

Глава 1.

Электростатика

1.1. Закон Кулона

Изучение свойств электромагнитного поля мы начнем с простейшего случая электрического поля, постоянного во времени. Лежащий в основе теории экспериментальный факт состоит в отталкивании (притяжении) одноимённых (разноимённых) точечных *электрических зарядов* по закону обратных квадратов

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

где q_1, q_2 — величины зарядов, r — расстояние между ними. Эта формула задает абсолютную величину силы, приложенной к каждому из зарядов вдоль соединяющей их прямой. Обе силы равны по величине и противоположны по направлению в соответствии с третьим законом Ньютона. Соотношение (1.1), описанное впервые Бернулли в 1760 г., носит название *закона Кулона*. В опытах с изобретенными им крутильными весами Кулон в конце 80-х годов XVIII в. существенно улучшил точность электростатических измерений, что и позволило установить зависимость (1.1) достаточно надежно.

С современной точки зрения, носителями заряда являются *элементарные частицы*, причём естественной единицей заряда является заряд электрона e . *Кварки* (элементарные составляющие протона, нейтрона и других сильно-взаимодействующих частиц — адронов) имеют заряд кратный $e/3$, однако изолированные кварки принципиально ненаблюдаемы. Все наблюдаемые заряженные частицы имеют заряд кратный e . В классической электродинамике также используется представление о непрерывном распределении заряда (в объёме, на поверхности или вдоль кривой), что следует понимать как результат *усреднения*. Существенно, что уравнения электродинамики *линейны* и допускают простое усреднение. Явное усреднение является предметом *макроскопической электродинамики сплошных сред* и выходит за рамки данного курса, однако непрерывное распределение заряда $\rho(\mathbf{r})$ часто используется как феноменологическая величина. Определением ее служит выражение для полного заряда Q в произвольно выбранном объеме V :

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.2)$$

Как правило, если не оговорено особо, мы будем использовать декартову систему координат $x^i = (x, y, z)$, при этом $dV = d^3x$. Очевидно, для точечного заряда e , находящегося в точке \mathbf{r}_0 , следует положить

$$\rho = e \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.3)$$

где $\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ — трёхмерная дельта-функция, нормированная соотношением $\int \delta^3(\mathbf{r}) d^3x = 1$ (интегрирование ведется по любой области, содержащей начало координат). Распределение заряда на двумерной поверхности описывается с помощью одномерной дельта-функции, так, плотность заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(x, y) \delta(z) \quad (1.4)$$

соответствует *поверхностной плотности заряда* $\sigma(x, y)$ на плоскости $z = 0$. Плотность заряда вида $\rho(\mathbf{r}) = \lambda(z) \delta(x) \delta(y)$ отвечает бесконечной заряженной нити, ориентированной вдоль оси z .

1.2. Электрическое поле

Сила (1.1), действующая на *пробный* заряд e , находящийся в точке \mathbf{r} , со стороны другого заряда q , положение которого примем за начало координат, может быть представлена в виде

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.5)$$

где \mathbf{E} — напряжённость электрического поля, создаваемого зарядом q . В электростатике понятие электрического поля имеет вспомогательный характер (сила, действующая на единичный заряд), однако при рассмотрении переменных полей движущихся зарядов представление об электрическом поле (вместе с магнитным полем, вводимым в главе 2) как о самостоятельной физической величине приобретает решающее значение.

Получим дифференциальные уравнения для \mathbf{E} , исходя из соотношения (1.5), справедливого для точечного заряда. Используя равенство

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{r^3} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \quad (1.6)$$

которое выполняется в смысле обобщенных функций (для его проверки достаточно выполнить интегрирование по шару произвольного радиуса с центром в начале координат, преобразуя интеграл в левой части в поверхностный по граничной сфере с помощью формулы Остроградского–Гаусса), из (1.5) находим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.7)$$

где ρ даётся формулой (1.3). Теперь мы можем обобщить полученное уравнение на случай произвольного распределения зарядов. Действительно, в силу линейности уравнения (1.7), для двух точечных зарядов ρ_1 и ρ_2 получим $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, т. е. поля складываются как векторы в \mathbb{R}^3 (*принцип суперпозиции*). Поэтому уравнение (1.7) можно экстраполировать как на произвольную систему точечных зарядов, так и на случай их (усреднённого) непрерывного распределения.

