\infty}^{\infty} (V,V)_{L_2(R^3_+)} +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} ((u-p)|_{x=0}, (u-p)|_{x=0})_{L_2(R^2)}dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{2}(v|_{x=0}, v|_{x=0})_{L_2(R^2)} +$$

$$+\frac{3}{2\sqrt{2}}((u+p)|_{x=0}, (u+p)|_{x=0})_{L_2(R^2)} + \frac{1}{2}(w|_{x=0}, w|_{x=0})_{L_2(R^2)}]dt$$

Из граничного условия (121) следует

$$\frac{1}{2}(u+p)|_{x=0} = (T^{-1}g)_1,\quad v|_{x=0} = (T^{-1}g)_2,\quad w|_{x=0} = (T^{-1}g)_3$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\frac{3}{2\sqrt{2}}((u+p)|_{x=0}, (u+p)|_{x=0})_{L_2(R^2)} + \frac{1}{2}(v|_{x=0}, v|_{x=0})_{L_2(R^2)} +$$

$$+\frac{1}{2}(w|_{x=0}, w|_{x=0})_{L_2(R^2)}]dt \le\ C\ \int_{-\infty}^{\infty} (g,g)_{L_2(R^2)}dt$$

Таким образом, имеем

$$\gamma\ \int_{-\infty}^{\infty} (V,V)_{L_2(R^3_+)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} ((u-p)|_{x=0}, (u-p)|_{x=0})_{L_2(R^2)}dt \le$$

$$\le\ C\ \int_{-\infty}^{\infty} (g,g)_{L_2(R^2)}dt$$

Отсюда следует

$$\gamma\ \int_{-\infty}^{\infty} (V,V)_{L_2(R^3_+)} + \int_{-\infty}^{\infty} (V|_{x=0}, V|_{x=0})_{L_2(R^2)}dt \le\ C_1\ \int_{-\infty}^{\infty} (g,g)_{L_2(R^2)}dt$$

Задачи

Лекция XIII. Некоторые свойства гармонических функций.

Будем называть функцию гармонической, если она является классическим решением уравнения Лапласа. С точки зрения физики, гармонические функции, например, являются стационарными распределениями температуры. Исследуем характерные свойства таких функций.

Формулы Грина. Сначала установим интегральные соотношения, которые носят название **формул Грина.** Пусть $\omega-$ ограниченная область в R^n с Липшецевой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим функции $u(x),\ v(x) \in\ C^2(\overline{\Omega})$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_\Omega v\,\partial^2_{x_j} u dx = -\int_\Omega \partial_{x_j} v\,\partial_{x_j} u dx + \int_{\partial\Omega} v \partial_{x_j} \nu_j ds. \tag{122}$$

Здесь, как всегда $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)-$ единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, ds -элемент площади $\partial\Omega$. Суммируя равенства (122) по j, получим **первую формулу Грина:**

$$\int_\Omega v\Delta\, u dx = -\int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} v \partial_{x_j} u\, dx + \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu\, u ds. \tag{123}$$

Точно также получим

$$\int_\Omega u\Delta\, v dx = -\int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} u \partial_{x_j} v\, dx + \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu\, v ds.$$

Вычитая первую формулу из второй, получим **вторую формулу Грина:**

$$\int_\Omega (v\Delta\, u - u\Delta\, v) dx = \int_{\partial\Omega} \Big(v\partial_\nu\, u - u\partial_\nu\, v\Big) ds \tag{124}$$

Формулы Грина справедливы также для функций $u(x)$ и $v(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Для доказательства этого утверждения нужно построить последовательность областей $\Omega_m \subset \Omega$ с Липшецевой границей таких, что $\overline{\Omega_m} \subset \Omega_{m+1}$, $\cup_m \Omega_m = \Omega$, и перейти к пределу при $m \to \infty$ в формулах Грина для областей Ω_m

Представление гармонических функций с помощью потенциалов. Опять рассмотрим функцию $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Через $Q_\varrho^{x_0}$ обозначим как и выше шар радиуса ϱ с центром в точке x_0, а через $S_\varrho^{x_0}$ обозначим сферу радиуса ϱ с центром в точке x_0. Пусть $Q_\varrho^{x_0} \subset \Omega$ и $\Omega_\varrho = \Omega \backslash \overline{Q_\varrho^{x_0}}$. Применим вторую формулу Грина к области Ω_ϱ и функциям $u(x)$ и фундаментальному решению

$$E(x, x_0) = -\frac{|x - x_0|^{2-n}}{(n-2)|S^{n-1}|} \quad \text{при} \quad n > 2,$$

$$E(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \ln|x - x_0| \quad \text{при} \quad n = 2.$$

Тогда получим

$$\int_\Omega (E\Delta\, u - u\Delta\, E) dx = \int_{\partial\Omega} \Big(E\partial_\nu\, u - u\partial_\nu\, E\Big) ds + \int_{S_\varrho^{x_0}} \Big(E\partial_n\, u - u\partial_n\, E\Big) ds, \tag{125}$$

где $n-$ направление внутренней нормали к $S_\varrho^{x_0}$. Равенство (125) справедливо для любых достаточно малых ϱ. Первый интеграл в правой части равенства (125) не зависит от ϱ. Покажем, что при $\varrho \to 0$ интеграл по $S_\varrho^{x_0}$ в правой части (125) стремится к $u(x_0)$. Легко видеть, что

$$\Big|\int_{S_\varrho^{x_0}} E\partial_n\, u ds\Big| \leq\ |o(\varrho)|\, |S^{n-1}| \varrho^{n-1} \max_{S_\varrho^{x_0}} |\partial_n u| \leq\ C_1 \varrho^{n-1} |o(\varrho)|,$$

где постоянная C_1 не зависит от ϱ, и $\varrho^{n-1}|o(\varrho)| \to 0$ при $\varrho \to 0$. Так как на сфере $S_\varrho^{x_0}$ имеем

$$\partial_n E = -\frac{1}{|S^{n-1}|} \varrho^{1-n},$$

то

$$\lim_{\varrho \to 0} \Big(-\int_{S_\varrho^{x_0}} u\partial_n\, E ds\Big) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\varrho^{1-n}}{|S^{n-1}|} \int_{S_\varrho^{x_0}} u ds = u(x_0).$$

Здесь мы применили теорему о среднем значении для интеграла

$$\int_{S_\varrho^{x_0}} u ds = |S^{n-1}| \varrho^{n-1} u(x^\varrho),$$

где $x^\varrho \in S_\varrho^{x_0}$, и воспользовались непрерывностью $u(x)$ в Ω. Теперь можно перейти к пределу в равенстве (125). Получим

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \Big(u\partial_\nu\, E - E\partial_\nu\, u\Big) ds + \int_\Omega E\Delta\, u dx. \tag{126}$$

Если $\Delta u = 0$ в Ω, то из формулы (126) следует, что

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \Big(u\partial_\nu E - E\partial_\nu u \Big) ds. \tag{127}$$

Формула (128) дает **представление гармонической функции** класса $C^2(\overline{\Omega})$ в любой точке $x_0 \in \Omega$ через значения $u(x)$ на $\partial\Omega$ и значения на $\partial\Omega$ ее нормальной производной $\partial_\nu u$.
Если функция $u(x)$ -решение в Ω уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x),$$

то из формулы (126) имеем

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \Big(u\partial_\nu E(x, x_0) - E(x, x_0)\partial_\nu u \Big) ds + \int_\Omega f(x)\, E(x, x_0) dx. \tag{128}$$

для любой точки $x_0 \in \Omega$.
Интеграл вида

$$u_0(x) = \int_\Omega a_0(y)|y - x|^{2-n} dx, \quad n > 2, \tag{129}$$

называется **объемным потенциалом** или **ньютоновым потенциалом** с плотностью $a_0(x)$ в Ω.
Интеграл вида

$$u_1(x) = \int_{\partial\Omega} a_1(y)|y - x|^{2-n} dx, \quad n > 2, \tag{130}$$

называется **потенциалом простого слоя** с плотностью $a_1(x)$ на $\partial\Omega$, а интеграл

$$u_2(x) = \int_{\partial\Omega} a_2(y)\partial_\nu \Big(|y - x|^{2-n} \Big) dx, \quad n > 2, \tag{131}$$

называется **потенциалом двойного слоя** с плотностью $a_2(x)$ на $\partial\Omega$. В случае $n = 2$ аналогично определяются ньтонов, или логарифмический, потенциал и потенциалы простого или двойного слоя. Приэтом, в интегралах (129), (130), (131) нужно заменить $|y - x|^{2-n}$ функцией $-\ln|x - x_0|$. Таким образом, любую гармоническую функцию класса $C^2(\overline{\Omega})$ можно представить как сумму потенциалов простого и двойного слоя на $\partial\Omega$, плотности которых определяются значениями u и $\partial_\nu u$ на $\partial\Omega$.
С точки зрения физики, градиент ньютонова потенциала определяет напряженность электростатического поля в $R^n \backslash \overline{\Omega}$, создаваемого зарядами, помещенными в область Ω, плотность которых равна $a_0(x)$. Потенциал простого слоя является потенциалом электростатического поля в $R^n \backslash \partial\Omega$, создаваемого электрическими зарядами, помещенными на $\partial\Omega$ с поверхностной плотностью $a_1(x)$. Градиент потенциала двойного слоя определяет напряженность электростатического поля в $R^n \backslash \partial\Omega$, создаваемого диполями, помещенными на поверхности $\partial\Omega$ с поверхностной плотностью $a_2(x)$.

Легко видеть, что функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ являются **гармоническими функциями** в $R^n \backslash \partial\Omega$, если плотности a_1, a_2–функции класса $C^0(\partial\Omega)$, так как $(n > 2)$

$$\Delta u_1(x) = \int_{\partial\Omega} a_1\, \Delta_x \Big(|x - y|^{2-n} \Big) ds_y = 0,$$
$$\Delta u_1(x) = \int_{\partial\Omega} a_2\, \partial_{\nu_y} \Delta_x \Big(|x - y|^{2-n} \Big) ds_y = 0,$$

для любой точки $x \in R^n \backslash \partial\Omega$ (Дифференцирование под знаком интегралов в этих формулах по x законно, поскольку $|x - y|^{2-n}$–бесконечно дифференцируемая функция координат точек x и y при $x \neq y$). Таким образом, интегралы (130), (131) определяют два семейства частных решений уравнения Лапласа в области Ω для плотностей $a_1, a_2 \in C^0(\partial\Omega)$. Точно также получаем, что ньютонов потенциал при $a_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ является гармонической функцией в $R^n \backslash \Omega$. В этом случае дифференцирование под знаком интеграла возможно в силу того, что при $x \in R^n \backslash \Omega$ производные до второго порядка относительно координат точки x подинтегральной функции являются непрерывными функциями $x \in \Omega$.

В следующих лекциях мы вернемся к исследованию свойств потенциалов и найдем условие, при которых решения краевых задач для уравнения Лапласа и уравнения Пуассона

$$\Delta u = f, \quad x \in \Omega,$$

ожнозначно представляются линейной комбинацией потенциалов ньютона, простого и двойного слоя, т.е однозначно определяются плотности a_0, a_1, a_2.

Следствия интегрального представления. Из интегрального представления гармонической функции можно получить много важных следствий. Рассмотрим область $\Omega \subset R^n$, где

$$\triangle u = 0. \tag{132}$$

и в ней шар $K_{x,r}$ с центром в точке x радиуса r, границей этого шара является сфера $S_{x,r}$. По формуле Пуассона имеем:

$$u(x) = \int_{S_{x,r}} (u \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n_\xi} - E(x,\xi) \frac{\partial u}{\partial n_\xi})\, dS_\xi \tag{133}$$

Второе слагаемое в этой формуле есть нуль, так как фундаментальное решение E на сфере равняется const и выносится за знак интеграла, а нормальная производная, проинтегрированная по сфере, даст нуль в силу формулы Остроградского-Гаусса и гармоничности u в области. При n=3 получим

$$\frac{\partial\, E(x,\xi)}{\partial n_\xi}|_{|x-\xi|=r} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \{\frac{1}{|x-\xi|}\}}{\partial |x-\xi|}|_{|x-\xi|=r} = \frac{1}{4\pi r^2}$$

В итоге получаем первое утверждение теоремы о среднем:

$$u(x) = \frac{1}{|S_{x,r}|} \int_{S_{x,r}} u(\xi)\, dS \tag{134}$$

где $|S_{x,r}|$ - это площадь сферы. Для n=2 все аналогично. Второе утверждение теоремы о среднем записывается в виде:

$$u(x) = \frac{1}{|K_{x,r}|} \int_{K_{x,r}} u(\xi)\, d\xi \tag{135}$$

где $|K_{x,r}|$ - это объем шара. Оно следует из равенства

$$\int_{K_{x,r}} u(\xi)\, d\xi = \int_0^r \int_{S_{x,\rho}} u(\xi)\, dS\, d\rho.$$

Используя доказанные утверждения, получим принцип максимума. Он формулируется следующим образом:

Теорема 0.14 *Рассмотрим гармоническую в Ω функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Тогда или $u(x) = const$, или*

$$min_{x\in\partial\Omega} u(x) < u(x) < max_{x\in\partial\Omega} u(x) \tag{136}$$

для всех x из Ω.

Мы докажем усиленный принцип максимума, который можно сформулировать так:

Теорема 0.15 *Пусть замыкание области Ω есть линейно-связный компакт в R^n. Если гармоническая функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ достигает внутри области своего минимума или максимума на границе, то она есть тождественно* const.

Понятно, что это условие влечет достижение гармонической функцией своего минимума или максимума в $\overline{\Omega}$ внутри области. Тогда записав второе утверждение теоремы о среднем в точке достижения минимума или максимума и учтя непрерывность гармонической функции, получим, что она необходимо есть const внутри некоторого шара с центром в этой точке. Теперь, если мы предположим, что замыкание нашей области есть линейно-связный компакт в R^n, то получим требуемое утверждение.

(Соеденим точку экстремума с любой другой точкой области гладкой кривой, которую покроем конечным числом внутренних шаров, так чтобы центры соседних шаров лежали в их пересечении).

Перейдем теперь к доказательству вещественной аналитичности гармонических функций. Итак утверждается, что

Теорема 0.16 *Функция $u(x)$, гармоническая в области Ω, является вещественно-аналитической.*

Заметим, что $u \in C^{\infty}(\Omega)$. Это следует из первого утверждения теоремы о среднем, в силу бесконечной дифференцируемости $\dfrac{\partial E(r)}{\partial r} = -\dfrac{1}{4\pi r^2}$ по x внутри сферы. $(r = |x - \xi|)$ Докажем некоторую оценку на производные от гармонической функции, которая нам пригодится в дальнейшем.

Теорема 0.17 (Априорная оценка производных) *Пусть $u(x)$-гармоническая в области $\Omega \subset R^n$ функция из класса $C^0(\overline{\Omega})$. Пусть подобласть $\Omega_1 \subset \Omega$ такова, что расстояние d между Ω_1 и $\partial\Omega$ больше нуля. Тогда в точках $x \in \Omega_1$*

$$|\partial_x^{\alpha} u(x)| \leq (\frac{n}{\delta})^k k^k \ \max_{\partial\Omega} |u|, \quad k = |\alpha|, \tag{137}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\partial^{\alpha} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, k - любое целое положительное число.

Доказательство. Сначала докажем гипоэллиптичность оператора Лапласа, т.е. докажнем, что любая непрерывная обобщенно-гармоническая функция является бесконечно дифференцируемой.

Теорема 0.18 *Пусть $\omega(\varrho)-$ непрерывная функция на отрезке $0 \leq \varrho \leq R$ и пусть $\int_{Q_R^{x_0}} \omega(s)ds = 1$. Тогда, если $u(x)$ –гармоническая в шаре $Q_R^{x_0}$ функция из класса $C^0(Q_R^{x_0})$, то*

$$u(x_0) = \int Q_R^{x_0} u(y)\omega(|x_0 - y|)dy.$$

Доказательство. По теореме о среднем

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_{\varrho}^{x_0}|} \int_{S_{\varrho}^{x_0}} uds.$$

Умножим это равенство на $|S_{\varrho}^{x_0}|\omega(\varrho)$ и проинтегрируем его по ϱ от нуля до R. Тогда получим

$$u(x_0) = u(x_0) \int_0^R |S_{\varrho}^{x_0}|\omega(\varrho)d\varrho =$$

$$= \int_0^R \Big(\int_{S_{\varrho}^{x_0}} u\omega(\varrho)ds \Big) d\varrho = \int_{Q^{x_0}} u(x)\omega(|x - x_0|)dx$$

Теперь пусть функция

$$\omega(s) \in \ C^{\infty}([0, \infty)), \quad \omega = 0, \quad \forall\, s \geq \ 3/4, \quad \omega = 1 \ \ \forall\, s \in [0, 1/4], \quad \int_0^1 \omega(s)ds = 1.$$

Отсюда следует, что для любого достаточно малого $d > 0$ и любой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$, $\varrho(\overline{\Omega_1}, \partial\Omega) = d > 0$, имеем

$$u(x) = \int u(y)\omega_d(|x - y|)dy, \quad \forall\, x \in \Omega_1, \ \ \omega_d(\varrho) = \omega(\varrho/d)/d.$$

Таким образом, средняя функция $u^d(x)$ от гармонической в Ω функции $u(x)$ совпадает с функцией $u(x)$ в области Ω_1. Отсюда следует бесконечная дифференцируемость $u(x)$ в подобласти Ω_1. В силу произвольности d и ω_1 получаем бесконечную дифференцируемость непрерывной гармонической функции $u(x)$ в области гармоничности Ω.