В дальнейшем нам встретятся более сложные полевые уравнения, в том числе нелинейные, поэтому уместно сделать здесь следующие общие замечания о допустимых классах решений. Если зависящая от пространственной точки полевая переменная физически измерима, то в реальном процессе измерения можно определить лишь ее среднее значение в некоторой достаточно малой области. Поэтому уже в самом характере физического измерения заложен смысл полевых величин как обобщенных функций. Однако такое представление непротиворечиво лишь в случае, когда полевые уравнения линейны. Последнее верно в электродинамике, но не имеет места, например, в теории гравитации. Тенденция состоит в том, чтобы сохранить максимально широкий класс допустимых функций, совместимый с характером уравнений. Так, функции с конечными разрывами, допускающие перемножение, можно рассматривать и в нелинейном случае (например, ударные волны). В квантовой теории поля не удается избежать перемножения и дельтаобразных сингулярных функций. Для придания смысла этой операции используются различные методы регуляризации с последующим удалением бесконечностей с помощью *перенормировки* входящих в уравнения параметров (таких как масса и заряд). Пример подобной процедуры в классической электродинамике будет рассмотрен в главе 9.

Второе независимое уравнение для электрического поля \mathbf{E} можно получить, применяя к (1.5) операцию rot :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — орты декартовой системы координат. Один-форма, соответствующая ротору вектора в трехмерном пространстве, дуальна в смысле Ходжа внешнему дифференциалу от один-формы, отвечающей исходному вектору: $\operatorname{rot} \mathbf{E} = *d\mathbb{E}$, $\mathbb{E} = E_i dx^i$. Этим соотношением удобно пользоваться при необходимости записи ротора в произвольных координатах. Как и (1.7), уравнение (1.8) обобщается на случай суммарного поля произвольной системы точечных зарядов либо их непрерывного распределения.

Рассмотрим произвольную замкнутую кривую без самопересечений, которую представим в виде границы некоторой двумерной поверхности, и вычислим поток вектора $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ через эту поверхность, преобразуя поверхностный интеграл к интегралу вдоль кривой с помощью теоремы Стокса. В результате будем иметь

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.9)$$

вдоль любой замкнутой кривой. Это соотношение означает равенство нулю работы при перемещении заряда вдоль замкнутого пути или, что эквивалентно, независимость работы при перемещении заряда из одной точки в другую от формы пути.

Рассмотрим некоторую систему зарядов, описываемую плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Выберем произвольную компактную область V с ориентированной границей ∂V и проинтегрируем (1.7) по объёму, преобразовав объёмный интеграл в поверхностный. В результате получаем утверждение, известное как *электростатическая теорема Гаусса*

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q_V \equiv 4\pi \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3x, \quad (1.10)$$

в котором левая часть представляет собой поток вектора \mathbf{E} через поверхность ∂V . Заметим, что отсутствие зарядов вне области V не предполагается, но такие заряды, как следует из (1.10), не дают вклада в поток \mathbf{E} через границу V . Физически это можно связать с законом обратных квадратов (1.1): потоки поля \mathbf{E} от внешнего заряда q_{ext} через элементы поверхности S_1 и S_2 , пропорциональные квадратам расстояний r_1 и r_2 от заряда, взаимно уничтожаются (рис.1.1).

Соотношение (1.10) позволяет легко найти напряжённость поля некоторого симметричного распределения заряда (шар, цилиндр, плоскость), если выбрать область интегрирования V соответствующей данной симметрии.