****

Будем называть функцию гармонической, если она является классическим решением уравнения Лапласа. Для таких функций докажем некоторые характерные утверждения. В данной лекции

будет рассмотрен принцип максимума для гармонических функций, а также усиленный вариант этого утверждения; кроме того, будет показана вещественная аналитичность гармонических функций.
Рассмотрим область Ω, где

$$\triangle u = 0 \tag{138}$$

и в ней шар $K_{x,r}$ с центром в точке x радиуса r, границей этого шара является сфера $S_{x,r}$. По формуле Пуассона имеем:

$$u(x) = \int_{S_{x,r}} (u\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial u}{\partial n})\,dS \tag{139}$$

Второе слагаемое в этой формуле есть нуль, так как Φ на сфере равняется
const и выносится за знак интеграла, а нормальная производная, проинтегрированная по сфере, даст нуль в силу формулы Остроградского-Гаусса и гармоничности u в области. При n=3 получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_\xi}|_{|x-\xi|=r} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\{\frac{1}{|x-\xi|}\}}{\partial|x-\xi|}|_{|x-\xi|=r} = \frac{1}{4\pi r^2}$$

В итоге получаем первое утверждение теоремы о среднем:

$$u(x) = \frac{1}{|S_{x,r}|}\int_{S_{x,r}} u(\xi)\,dS \tag{140}$$

где $|S_{x,r}|$ - это площадь сферы. Для n=2 все аналогично. Второе утверждение теоремы о среднем записывается в виде:

$$u(x) = \frac{1}{|K_{x,r}|}\int_{K_{x,r}} u(\xi)\,d\xi \tag{141}$$

где $|K_{x,r}|$ - это объем шара. Оно следует из равенства

$$\int_{K_{x,r}} u(\xi)\,d\xi = \int_0^r \int_{S_{x,\rho}} u(\xi)\,dS\,d\rho.$$

Используя доказанные утверждения, получим принцип максимума. Он формулируется следующим образом:
Рассмотрим гармоническую в Ω функцию $u(x)$. Тогда или $u(x) = const$, или

$$min_{x\in\partial\Omega}u(x) < u(x) < max_{x\in\partial\Omega}u(x) \tag{142}$$

для всех x из Ω.
Мы докажем усиленный принцип максимума, который можно сформулировать так:
Если гармоническая функция достигает внутри области своего минимума или максимума на границе, то она есть тождественно const.
Понятно, что это условие влечет достижение гармонической функцией своего минимума или максимума в $\overline{\Omega}$ внутри области. Тогда записав второе утверждение теоремы о среднем в точке достижения минимума или максимума и учтя непрерывность гармонической функции, получим, что она необходимо есть const внутри некоторого шара с центром в этой точке. Теперь, если мы предположим, что замыкание нашей области есть линейно-связный компакт в R^n, то получим требуемое утверждение. (Соеденим точку экстремума с любой другой точкой области гладкой кривой, которую покроем конечным числом внутренних шаров, так чтобы центры соседних шаров лежали в их пересечении).

Перейдем теперь к доказательству вещественной аналитичности гармонических функций. Итак утверждается, что функция, гармоническая в области Ω, является аналитической.
Заметим, что $u \in C^\infty(\Omega)$. Это следует из первого утверждения теоремы о среднем, в силу бесконечной дифференцируемости $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi r^2}$ по x внутри сферы. ($r = |x-\xi|$) Докажем некоторую оценку на производные от гармонической функции, которая нам пригодится в дальнейшем.

$$|D_x^\alpha u(x)| \le M(\frac{n}{\delta})^k k^k \tag{143}$$

где δ - расстояние от точки x до границы области Ω, $k = |\alpha|$ - порядок производной, и $u(x) \le M$ в области.

Доказательство производится индукцией по k.
Пусть k=1. Предполагается, как и раньше, липшецевость границы области, откуда следует, что ее можно коснуться внутренним шаром радиуса δ с центром в точке x. Это позволяет работать только внутри этого шара без дополнительной информации об области и ее границе. Так как частная производная от гармонической функции сама является гармонической, то для нее спрведлива теорема о среднем. Для любого $\delta' < \delta$

$$u_{x_i}(x) = \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int_{|\xi - x| < \delta'} u_{\xi_i} d\xi = \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int_{|\xi - x| = \delta'} u(\xi) \nu_i dS_\xi \tag{144}$$

(Коэффициент перед интегралом был вычислен для n=2,3, для произвольной размерности просто считаем его известным). Тогда получаем

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int_{|\xi - x| = \delta'} |u(\xi)| dS_\xi \leq M \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \sigma_n \delta'^{n-1} = M \frac{n}{\delta'} \tag{145}$$

Переходя к пределу при $\delta' \to \delta$, получим требуемое утверждение. Теперь считаем, что теорема доказана для всех $|\alpha| \leq k-1$, $k \geq 2$. Рассмотрим два шара $\{x - \xi\} < \delta'$ и $\{x - \xi\} < \dfrac{\delta'}{k}$. Тогда для любой точки из второго шара и любого β, $|\beta| = k-1$, верно

$$|D^\beta u(\xi)| \leq M(\frac{n}{\delta' - \frac{\delta'}{k}})^{k-1} (k-1)^{k-1} = M(\frac{n}{\delta'})^{k-1} k^{k-1} \tag{146}$$

Теперь по уже доказаному для первых производных утверждению, примененному ко второму шару с const из оценки (9), мы получим то, что требовалось.(Как и раньше перейдя к пределу при $\delta' \to \delta$).
Теперь покажем, что ряд Тейлора функции $u(x)$ абсолютно сходится в некотором шаре с центром в точке x и при том к ее значению. Из формулы Стирлинга следует, что существует $C > 0$, такое, что для любых натуральных k
$k^k \leq Ce^k k!$. Кроме того, из тождества $n^k = \sum\limits_{|\alpha| = k} \dfrac{(|\alpha|)!}{\alpha!}$ следует, что $\dfrac{(|\alpha|)!}{\alpha!} \leq n^{|\alpha|}$. Рассмотрим два шара с центрами в точке x и радиусами $\frac{\delta}{2}$ и $\frac{\delta}{4}$. Обозначим максимум функции в большем шаре через M. Для любой точки из меньшего шара имеем оценку

$$|D^\alpha u| \leq M(\frac{4n}{\delta})^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} \tag{147}$$

Учитывая полученные выше оценки имеем

$$|D^\alpha u| \leq CM(\frac{4n^2 e}{\delta})^{|\alpha|} \alpha! \tag{148}$$

Теперь видно, что ряд Тейлора абсолютно сходится в шаре радиуса $\dfrac{\delta}{4n^2 e}$. Осталось доказать, что этот ряд сходится к функции $u(x)$. Остаточный член формулы Тейлора равен

$$R_N(y) = \sum_{|\alpha| = N} \frac{D^\alpha u(x^*)}{\alpha!} (x - y)^\alpha \tag{149}$$

Будем считать, что y принадлежит шару еще меньшего радиуса $\frac{\delta}{8n^3 e}$. Очевидно, что x^* принадлежит шару радиуса $\frac{\delta}{4}$ и для нее верно (11). Поэтому

$$R_N(y) = \sum_{|\alpha| = N} CM(\frac{4n^2 e}{\delta})^N (\frac{\delta}{8n^3 e})^N \leq \frac{CM}{(2n)^N} n^N = \frac{CM}{2^N} \tag{150}$$

Таким образом, остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю. Этим заканчивается доказательство утверждения.

Приложение к Лекции 13.

Задачи

Лекция XIV. Субэллиптические и суперэллиптические функции.

Рассмотрим два важных класса функций, для которых будут получены некоторые свойства, характеризующие эллиптический оператор.