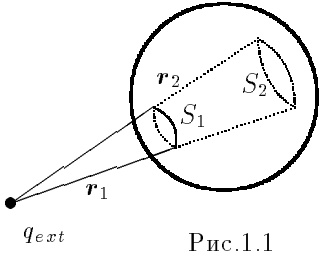


Рис.1.1

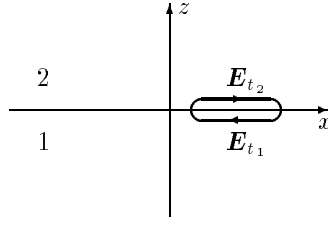


Рис.1.2

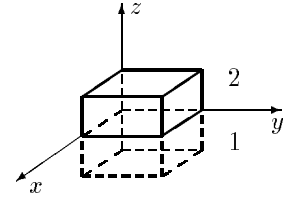


Рис.1.3

Для нахождения электрического поля, порождаемого заданным источником $\rho(\mathbf{r})$, определяющую систему уравнений (1.7)–(1.8) следует дополнить подходящими граничными условиями. Например, если функция $\rho(\mathbf{r})$ имеет компактный носитель, то, в силу (1.5), поле должно обращаться в нуль на бесконечности. Общее решение уравнения (1.7) можно представить в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Для получения физического решения необходимо учесть граничные условия. Так, однородному уравнению (1.7), а также уравнению (1.8) удовлетворяет постоянный вектор \mathbf{E}_0 , однако это поле не убывает на бесконечности и должно быть опущено. В реальных задачах граничные условия могут быть более сложными.

Как было сказано выше, решения основных уравнений электростатики (1.7), (1.8) следует рассматривать на множестве обобщённых функций. При этом вектор электрического поля \mathbf{E} может иметь разрывы. Получим граничные условия для \mathbf{E} на заряженной поверхности, выбирая для простоты распределение заряда вида (1.4). Применяя соотношение (1.9) к контуру, показанному на (рис. 1.2), найдём, что тангенциальная составляющая поля $\mathbf{E}_t = [\mathbf{E} \times \mathbf{n}]$, где \mathbf{n} — нормаль к поверхности, направленная вдоль оси z , должна быть непрерывна,

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}. \quad (1.11)$$

Для получения соотношения между нормальными составляющими $E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ применим электростатическую теорему Гаусса (1.10) к малому параллелепипеду (см. рис. 1.3), высоту которого устремим к нулю. Тогда поток через боковую поверхность исчезает, и мы находим

$$E_{n1} - E_{n2} = 4\pi\sigma, \quad (1.12)$$

т. е. скачок нормальной составляющей пропорционален поверхностной плотности заряда.

1.3. Электростатический потенциал

Уравнение (1.8) означает, что электростатическое поле является потенциальным, и его *силовые линии* (к которым вектор \mathbf{E} является касательным) незамкнуты. Действительно, один-форма $\mathbb{E} = E_i dx^i$ замкнута в \mathbb{R}^3 : $d\mathbb{E} = 0$. В силу леммы Пуанкаре, эта форма точна, $\mathbb{E} = -d\varphi$, иначе говоря, поле \mathbf{E} можно представить в виде градиента скалярной функции $-\varphi(\mathbf{r})$ (минус вводится для удобства физической интерпретации)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (1.13)$$

называемой *потенциалом*. Силовые линии поля \mathbf{E} ортогональны поверхностям постоянного потенциала. Работа, совершаемая полем при перемещении заряда e из точки 1 в точку 2, будет равна

$$\mathcal{A} = e \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.14)$$

где интеграл вычисляется вдоль любой кривой, соединяющей точки 1 и 2.

Подставляя (1.13) в (1.7), получаем уравнение Пуассона для φ

$$\Delta \varphi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = -4\pi\rho, \quad (1.15)$$

где использованы декартовы координаты. Заметим, что в произвольных координатах x^i , отвечающих элементу длины

$$dl^2 = h_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad (1.16)$$

оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i \left(h^{ij} \sqrt{h} \partial_j \varphi \right), \quad (1.17)$$

где h^{ij} — тензор, обратный к h_{ij} , и $h = \det h_{ij}$.

В области, где $\rho = 0$, потенциал является гармонической функцией:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1.18)$$

Отсюда следует, например, что $\mathbf{E} = 0$ внутри замкнутой проводящей поверхности, если там нет других зарядов. На такой поверхности $\varphi = \text{const}$ (иначе произойдёт перераспределение зарядов), и, следовательно, в силу принципа экстремума для гармонических функций, $\varphi = \text{const}$ всюду внутри неё.

Другое следствие гармоничности потенциала в пустом пространстве — неустойчивость статической системы точечных зарядов. Действительно, чтобы некоторый выбранный заряд находился в устойчивом равновесии с остальными, потенциальная энергия, которой он обладает в поле φ , создаваемом остальными зарядами, $U = e\varphi$, должна иметь минимум, т. е.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0. \quad (1.19)$$

В этом рассуждении выбранный заряд рассматривается как пробный в поле всех остальных зарядов, т. е. потенциал φ в данной точке удовлетворяет уравнению (1.18), что противоречит (1.19), ч. т. д.