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} + c(x) \tag{151}$$

Коэффициенты оператора считаем гладкими и вещественными (если это условие не является необходимым, то требуем только их измеримость). Будем считать, что для коэффициентов $a_{ij}(x)$ выполнено условие равномерной эллиптичности, т.е.

$$C_1 \le \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le C_2 \tag{152}$$

где $|\xi| = 1$. Из линейной алгебры известно, что это условие дает ограниченность собственных значений для $a_{ij}(x)$. Также считаем, что первое собственное значение строго больше нуля (а значит и все остальные).

$$min_{|\xi|=1}\{a_{ij}\xi_i\xi_j\} = \lambda_1 > 0 \tag{153}$$

Определим постоянную эллиптичности

$$e = sup_{x\in\Omega}\frac{\sum a_{ii}(x)}{min_{|\xi|=1}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j} = sup_{x\in\Omega}\frac{\sum\lambda_i}{\lambda_1} \tag{154}$$

Очевидно, что из последнего равенства следует $e \ge n$. (Для оператора Лапласа просто равенство).

Перейдем к определению упомянутых выше функций. Обозначим главную часть оператора L через L_0.

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} \tag{155}$$

Функция $u(x)$ называется субэллиптической (суперэллиптической), если $L_0 u \ge 0$ (соответственно $L_0 u \le 0$).

Докажем выпуклость этих функций, т.е. что у них нет локальных max и min сответственно. Проведем доказательство только для субфункций, а именно докажем, что

$$u(x) \le max_{\partial\Omega}\, u \tag{156}$$

Пусть сначала во внутренней точке max x_0 выполнено строгое неравенство
$L_0 u(x_0) > 0$. В этой точке приведем оператор к главным осям

$$L_0 u(x_0) = \sum \lambda_i \partial^2_{ii} u(x_0) \le 0 \tag{157}$$

так как вторые производные в точке max неположительны. Получили противоречие, значит такой точки не существует.

Теперь пусть неравенство нестрогое. Введем новую функцию

$$V_\varepsilon = u(x) + \varepsilon x_1^2 \tag{158}$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$L_0 V_\varepsilon = L_0 u + 2\varepsilon a_{11} > 0 \tag{159}$$

Из первого пункта следует, что

$$u(x) \le V_\varepsilon(x) \le max_{\partial\Omega}\, u + \varepsilon max_{\partial\Omega}\, x_1^2 \tag{160}$$

Устремив ε к нулю, получим требуемое утверждение.

Заметим, что эти утверждения справедливы для гармонических функкций, которые принадлежат одновременно обоим классам функций.

Рассмотрим действие эллиптического оператора на функции специального вида, а именно $\frac{1}{|x-x_0|^s}$ где $x_0 \in \Omega$. Утверждается, что

$$L_0 \frac{1}{|x-x_0|^s} \geq 0 \tag{161}$$

в $R^n \backslash \{x_0\}$, если $s \geq e-2$. Для полного эллиптического оператора неравенство верно в достаточно малой проколотой окрестности x_0. Докажем первое утверждение(второе остается в качестве задачи).

Обозначим $r = |x-x_0|$ и $\gamma_i = \frac{x_i - x_i^0}{r}$
при $i \neq j$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\frac{1}{r^s}) = s(s+2)\frac{1}{r^{s+2}}\gamma_i\gamma_j \tag{162}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\frac{1}{r^s}) = s(s+2)\frac{1}{r^{s+2}}\gamma_i^2 - \frac{s}{r^{s+2}} \tag{163}$$

Тогда

$$L_0 \frac{1}{|x-x_0|^s} = s(s+2)\frac{1}{r^{s+2}}[a_{ij}\gamma_i\gamma_j - \frac{\sum a_{ii}}{s+2}] \geq \frac{s a_{ij}\gamma_i\gamma_j}{r^{s+2}}(s+2-e) \tag{164}$$

и все доказано.

Лемма Олейника о нормальной производной. В предыдущем пункте была установлена выпуклость суб- и суперфункций. Было показано, что из $L_0 u \geq 0$ следует

$$u(x) \leq max_{\partial\Omega}\, u \tag{165}$$

Пусть $x_0 \in \partial\Omega$ и $u(x_0) = max_{\partial\Omega}\, u \equiv M$. Тогда утверждение леммы состоит в том, что нормальная производная в этой точке от функции $u(x)$ строго отрицательна (нормаль берется внутренняя). Для суперфункций все аналогично (производная строго положительна).

Доказательство проводится так называемым методом барьерных функций Бернштейна. В силу того, что граница предполагается липшецевой, ее можно коснуться изнутри области внутренним шаром К, причем точкой касания будет x_0. Для простоты будем считать, что центром шара является 0, а радиус равен R. Тогда для любой точки $x \in \overline{K} \backslash x_0$ будет верно $u(x) < u(x_0)$, так как все они лежат строго внутри области Ω.
Рассмотрим функцию

$$v(x) = M + \frac{\varepsilon}{R^s} - \frac{\varepsilon}{|x|^s} \tag{166}$$

где $s \geq e-2$. Очевидно, что $L_0(v-u) \leq 0$ (функция v уже была исследована выше). Из выпуклости суперфункций следует

$$v - u \geq min_{\partial\Omega}\,(v-u) \tag{167}$$

В качестве Ω возьмем кольцо с центром в нуле и радиусами $\frac{R}{2}$ и R. Тогда на границе этой области (две сферы)

$$v - u = M - u + \overline{O}(\varepsilon) \geq 0 \tag{168}$$

для достаточно малых ε. Отсюда вытекает, что и во всем кольце $v \geq u$.
Кроме того, $v(x_0) = u(x_0) = M$. Значит, нормальная производная от $v-u$ в точке x_0 неотрицательна (нормаль внутренняя для кольца). Отсюда следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{x_0} \geq \frac{\partial u}{\partial n}|_{x_0} \tag{169}$$

Теперь осталось посмотреть на знак

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{x_0} = -\frac{\varepsilon s}{R^{s+1}} \tag{170}$$

так как можно брать любое $s \geq e-2$ (чтобы v была суперфункцией), то утветждение доказано (нам достаточно $s > 0$).

Приложение к Лекции 14.

Усилен. принцип макс. как следст. леммы Олейник

Задачи

1. Пусть B_R шар $|x| < R$ и существует классическое решение $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ задачи Неймана

$$\Delta\, u = -1 \quad \text{в} \quad B_R, \qquad \partial_r u|_{r=R} = \psi.$$

Доказать,что функция ψ не может быть положительной во всех точках границы $S_R = \partial\, B_R$.

Лекция XV. Терема Рисса и слабые решения задачи Дирихле и Неймана.

Слабые решения задачи Дирихле.

Неравенство Фридрихса. Если $v \in \overset{\circ}{H^1} (D, \partial D)$, то

$$\underbrace{\int_D |\nabla v|^2 dx}_{\text{интеграл Дирихле}} \qquad \geq c \int_D v^2 \tag{14.5}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 1, v \in \overset{\circ}{H^1}$. Следовательно, $\mathbf{D}v^2 = 2\int_0^x vv_x dx$. Следовательно, справедливы следующие неравенства

$$|v^2| \leq 2\|v, L_2(I)\|\|v_x, L_2(I)\| \Longrightarrow$$

$$\int_0^a |v^2| \leq 2a\|v\|\|v_x\| \Longrightarrow \|v\|^2 \leq 2a\|v\|\|v_x\| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|v\| \leq 2a\|v_x\|. \tag{14.6}$$

Тем самым равенство доказано. Следовательно, $\mathbf{D}\|u\|^2_{H^1} = \|u\|^2_{L_2} + \|u_x\|^2_{L_2}$, а из (14.6) следует, что $\|u\|_{\overset{\circ}{H^1}} = \|u_x\|$— эквивалентная норма. Введем в $\overset{\circ}{H^1}$ эквивалентную норму

$$[v]^2 =^{def} \int_D k(x)|\nabla v|^2 dx, \tag{14.7}$$

где (x)— гладкая функция, следовательно, $k_1 \leq k(x) \leq k_2 < \infty$. Следовательно,

$$\|v\|_{\overset{\circ}{H^1}} \approx k_1\|v_x\|^2 \leq [v]^2 \leq k_2\|\nabla v\|^2_{L_2} \approx \|v\|_{\overset{\circ}{H^1}}.$$

Следовательно, (14.7) хорошая норма и скалярное произвеление, кроме того получаем не банахово пространство, а гильбертово. Итак получаем, что $\mathbf{D}[u, v] = \int_D k\nabla u \nabla v dx$— скалярное произведение. Наше тождество примет вид

$$[v, G] = (f, G)_{L_2} =_{(\text{надо доказать})} = F_f(G) \text{ — функционал в } \overset{\circ}{H^1}\ . \tag{14.8}$$

Если мы докажем, что это ограниченный функционал, то по теореме Рисса он запишется как: $\exists$и ! $G: \;\; F = [v, G]$. Ограниченность функционала следует из

$$|(f, G)_{L_2}| \leq \|f, L_2(D)\|\|G, L_2(D)\| \leq \|f, L_2(D)\| \underbrace{C}_{\text{const}} [G].$$

Итак, используя метод сведения к теореме Рисса, мы доказали теорему существования.