Нетрудно доказать следующую теорему единственности для уравнения Пуассона (1.15). Решение электростатической задачи $\mathbf{E} = \text{grad } \varphi$ единственно в компактной области V с границей ∂V , если плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$ задана всюду в V , и на границе задан либо потенциал φ , либо его нормальная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$. Действительно, пусть имеются два решения φ_1 и φ_2 , удовлетворяющие уравнению (1.15). Применим формулу Остроградского–Гаусса к вектору $\psi \nabla \psi$, где $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\int_V \text{div}(\psi \nabla \psi) d^3x = \int_V ((\nabla \psi)^2 + \psi \Delta \psi) d^3x = \int_{\partial V} (\psi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial V} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.20)$$

Интеграл равен нулю в силу граничных условий, кроме того $\Delta \psi = 0$. Остаётся объёмный интеграл от положительно определённой величины $(\nabla \psi)^2$, следовательно, $\psi = \text{const}$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const}$. Электростатическое поле \mathbf{E} при этом определено однозначно. Эти соображения остаются справедливыми, если граница ∂V отодвигается на бесконечность.

Примером применения теоремы единственности является электростатический метод изображений. Пусть требуется найти распределение заряда $\sigma(x, y)$, индуцированное точечным зарядом q , находящимся на расстоянии d от проводящей поверхности, которая «заземлена» (т. е. является поверхностью постоянного потенциала, принимаемого за нуль), рис.1.4а.

Такое же значение потенциала на плоскости $z = 0$ имеет система двух точечных зарядов q и $-q$, симметрично расположенных относительно этой плоскости в отсутствие проводящей поверхности (см. рис.1.4б). Замыкая верхнее полупространство бесконечно удалённой полусферой (на которой также $\varphi = 0$), получаем в этой области в обоих случаях одинаковую электростатическую задачу. Таким образом, искомое электростатическое поле над проводящей поверхностью равно

$$\mathbf{E} = q \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{d}}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|^3} \right) \theta(z), \quad (1.21)$$

где $\theta(z)$ — функция Хевисайда. Взяв дивергенцию от этого выражения с учётом соотношений (1.7), (1.4) и $\theta'(z) = \delta(z)$, нетрудно получить распределение поверхностного заряда $\sigma(x, y)$ на проводящей плоскости (при этом дифференцировать выражение в круглых скобках не нужно вовсе, поскольку соответствующая дивергенция заведомо равна нулю на плоскости $z = 0$):

$$\sigma(x, y) = \frac{qd}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

В случае достаточно быстрого убывания плотности заряда $\rho(\mathbf{r})$ на бесконечности, решение уравнения (1.15) можно записать в виде объёмного интеграла

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x', \quad (1.22)$$

где интегрирование ведётся по всему пространству. Соотношение (1.22) следует из равенства

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.23)$$

вытекающего из (1.6). Представление электростатического потенциала в виде (1.22) имеет смысл для таких распределений заряда $\rho(\mathbf{r}')$, для которых интеграл конечен при всех \mathbf{r} .

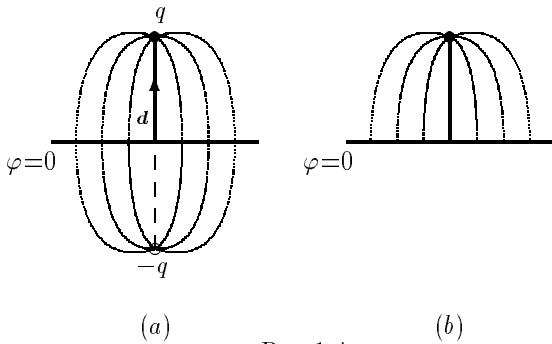


Рис.1.4

1.4. Энергия электрического поля

Хотя электрическое поле \mathbf{E} в электростатике было введено лишь для удобства описания взаимодействия зарядов, можно показать, что энергия системы зарядов допускает представление в виде объёмного интеграла от $\mathbf{E}^2/8\pi$. Это наводит на мысль, что энергия взаимодействия электрических зарядов распределена в пространстве, и её носителем является поле \mathbf{E} . То, что это действительно так, будет ясно позже при рассмотрении переменного электромагнитного поля.