Слабые решения радача Неймана. Для того, чтобы применить теорему Рисса в случае с задачей Неймана, нам потребуется аналог неравенства Фридрихса. Вот это утверждение: НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ.
Потребуем, чтобы граница области была липшецевой. Тогда справедливо для любой функции $u \in H^1(\Omega)$

$$||u - \overline{u}||_{L_2(\Omega)} \leq C_\pi (D(u))^{\frac{1}{2}} \tag{171}$$

где $\overline{u} \equiv \int_\Omega u$.
Таким образом, интеграл Дирихле задает новую эквивалентную норму
на $H^1|_{const} \ni \{u \in H^1; \overline{u} = const\}$.
Доказательство проведем в простейшем случае. Считаем, что область ограничена, и любые ее две точки можно соединить ломаной, звенья которой параллельны координатным осям. Пусть $n = 2$, заключим область в квадрат со стороной d и докажем неравенство для гладких функций со средним ноль. (гладкие функции плотны в H^1, так как граница липшецева). Итак нужно доказать

$$\int_\Omega |u|^2 \leq C_\pi \int_\Omega (\nabla u)^2 \tag{172}$$

Так как

$$\overline{u} \equiv \int_\Omega u = 0 \tag{173}$$

то существует $x_* \in \Omega : \quad u(x_*) = 0$ (в силу гладкости). Не ограничивая общности, считаем, что точки x и x_* можно соединить ломаной из двух звеньев: l_1 - вертикальный отрезок, а l_2 - горизонтальный. Тогда

$$u(x) - u(x_*) = \int_l \frac{\partial u}{\partial l}\, ds = \int_{x_1}^{x_1^*} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2^*)\, dt + \int_{x_2}^{x_2^*} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t)\, dt \tag{174}$$

Тогда

$$|u(x)|^2 \leq [\int_{l_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \int_{l_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}]^2 \leq |\int_{l_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}|^2 + |\int_{l_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}|^2 \tag{175}$$

Оценим последние интегралы следующим образом:

$$|\int_{l_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}|^2 \leq d \int_{l_1} (\frac{\partial u}{\partial x_2})^2 \tag{176}$$

$$|\int_{l_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}|^2 \leq d \int_{l_2} (\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 \tag{177}$$

Теперь, интегрируя по всему квадрату, получим (вне области функция равна нулю)

$$\int_\Omega |u|^2 \leq d^2 \int_\Omega (\nabla u)^2 \tag{178}$$

Таким образом, неравенство Пуанкаре в данных предположениях доказано.

ЗАДАЧА НЕЙМАНА.
Рассматривается задача Неймана для для уравнения Пуассона, граница области предполагается липшецевой.

$$-\triangle u = f \tag{179}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{180}$$

Тогда необходимым и достаточным условием существования решения из $H^1(\Omega)$ является ортогональность правой части к единице:

$$\int_\Omega f = 0 \tag{181}$$

Можно переформулировать это условие в другом виде. Пусть решается задача

$$\triangle u = 0 \tag{182}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{183}$$

Считаем, что существует $u_0 \in H^1(\Omega)$, такая что $\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \varphi$ (для гладкой φ при липшецевой границе это всегда так).
Тогда получим

$$u_0 + v = u \tag{184}$$

$$-\triangle v = \triangle u_0 \equiv f \tag{185}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{186}$$

Условие ортогональности имеет вид:

$$0 = \int_\Omega \triangle u_0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega} \varphi \tag{187}$$

Будем рассматривать только первую задачу с однородным условием Неймана на границе (9)-(10). Запишем слабую формулировку нашей задачи:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi = \int_\Omega f\psi \tag{188}$$

Интеграл по границе равен нулю в силу условия (10). Как и раньше это должно быть верно для любой гладкой функции. Докажем существование и единственность решения задачи $u \in H^1(\Omega)$, причем $\overline{u} = 0$ (условие необходимо, чтобы убрать сдвиг на const).
Определим $H_N \subset H^1(\Omega)$ как замнутое подпространство $H^1(\Omega)$ со средним ноль. Из неравенства Пуанкаре следует, что интеграл Дирихле задает на этом гильбертовом пространстве новую эквивалентную норму. В правой части (18) стоит непрерывный линейный функцинал (непрерывность по новой норме), так как

$$|\int_\Omega f\psi| \leq ||f||_{L_2}||\psi||_{L_2} \leq C_f||\psi,\, H^1|| \leq C||\psi,\, H_N|| \tag{189}$$

Здесь считаем, что $f \in L_2$(тогда будет определено и $\overline{f}$).
По определению, равенство (18) верно для любой гладкой функции, а следовательно и для любой функции из $H^1(\Omega)$ (в силу плотности гладких функций в $H^1(\Omega)$). Для применения теоремы Рисса нам достаточно требовать $\psi \in H_N$.

$$\psi = \psi_N + \overline{\psi} \tag{190}$$

Подставляя в (18), получим

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi_N = \int_\Omega f\psi = \int_\Omega f\psi_N + \overline{\psi}\int_\Omega f \tag{191}$$

Откуда и вытекает условие ортогональности, сформулированное выше. Таким образом, теорема существования и единственности решения задачи Неймана в классе H_N доказана.

Теорема Бернштейна.

Это так называемая теорема о гладкости, которая утверждает, что если увеличить гладкость границы и правой части на 1, то и решение будет иметь гладкость как минимум на единицу выше. Доказательство этого утверждения проводится переходом к разностным схемам и здесь рассматриваться не будет.

Приложение к Лекции 15.

Задачи

Лекция XVI. Интегральное представление классического решения уравнения теплопроводности. В этой лекции мы получим интегральное представление классического решения $u \in C^{2,1}(Q_T)$ уравнения теплопроводности

$$Tu = \partial_t u - \Delta\, u = f.$$

Здесь $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $\Omega-$ область в R^n с $Lip-$ границей $\partial\Omega$, боковая граница $S_T = \partial\Omega \times (0,T]$, $\Omega_\tau = \Omega \times \{t = \tau\},\ 0 < \tau \leq T$. Через T^* обозначим формально сопряженный оператор

$$T^* v = -\partial_t v - \Delta\, v$$

Для гладких $u,\ v \in C^{2,1}(Q_T)$, интегрируя по частям, получим первую формулу Грина для уравнения теплопроводности

$$\int_{Q_T} v\ Tu\ dxdt = \int_{Q_T} (\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} u \partial_{x_j} v - u\partial_t v) dxdt - \tag{192}$$
$$-\int_{S_T} v\partial_\nu\, u\ ds + \int_{\Omega_T} v(x,T)\ u(x,T)\ dx - \int_{\Omega_0} v(x,0)\ u(x,0)\ dx,$$

$\nu-$ внешняя нормаль на S_T. Также получим

$$-\int_{Q_T} u\Delta\, v\ dxdt = \int_{Q_T} (\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} u \partial_{x_j} v\ dxdt - \int_{S_T} u\partial_\nu\, v\ ds \tag{193}$$

Складывая формулы (192), (193), получим вторую формулу Грина для уравнения теплопроводности

$$\int_{Q_T} (vTu - vT^* u) dxdt = \int_{S_T} (u\partial_\nu\, v - v\partial_\nu\, u) ds + \tag{194}$$
$$+\int_{\Omega_T} u(x,T)\, v(x,T)\ dx - \int_{\Omega_0} u(x,0)\, v(x,0)\ dx$$

Дальше мы покажем, что фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$\Gamma(x,x^0,t,t^0) = \frac{\theta(t-t^0)}{(2\sqrt{\pi(t-t^0)})^n}\ e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4(t-t^0)}}$$

Простые прямые вычисления показывают, что для $t >\ t^0,\ x \in\ R^n$,

$$T_{x,t}\Gamma = 0, \quad T^*_{x^0,t^0}\Gamma = 0$$

Здесь для оператора $L_{x,t}$ индексом x,t мы обозначаем переменные, по которым он действует. Теперь заметим, что Γ локально интегрируема в $R^{n+1}_{x,t}$. Имеем

$$\int_{|x-x^0|<\ R,\ |t-t^0|<\ R} \Gamma(x,x^0,t,t^0)\ dxdt \leq\ \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{t^0}^{t^0+R} dt \int_{R^n_\xi} \theta(t-t^0)\ e^{-\xi^2}\ d\xi$$

после замены $x - x^0 = 2\sqrt{t-t^0}\ \xi$. Поэтому Γ можно рассматривать как обобщенную функцию $S'(R^{n+1}_{x,t})$.

Лемма 0.6 *Покажем, что*

$$T\Gamma\ = \delta(x-x^0, t-t^0) \quad \Rightarrow < \delta(x-x^0,t-t^0), \varphi >= \varphi(0,0), \quad \forall \varphi \in\ S(R^{n+1}_{x,t}).$$

т.е. $\Gamma-$ фундаментальное рещение уравнения теплопроводности. Оно не единственно, с точностью до решения однородного уравнения $Tu = 0$ в $R^{n+1}_{x,t}$. В дальнейшем мы покажем, что Γ определяется однозначно. В слабом смысле

$$< T\Gamma, \varphi >=< \Gamma, T^*\varphi > .$$

Достаточно показать, что

$$< \Gamma, T^*\varphi >= \ \varphi(x^0, t^0)$$

Из локальной интегрируемости Γ получаем

$$< \Gamma, T^*\varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{t>t^0+\varepsilon} \Gamma\ T^*\varphi\ dxdt$$

По первой формуле Грина

$$\int_{t>t^0+\varepsilon} \Gamma\ T^*\varphi\ dxdt = \int_{t>t^0+\varepsilon} \varphi\ T\Gamma\ dxdt + \int_{t=t^0+\varepsilon} \Gamma(x, x^0, t^0+\varepsilon, t^0)\varphi(x, t^0+\varepsilon)dx$$

Так как $T\Gamma = 0$ при $t > t^0$, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{t>t^0+\varepsilon} \Gamma\ T^*\varphi\ dxdt = \varphi(x^0, t^0) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{t>t^0+\varepsilon} T\Gamma\ \varphi\ dxdt + \tag{195}$$
$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{t>t^0+\varepsilon} T\Gamma\ (\varphi - \varphi(x^0, t^0))\ dxdt$$

Здесь

$$\int_{t>t^0+\varepsilon} T\Gamma\ |\varphi - \varphi(x^0, t^0)|\ dxdt \leq\ \pi^{n/2} \int_{R^n_\xi} e^{-|\xi|^2}\ |\varphi(2\sqrt{\varepsilon}\,\xi + x^0, t^0+\varepsilon) - \varphi(x^0, t^0)|d\xi$$

Так как $\varphi \in\ S(R^{n+1}_{x,t})$, то

$$|\varphi(2\sqrt{\varepsilon}\,\xi + x^0, t^0+\varepsilon) - \varphi(x^0, t^0)| = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует, что второй интеграл справа в (195) стремиться к нулю. В тоже время

$$\int_{t>t^0+\varepsilon} T\Gamma\ \varphi\ dxdt = (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n} \int_{R^n_x} e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4\varepsilon}} dx \equiv\ 1$$

Отсюда следует

$$< \Gamma, T^*\varphi >= \varphi(x^0, t^0) =< \delta(x - x^0, t - t^0), \varphi >$$

$\Gamma-$ распределение температуры в пространстве при $t >\ t^0$ от точечного источника в точке $x = x^0$, для которого

$$\int_{R^n_x} \Gamma(x, x^0, t, t^0)dx = 1,$$

что количества тепла в R^n_x не зависит от $t > t^0$ ($\Gamma-$ вероятностное распределение). Имеем

$$\Gamma(x, x^0, t^0+\varepsilon, t^0) \to\ \delta(x - x^0), \quad \varepsilon \to 0 \ \text{ в } \ S'(R^n)$$

следовательно $\Gamma(x, x^0, t^0+\varepsilon, t^0)-\ \delta$ образная последовательность.

Задача. Γ по x^0, t^0 является фундаментальным решением формально сопряженного оператора

$$T^*_{x^0,t^0}\Gamma = \delta(x^0 - x, t^0 - t)$$

Имеем

$$< T^*_{x^0,t^0}\Gamma, \varphi >=< \Gamma, T\varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} dt^0 \int_{R^n_{x^0}} \Gamma(x^0, x, t^0, t)T\varphi(x^0, t^0)dx^0 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} dt^0 \int_{R^n_{x^0}} \varphi(x^0, t^0)T^*_{x^0,t^0}\Gamma\ dx^0 + \int_{R^n_{x^0}} \Gamma(x^0, x, t^0, t^0-\varepsilon)\varphi(x^0, t-\varepsilon)dx^0 \Big] = \varphi(x, t)$$

Отсюда

$$T^*_{x^0,t^0}\Gamma = \delta(x^0 - x, t^0 - t)$$

Интересна связь между фундаментальными решеиями оператора Лапласа и уравнения теплопроводности

Лемма 0.7 *При $n>2$ имеем*
$$E(x,x^0)=\int_0^\infty \Gamma(x,x^0,t,0)\ dt$$

Действительно, при $x\neq\ x^0,\ n>2$
$$V(x,x^0)=\int_0^\infty \Gamma(x,x^0,t,0)\ dt=\int_0^\infty (2\sqrt{\pi\, t})^{-n}e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4t}}\ dt=\frac{1}{4}|x-x^0|^{2-n}\int_0^\infty (\pi\, s)^{-n/2}e^{-1/s}\ ds$$

При $n>2$ подинтегральное выражение интегрируемо. Следовательно, $V(x,x^0)=C\ E(x-x^0)$. Покажем, что $C=-1$. Для $\varphi\in\ S(R^n_x)$
$$<\Delta\, v,\varphi>=<v,\Delta\,\varphi>=\lim_{N\to\infty,\ \varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^N dt\int_{R^n_x}\Gamma\Delta\varphi\ dx=$$
$$=\lim_{N\to\infty,\ \varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^N dt\int_{R^n_x}\Delta\Gamma\,\varphi\ dx=\lim_{N\to\infty,\ \varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^N dt\int_{R^n_x}\partial_t\Gamma\,\varphi\ dx=$$
$$\lim_{N\to\infty,\ \varepsilon\to 0}\Big[\int_{R^n_x}\varphi(x)\Gamma(x,x^0,N,0)dx-\int_{R^n_x}\varphi(x)\Gamma(x,x^0,\varepsilon,0)dx\Big]=-\varphi(x^0)$$

Здесь мы воспользовались тем, что
$$\Gamma(x,x^0,N,0)\to\ 0,\quad N\to\infty.$$

Следовательно
$$<\Delta\, V,\varphi>=-\varphi(x^0)\ \Rightarrow\ <\Delta(-V),\varphi>=<\delta(x-x^0,t-t^0),\varphi(x)>$$

Так как $-V\to\ 0$ когда $|x|\to\infty$, то в силу единственности в этом случае фундаментального решения уравнения Лапласа получаем
$$-V(x,x^0)=E(x,x^0).$$

При $n=2$ интеграл V расходится. Нужна его регуляризация. При $x\neq\ x^0,\ n=2$ положим
$$V(x,x^0)=\int_0^\infty (\Gamma(x,x^0,t,0)-\psi(t))dt, \tag{196}$$

где
$$\psi(t)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi\, t}, & t\geq\ 1,\\ 0, & t\leq\ 1/2,\end{cases}$$

и $\psi\in\ C^\infty(R^1)$. Тогда интеграл V сходится при $x\neq\ x^0,\ t\geq 1$. Имеем
$$\Gamma(x,x^0,t,0)-\frac{1}{4\pi\, t}=\frac{1}{4\pi\, t}(e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4t}}-1)=-\frac{1}{4\pi\, t^2}\ e^{-\frac{\theta|x-x^0|^2}{4t}},\quad 0<\theta<1.$$

(в прямую вычислить производную $e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4t}}-1$). Интеграл (196) можно дифференцировать по $x_j(j=1,2)$ под знаком интеграла, так как полученный интеграл сходится равномерно по x_j. Имеем
$$\partial_{x_j}V=-\frac{1}{2\pi}\partial_{x_j}\ln|x-x^0|$$

Отсюда
$$V(x,x^0)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x-x^0|+C_1$$

C_1 зависит от выбора $\psi(t)$.