Рассмотрим пару зарядов q_1 и q_2 в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Можно считать, что эта конфигурация возникла в результате перемещения заряда q_2 из бесконечности в точку \mathbf{r}_2 в поле заряда q_1 с потенциалом $\varphi_{q_1}(\mathbf{r})$. Пусть $\varphi_{q_1}(\infty) = 0$, тогда совершаемая работа есть $q_2\varphi_{q_1}(\mathbf{r}_2)$. Меняя заряды местами, найдём, что та же работа равна $q_1\varphi_{q_2}(\mathbf{r}_1)$, или, в симметричной форме,

$$U = \frac{1}{2}(q_1\varphi(\mathbf{r}_1) + q_2\varphi(\mathbf{r}_2)). \quad (1.24)$$

В этой формуле предполагается, что потенциал φ в точке нахождения каждого из зарядов создается другим зарядом, т. е. собственный потенциал заряда опускается. Более последовательно устранение бесконечной собственной энергии точечного заряда достигается путем перенормировки его массы, что будет проведено в главе 9 в рамках полной динамической задачи. Здесь же мы перейдем от точечных зарядов к непрерывному распределению ρ , при этом проблема собственной электростатической энергии точечных зарядов снимается, и вместо 1.24 будем иметь

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi(\mathbf{r}) d^3x. \quad (1.25)$$

С помощью (1.15) преобразуем это выражение к виду

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \varphi \Delta \varphi d^3x = -\frac{1}{8\pi} \int \nabla(\varphi \nabla \varphi) d\mathbf{x} + \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \varphi)^2 d^3x. \quad (1.26)$$

Первый интеграл в правой части выражается через интеграл по бесконечно удалённой поверхности, причём в случае распределения заряда в ограниченном объёме φ убывает как $\frac{1}{r}$, а $\nabla \varphi$ — как $\frac{1}{r^2}$, и интеграл оказывается равным нулю. Учитывая (1.13), имеем

$$U = \int \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} d^3x. \quad (1.27)$$

Таким образом, величина $\mathbf{E}^2/8\pi$ имеет смысл плотности энергии электрического поля. В приведённом рассуждении вычислялась полная энергия поля во всём пространстве; далее мы увидим, что эта интерпретация правильна и при рассмотрении поля в произвольном конечном объёме.

Глава 2.

Постоянное магнитное поле

2.1. Закон Ампера

Взаимодействие *движущихся* зарядов уже не сводится к чисто кулоновскому (1.1). Помимо электрического, возникает также *магнитное* поле. Магнитное поле порождается электрическим током. Если имеются носители заряда одного вида (например, электроны) с плотностью заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$, то их движение, описываемое полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, соответствует *плотности электрического тока*

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

Выделим в пространстве некоторую поверхность S , тогда поток вектора \mathbf{j} через неё равен заряду, переносимому через S в единицу времени:

$$\frac{dQ(S)}{dt} = J(S) = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.2)$$

Величина $J(S)$ есть *полный ток* через площадку S .

Если имеются носители заряда различного типа (электроны, протоны, ионы атомов и молекул), то вместо (2.1) следует написать

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a \rho_a(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

где суммирование производится по всем типам носителей заряда. В этом случае среда может быть *электронейтральной*,

$$\rho = \sum_a \rho_a = 0, \quad (2.4)$$

однако плотность тока при этом может быть отлична от нуля. Например, в металлах движущимися зарядами являются электроны, в то время как положительные ионы кристаллической решётки неподвижны. Плотность заряда электронов равна плотности заряда ионов и имеет противоположный знак, поэтому усредненная полная плотность заряда равна нулю. Однако плотность тока, отвечающая движению только электронов, отлична от нуля. В настоящем разделе обсуждается случай $\rho = 0$, $\mathbf{j} \neq 0$ при дополнительном предположении *стационарности*, когда плотность тока не зависит от времени, т. е. $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ (магнитостатика).

Наиболее просто новые закономерности проявляются в случае токов, текущих по бесконечно тонким проводникам. Рассмотрим два тока J_1 и J_2 , участки которых показаны на рис.2.1. Закон, установленный Ампером в 1820 г., гласит, что два *элемента тока* $J_1 d\mathbf{l}_1$ и $J_2 d\mathbf{l}_2$ взаимодействуют с силой

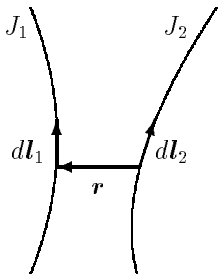


Рис.2.1

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2} \int \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ — радиус-вектор, соединяющий элементы тока, расположенные в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , c — постоянная размерности скорости (размерность c легко установить, сопоставляя соотношения (1.1), (2.2), (2.5)). Формула (2.5) определяет силу, действующую на элемент $J_1 d\mathbf{l}_1$ со стороны элемента $J_2 d\mathbf{l}_2$. Вообще говоря,

$$d\mathbf{F}_{12} \neq -d\mathbf{F}_{21}, \quad (2.6)$$

так что для элементов тока не выполняется третий закон Ньютона. Однако силы, действующие на полные замкнутые токи, равны по величине и противоположны по знаку, в чем нетрудно убедиться, интегрируя (2.5) по замкнутым контурам.

2.2. Магнитное поле

Так же, как и в случае электростатического взаимодействия, удобно представить силу (2.5) в виде

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1}{c} [d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1)], \quad (2.7)$$

где

$$d\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{J_2}{c} \frac{[d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \quad (2.8)$$

— элемент *магнитного поля*, порождаемого элементом тока $J_2 d\mathbf{l}_2$. Полное магнитное поле тока J равно

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \int \frac{[d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.9)$$

где интегрирование ведётся по всему контуру с током (\mathbf{r}' — координата элемента $d\mathbf{l}'$). Соотношение (2.9) называется законом Био–Савара. Формулу (2.9) с учётом (2.2) можно также переписать в виде объёмного интеграла

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3x', \quad (2.10)$$

который имеет смысл и для проводников конечного сечения и вообще произвольной стационарной плотности тока. Можно также понимать силу (2.7) как сумму сил, приложенных к отдельным точечным зарядам, образующим элемент тока. Элементарная сила, действующая на заряд e легко находится при учёте соотношения (2.1):

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.11)$$

и называется *силой Лоренца*. Заметим, что плотность тока точечного заряда, движущегося со скоростью \mathbf{v} вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, в соответствии с (1.3) и (2.1) равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad (2.12)$$

где $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$. Эта величина зависит не только от координат, но и от времени, поэтому магнитное поле отдельного движущегося заряда уже не будет стационарным.

Получим дифференциальные уравнения для магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Применим сначала к (2.10) оператор div . В подынтегральном выражении будем иметь смешанное произведение оператора ∇ , плотности тока и радиуса-вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Изменив порядок в этом произведении и учитывая, что $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = -\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, получим нуль. Таким образом,

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.13)$$

Это уравнение означает отсутствие магнитных зарядов. Следовательно, силовые линии магнитного поля не имеют начала и конца, и либо замкнуты, либо уходят на бесконечность. Мы получили это утверждение на основании закона взаимодействия элементов тока, известного уже в начале XIX в. и фактически относящегося к электронам. С тех пор не было получено никаких экспериментальных указаний на существование в природе магнитных зарядов, во всяком случае все известные элементарные частицы магнитных зарядов не имеют. Однако с точки зрения некоторых современных теорий существование магнитных зарядов в принципе не исключено, возможно их элементарные носители имеют весьма большую массу и не могут быть получены на существующих ускорителях.

Второе дифференциальное уравнение для магнитного поля можно получить, применяя к уравнению (2.10) операцию rot . Это даёт в подынтегральном выражении двойное векторное произведение, при раскрытии которого следует воспользоваться формулой (1.6). Возникающая дельта-функция позволяет выполнить интегрирование, и мы получаем дифференциальное соотношение

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.14)$$

Таким образом, магнитное поле является чисто соленоидальным. Циркуляция \mathbf{B} вдоль замкнутого контура вычисляется интегрированием (2.14) с помощью формулы Стокса.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} J, \quad (2.15)$$

где контур ∂S является границей поверхности S , J — полный ток через S . Это соотношение позволяет легко вычислить напряженность магнитного поля, порождаемого бесконечным тонким прямолинейным током J , ориентированным вдоль оси z . Выбирая контур в виде окружности радиуса r вокруг оси z и учитывая, что силовые линии имеют

вид концентрических окружностей, находим $B = 2J/cr$. Такой же закон спадаения мы имели бы для электростатического поля точечного заряда в двумерном пространстве.