Отметим, что постоянную в $V=CE$ можно опрямделить прямо
$$\frac{1}{4}\pi^{-n/2}\int_0^\infty\ s^{-n}\ e^{-1/s}\ ds=\frac{1}{4}\pi^{-n/2}\int_0^\infty\ y^{\frac{n}{2}-2}\ e^{-y}\ dy=\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{-n/2}}=\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}$$

Интегральное представление классического решения. Рассмотрим классическое решение $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$

$$Tu = f, \quad (x,t) \in Q_T$$

$f-$ ограниченная, непрерывная в Q_T. Пусть $(x^0, t^0) \in Q_T$. Применяя вторую формулу Грина в $Q_{t^0-\varepsilon}$ для $v(x,t) = \Gamma(x^0, x, t^0, t)$. Тогда

$$T^* v = -\partial_t \Gamma - \Delta_x \Gamma = 0, \quad t < t^0$$

$$\int_{Q_{t^0-\varepsilon}} (vf - uT^* v) dxdt = \int_{S_{t^0-\varepsilon}} (u\partial_\nu V - V\partial_\nu u) ds + \int_{\Omega_{t^0-\varepsilon}} uV dx - \int_{\Omega_0} uV dx$$

Здесь

$$\int_{\Omega_{t^0-\varepsilon}} uV dx \to u(x^0, t^0), \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда

$$u(x^0, t^0) = \int_{Q_{t^0}} \Gamma\, f\, dxdt + \int_{S_{t^0}} (u\partial_\nu \Gamma - \Gamma \partial_\nu u) ds + \int_{\Omega_0} u(x,0)\Gamma(x^0, x, t^0, 0) dx =$$

$$= \int_{Q_T} \Gamma\, f\, dxdt + \int_{S_T} (u\partial_\nu \Gamma - \Gamma \partial_\nu u) ds + \int_{\Omega_0} u(x,0)\Gamma(x^0, x, t^0, 0) dx \tag{197}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Gamma(x^0, x, t^0, t) \equiv 0, \ t > t^0$.

$\int_{Q_T} \Gamma\, f\, dxdt-$ объемный потенциал, $\int_{S_T} a\partial_\nu \Gamma\, ds-$ тепловой потенциал двойного слоя, $\int_{S_T} \Gamma\, b\, ds$ тепловой потенциал простого слоя.

Предложение 0.7 *Пусть* $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T}),\ Tu = 0$. *Тогда* $u \in C^\infty(Q_T)$.

Выше для любой $(x^0, t^0) \in Q_T$ мы показали что в этом случае

$$u(x^0, t^0) = \int_{S_T} (u\partial_\nu \Gamma - \Gamma \partial_\nu u) ds + \int_{\Omega_0} u(x,0)\Gamma(x^0, x, t^0, 0) dx$$

Последний интеграл C^∞ при $t^0 > 0$. $\int_{S_{t^0}} \cdots = \int_{S_T} \cdots$ так как $\Gamma(x^0, x, t^0, t) \equiv 0,\ t > t^0$. Эти интегралы дифференцируемы, если $\varrho((x^0, t^0), S_T) > 0$.

Задача Коши.

$$Tu = 0, \quad (x,t) \in Q_T,$$
$$u|_{t=0} = u^0(x)$$

$u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$. Применим формулу (197) к области $\Omega = \{|x| < R\}$. Если она ограничена в $C^{1,0}$ в полосе $Q_T = R^n \times (0,T)$, то в силу $\Gamma|_{|x|=R},\ \partial_\nu \Gamma|_{|x|=R} \to 0$ при $R \to \infty$. получим формулу Пуассона

$$u(x^0, t^0) = \int_0^T dt \int_{R^n_x} \Gamma(x^0, x, t^0, t)\ f(x,t)\ dx + \int_{R^n_x} \Gamma(x^0, x, t^0, 0)\ u^0(x)\ dx$$

Приложение к Лекции 16.

Задачи

Лекция XVII. Теорема единственности Тихонова.

Параболический потенциал.

Как и раньше рассмотрим область $D \in R^{n+1}$. По определению, параболический потенциал $F_{s,\beta}(x,t)$ равен

$$F_{s,\beta}(x,t) = \frac{1}{t^s} e^{-\frac{|x|^2}{4\beta t}} \qquad , t > 0 \tag{198}$$

$$F_{s,\beta}(x,t) = 0 \qquad , t \leq 0 \tag{199}$$

Выбор β осуществляется вне диапозона собственных значений матрицы $||a_{ij}||$.
Заметим, что при $t = 0$, $x \neq 0$ особенности нет. За исключением точки $t = 0$, $x = 0$, функция всюду гладкая.

ЛЕММА.
Если $\beta \leq \alpha_1$, $s \geq \frac{M_1}{2\beta}$, где

$$0 < M_2 \leq \sum a_{ij}(x,t) \leq M_1 \tag{200}$$

$$\alpha_1 \leq \sum a_{ij}\nu_i\nu_j \leq \alpha_2 \tag{201}$$

для $\forall x \in \overline{D}$.
Тогда параболический потенциал будет субрешением во всем пространстве, кроме нуля.
Если же $\beta \geq \alpha_2$, $s \leq \frac{M_2}{2\beta}$, то это будет суперрешение.

Доказательство проведем только для $L = L_0$, а случай с линейными членами остается в качестве задачи. Вычисляя соответствующие производные, получим

$$(L - \frac{\partial}{\partial t})F_{s,\beta} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\beta t}}}{t^{s+2}} (\frac{|x|^2}{4\beta}(\frac{a_{ij}}{\beta}\nu_i\nu_j - 1) + t(s - \frac{\sum a_{ii}}{2\beta})) \tag{202}$$

Рассмотрим первый случай. Тогда

$$s - \frac{\sum a_{ii}}{2\beta} \geq s - \frac{M_1}{2\beta} \geq 0 \tag{203}$$

и

$$a_{ij}\nu_i\nu_j \geq \alpha_1 \geq \beta \tag{204}$$

Очевидно получили субрешение. Второй случай рассматривается аналогично.

Теорема Тихонова.

Дадим определение функций класса Тихонова. Рассматривается решение уравнения

$$Lu - u_t = 0 \tag{205}$$

в полосе $t_0 \leq t \leq T < \infty$ при начальных данных

$$u|_{t=t_0} = f(x) \tag{206}$$

Решение $u(x,t)$ принадлежит классу Тихонова T_{C_1,C_2}, если

$$|u(x,t)| \leq C_1 e^{C_2 x^2} \tag{207}$$

равномерно по t во всей полосе.

ТЕОРЕМА ТИХОНОВА.
Если $u \in T_{C_1,C_2}$ и $u|_{t=t_0} = 0$, то $u \equiv 0$ при $t \geq t_0$.

Для доказательства сделаем дополнительное построение. Рассмотрим $E \in R^{n+1}$ - борелевское множество и зададим на нем конечную меру $\mu(E) < \infty$. Определим

$$U_{s,\beta,E,\mu} = \int_E F_{s,\beta}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi d\tau \tag{208}$$

Тогда эта функция в $D = R^{n+1} \backslash \overline{E}$ будет суб(супер)решением, если $F_{s,\beta}$ - суб(супер)решение (доказательство в качестве задачи).
Для доказательства теоремы нам достаточно располагать следующим принципом максимума в полосе. Пусть есть решение задачи Коши (16)-(17) в полосе. Потребуем, чтобы $u \in T_{C_1,C_2}$ и $u \in C(t_0 \leq t < T)$ (последнее условие выполнено для классических решений).
Тогда
1) если $f \leq 0$, то $u \leq 0$ (здесь можно требовать только $Lu - u_t \geq 0$);
2) если $f \geq 0$, то $u \geq 0$ ($Lu - u_t \leq 0$).
Доказательство проведем для узкой полосы $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$, которое не будет зависеть от ее расположения. Поэтому за конечное число шагов мы пройдем всю полосу. Будем опять строить барьерные функции. В качестве E возьмем множество

$$E = \{|x| = R, t = t_0 + \varepsilon\} \tag{209}$$

с мерой Лебега μ (или $E = \{|x| = R\}$, а мера всюду нуль, кроме сферы). Возьмем $s = \frac{M_2}{2\beta}$, $\beta = \alpha_2$, тогда

$$U_{s,\beta,(|x|=R),\mu} = \int_{|\xi|=R} F_{s,\beta}(x-\xi, t-t_0+\varepsilon)\, dS_\xi \tag{210}$$

будет суперрешением в цилиндре $\prod\limits_{0,R}^{t_0,t_0+\varepsilon}$.
Нам также понадобится функция

$$V_R = M e^{C_2 R^2} \int_{|\xi|=R} F_{s,\beta}(x-\xi, t-t_0+\varepsilon)\, dS_\xi \tag{211}$$

Доказываем первое утверждение (второе аналогично). Надо показать, что $u(x', t') \leq 0$ в точке из узкой полосы. Берем $R > 2|x'|$, $\varepsilon = min(T - t_0, \frac{1}{64 C_2 \beta})$.Нужно использовать принцип максимума в цилиндре и получить оценку $V_R \geq u$. Для этого рассмотрим собственную часть границы цилиндра. На дне цилиндра требуемое неравенство выполнено, так как $V_R \geq 0$, а данные Коши по условию неположительны. Теперь рассмотрим боковую поверхность цилиндра.

$$|u(x,t)| \leq C_1 e^{C_2 x^2} \tag{212}$$

Поэтому достаточно показать, что интеграл в выражении для барьерной функции V_R больше некоторой положительной const для любого R. Тогда можно выбрать M таким, чтобы получилось нужное неравенство. Итак получаем

$$M \frac{1}{(t-t_0+\varepsilon)^s} \int_{|\xi|=R} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\beta(t-t_0+\varepsilon)}}\, dS_\xi = M \frac{R^{n-1}}{(t-t_0+\varepsilon)^s} \int_{|\xi|=1} e^{-R^2 \frac{|\frac{x}{R}-\xi|^2}{4\beta(t-t_0+\varepsilon)}}\, dS_\xi \tag{213}$$

и это должно быть больше C_1. Если $n \geq 3$, то оставляя только R^2 (считаем $R > 1$), получим при $R \to \infty$ последовательность δ-образных функций, которые умножаются на 1 и интегрируются по единичной сфере. Значит интеграл стремится к положительноиу пределу при $R \to \infty$, а значит отделен от нуля положительной const. В размерностях $n = 1, 2$ такое доказательство не проходит, но в справедливости утверждения можно убедиться непосредственным вычислением интеграла.
Таким образом, по принципу максимума неравенство $V_R \geq u$ имеет место всюду в цилиндре. Осталось показать, что барьерная функция стремится к нулю при $R \to \infty$. Из $R > 2|x'|$ следует $|x' - \xi|^2 > (\frac{R}{2})^2$

$$u(x', t') \leq V_R(x', t') \leq \frac{M e^{C_2 R^2}}{\varepsilon^s} \int_{|\xi|=R} e^{-\frac{(\frac{R}{2})^2}{8\beta\varepsilon}}\, dS_\xi \leq \frac{M R^{n-1}}{\varepsilon^s} |S^{n-1}| e^{C_2 R^2 - \frac{R^2}{32\beta\varepsilon}} \to 0 \tag{214}$$

при $R \to \infty$. Таким образом, принцип максимума в полосе, а с ним и теорема Тихонова, доказан.
****

Дадим определение функций класса Тихонова. Рассматривается решение уравнения

$$Lu - u_t = 0 \tag{215}$$

в полосе $t_0 \le t \le T < \infty$ при начальных данных

$$u|_{t=t_0} = f(x) \tag{216}$$

Решение $u(x,t)$ принадлежит классу Тихонова T_{C_1,C_2}, если

$$|u(x,t)| \le C_1 e^{C_2 x^2} \tag{217}$$

равномерно по t во всей полосе.

ТЕОРЕМА ТИХОНОВА.
Если $u \in T_{C_1,C_2}$ и $u|_{t=t_0} = 0$, то $u \equiv 0$ при $t \ge t_0$.
Для доказательства сделаем дополнительное построение. Рассмотрим $E \in R^{n+1}$ - борелевское множество и зададим на нем конечную меру $\mu(E) < \infty$. Определим

$$U_{s,\beta,E,\mu} = \int_E F_{s,\beta}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi d\tau \tag{218}$$

Тогда эта функция в $D = R^{n+1} \backslash \overline{E}$ будет суб(супер)решением, если $F_{s,\beta}$ - суб(супер)решение (доказательство в качестве задачи).
Для доказательства теоремы нам достаточно располагать следующим принципом максимума в полосе. Пусть есть решение задачи Коши (16)-(17) в полосе. Потребуем, чтобы $u \in T_{C_1,C_2}$ и $u \in C(t_0 \le t < T)$ (последнее условие выполнено для классических решений).
Тогда
1) если $f \le 0$, то $u \le 0$ (здесь можно требовать только $Lu - u_t \ge 0$);
2) если $f \ge 0$, то $u \ge 0$ ($Lu - u_t \le 0$).
Доказательство проведем для узкой полосы $t_0 \le t \le t_0 + \varepsilon$, которое не будет зависеть от ее расположения. Поэтому за конечное число шагов мы пройдем всю полосу. Будем опять строить барьерные функции. В качестве E возьмем множество

$$E = \{|x| = R, t = t_0 + \varepsilon\} \tag{219}$$

с мерой Лебега μ (или $E = \{|x| = R\}$, а мера всюду нуль, кроме сферы). Возьмем $s = \frac{M_2}{2\beta}$, $\beta = \alpha_2$, тогда

$$U_{s,\beta,(|x|=R),\mu} = \int_{|\xi|=R} F_{s,\beta}(x-\xi, t-t_0+\varepsilon)\, dS_\xi \tag{220}$$

будет суперрешением в цилиндре $\prod\limits_{0,R}^{t_0,t_0+\varepsilon}$.
Нам также понадобится функция

$$V_R = M e^{C_2 R^2} \int_{|\xi|=R} F_{s,\beta}(x-\xi, t-t_0+\varepsilon)\, dS_\xi \tag{221}$$

Доказываем первое утверждение (второе аналогично). Надо показать, что $u(x', t') \le 0$ в точке из узкой полосы. Берем $R > 2|x'|$, $\varepsilon = min(T - t_0, \frac{1}{64C_2\beta})$.Нужно использовать принцип максимума в цилиндре и получить оценку $V_R \ge u$. Для этого рассмотрим собственную часть границы цилиндра. На дне цилиндра требуемое неравенство выполнено, так как $V_R \ge 0$, а данные Коши по условию неположительны. Теперь рассмотрим боковую поверхность цилиндра.

$$|u(x,t)| \le C_1 e^{C_2 x^2} \tag{222}$$

Поэтому достаточно показать, что интеграл в выражении для барьерной функции V_R больше некоторой положительной const для любого R. Тогда можно выбрать M таким, чтобы получилось нужное неравенство. Итак получаем

$$M\frac{1}{(t-t_0+\varepsilon)^s}\int_{|\xi|=R} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\beta(t-t_0+\varepsilon)}}\,dS_\xi = M\frac{R^{n-1}}{(t-t_0+\varepsilon)^s}\int_{|\xi|=1} e^{-R^2\frac{|\frac{x}{R}-\xi|^2}{4\beta(t-t_0+\varepsilon)}}\,dS_\xi \tag{223}$$

и это должно быть больше C_1. Если $n \geq 3$, то оставляя только R^2 (считаем $R > 1$), получим при $R \to \infty$ последовательность δ-образных функций, которые умножаются на 1 и интегрируются по единичной сфере. Значит интеграл стремится к положительноиу пределу при $R \to \infty$, а значит отделен от нуля положительной const. В размерностях $n = 1, 2$ такое доказательство не проходит, но в справедливости утверждения можно убедиться непосредственным вычислением интеграла.
Таким образом, по принципу максимума неравенство $V_R \geq u$ имеет место всюду в цилиндре. Осталось показать, что барьерная функция стремится к нулю при $R \to \infty$. Из $R > 2|x'|$ следует $|x'-\xi|^2 > (\frac{R}{2})^2$

$$u(x',t') \leq V_R(x',t') \leq \frac{Me^{C_2R^2}}{\varepsilon^s}\int_{|\xi|=R} e^{-\frac{(\frac{R}{2})^2}{8\beta\varepsilon}}\,dS_\xi \leq \frac{MR^{n-1}}{\varepsilon^s}|S^{n-1}|e^{C_2R^2-\frac{R^2}{32\beta\varepsilon}} \to 0 \tag{224}$$

при $R \to \infty$. Таким образом, принцип максимума в полосе, а с ним и теорема Тихонова, доказан.

Приложение к лекции 17

Задачи

Литература

1[П]. *И.Г. Петровский* Лекции об уравнениях математической физики, Физ.-мат. лит., Москва (1961)

2[Ш]. *М.А. Шубин* Лекции об уравнениях математической физики, МЦНМО, Москва (2001)

3[Э]. *Л.К. Эванс Л.К. Эванс* Уравнения с частными производными, Изд. Т. Рожковская, Новосибирск (2003)

4[ЕШ]. *Ю.В. Егоров, М.А. Шубин* Уравнения с частными производными. Основы теории, ВИНИТИ т. 30, Москва (1988)

5[О]. *О.А. Олейник* Уравнения с частными производными, Изд. МГУ (2005)

6[СЗ]. Сборник задач письменных экзаменов