Помимо бесконечно тонких нитей и объёмного распределения токов полезно ввести также поверхностные токи. Так, если проводником является плоскость $z = 0$, будем иметь

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(x, y) \delta(z), \quad (2.16)$$

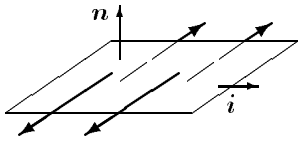


Рис.2.2

где $\mathbf{i}(x, y)$ — поверхностная плотность тока. Найдём граничные условия для вектора \mathbf{B} , интегрируя уравнение (2.14) вдоль контура (рис.1.2) и применяя теорему Остроградского–Гаусса к уравнению (2.13), как показано на рис.1.3. В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{t1} - \mathbf{B}_{t2} &= [\mathbf{n} \times \mathbf{i}], \\ B_{n1} &= B_{n2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности, направленный из области 1 в область 2. Отсюда нетрудно понять, что если вектор \mathbf{i} ориентирован вдоль оси x , то возникает однородное магнитное поле, направленное против y в верхнем полупространстве, и вдоль оси y в нижнем (рис.2.2).

При использовании криволинейных координат полезна запись уравнения (2.14) с помощью дифференциальных форм

$$d\mathbb{B} = \frac{4\pi}{c} *j, \quad \mathbb{B} = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.18)$$

где $*j$ — 2-форма дуальная 1-форме $j = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}$. Интегральное соотношение (2.15) принимает вид

$$\oint_{\partial S} \mathbb{B} = \frac{4\pi}{c} \int_S *j. \quad (2.19)$$

2.3. Вектор-потенциал

Условие *соленоидальности* (2.13) означает, что поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ можно представить в виде ротора другого векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (2.20)$$

называемого *вектор-потенциалом*, на языке форм $\mathbb{B} = d\mathbb{A}$, где $\mathbb{A} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. При такой параметризации уравнение (2.13) будет выполнено автоматически, а из (2.14) получаем

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.21)$$

Это уравнение можно упростить, учитывая произвол в выборе вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, порождающего заданное магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Действительно, преобразование

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \psi(\mathbf{r}) \quad (2.22)$$

не изменяет \mathbf{B} . Выбором ψ можно добиться выполнения дополнительного условия

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (2.23)$$

так что уравнение (2.21) принимает вид аналогичный (1.5):

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.24)$$

Здесь подразумевается выбор декартовых координат, при этом оператор Лапласа действует на каждую компоненту вектора как на скаляр.

Физический смысл вектор-потенциала раскрывается при вычислении потока магнитного поля через площадку S с границей ∂S

$$\Phi \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.25)$$

т.е. магнитный поток равен циркуляции вектора \mathbf{A} вдоль границы.

В случае локализованной системы токов $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ решение уравнения (2.24) можно представить в форме объёмного интеграла, аналогичного (1.22)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x'. \quad (2.26)$$

Здесь интегрирование ведётся по всему пространству, где \mathbf{j} отлична от нуля, причем предполагается, что интеграл сходится при всех \mathbf{r} .

2.4. Работа магнитного поля при перемещении контура с током

Сила Лоренца (2.11) ортогональна скорости, и потому не совершает работы при перемещении *заряда*. Однако сила Ампера (2.7), приложенная к элементу *тока*, совершает работу при перемещении $\delta \mathbf{r}$ не параллельном $d\mathbf{l}_1$. Очевидное

различие этих ситуаций в том, что в случае отдельного заряда его перемещение вызывается самим магнитным полем, в случае же элемента тока перемещение зарядов является независимым от их скорости и происходит вместе с (произвольным) перемещением проводника. Вычислим работу, совершаемую при малом перемещении контура с током, как показано на рис.2.3. При этом перемещении контур заметает поверхность цилиндра с основанием S_1 (начальное положение поверхности, границей которой является контур) и S_2 (её конечное положение). Работа равна произведению силы на перемещение:

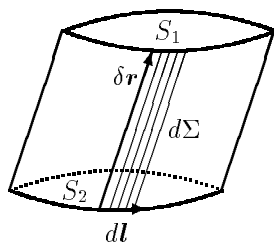


Рис.2.3

$$\delta \mathcal{A} = \frac{J}{c} \oint [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (2.27)$$

где интегрирование ведётся вдоль контура с током. Изменив порядок множителей в смешанном произведении, будем иметь

$$\delta \mathcal{A} = \frac{J}{c} \oint \mathbf{B} \cdot [\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{l}] = \frac{J}{c} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Sigma}, \quad (2.28)$$

где $d\mathbf{\Sigma} = [\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{l}]$ есть элемент боковой поверхности цилиндра. Нетрудно понять, что в силу соленоидальности вектора \mathbf{B} поток через (ориентированную) боковую поверхность цилиндра будет равен разности потоков через основания цилиндра S_2 и S_1 , ориентация которых связана с направлением обхода правилом правого винта. Поэтому работа при перемещении контура с током пропорциональна изменению магнитного потока через этот контур:

$$\delta \mathcal{A} = \frac{J}{c} \delta \Phi, \quad \delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1, \quad \Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad i = 1, 2. \quad (2.29)$$

Отсюда вытекает простое правило: контур с током стремится ориентироваться в магнитном поле так, чтобы поток поля через него имел максимальное значение.

2.5. Энергия магнитного поля

Используя выражение для потока магнитного поля через циркуляцию вектор-потенциала (2.25), можем переписать (2.29) в виде

$$\delta \mathcal{A} = \frac{J}{c} \delta \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \delta \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} d^3x, \quad (2.30)$$

где от интегрирования по контуру с током мы перешли к интегрированию по всему объёму, вводя плотность тока в соответствии с (2.2). Эта формула выражает работу *внешнего* магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ над *пробным* током плотности \mathbf{j} .

Рассмотрим теперь работу, которую нужно совершить, чтобы сблизить два контура с токами \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 , первоначально разнесёнными на большое расстояние, где их взаимодействие исчезает. Произведённая работа будет равна взаимной энергии токов U . Так же, как и в случае зарядов (раздел 1.4), один из токов следует считать источником магнитного поля, а второй ток пробным. В симметричной относительно \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 форме выражение для работы будет равно

$$U = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{j}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{j}_2) d^3x = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) d^3x \quad (2.31)$$

Здесь при переходе к суммарному току $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ учтено, что собственное магнитное поле не совершает работы над создающим это поле током, поэтому под \mathbf{A} можно понимать вектор-потенциал полного тока \mathbf{j} .¹ Выражение (2.31) можно преобразовать, используя уравнение (2.24) для \mathbf{A} :

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A} d^3x. \quad (2.32)$$

С помощью соотношения

$$\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}^2 + \mathbf{A} \Delta \mathbf{A}. \quad (2.33)$$

¹При переходе к точечным зарядам необходимо более детальное рассмотрение, см. раздел 9.

(здесь учтено, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$), в интеграле можно выделить поверхностный член, который обращается в нуль, если вектор-потенциал \mathbf{A} спадает на бесконечности как $\frac{1}{r}$ и, соответственно, \mathbf{B} — как $\frac{1}{r^2}$. В результате находим

$$U = \int \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} d^3x. \quad (2.34)$$

Таким образом можно считать, что взаимная энергия токов сосредоточена в создаваемом ими магнитном поле, причем величина $\mathbf{B}^2/8\pi$ имеет смысл плотности энергии магнитного поля.

Глава 3.

Переменное электромагнитное поле

В общем случае система движущихся зарядов характеризуется отличными от нуля плотностью заряда ρ и тока \mathbf{j} , которые являются функциями координат и времени. При этом обнаруживается внутренняя взаимосвязь между электрическим и магнитным полями, которые оказываются различными проявлениями единого *электромагнитного* поля. Электромагнитное поле можно понимать как совокупность векторных полей $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$, однако уравнения для этих полей в нестационарном случае уже не будут простым объединением уравнений электростатики (1.7), (1.8) и магнитостатики (2.13), (2.14).

3.1. Закон индукции Фарадея

Одной из новых закономерностей является закон электромагнитной индукции. Если в пространстве возбуждено магнитное поле, зависящее от времени, то генерируется *соленоидальная* компонента электрического поля, которая в электростатике была равна нулю, см. (1.8). Закон, установленный Фарадеем, гласит, что циркуляция вектора \mathbf{E} через контур ∂S пропорциональна взятой со знаком минус производной по времени от потока магнитного поля через поверхность S , границей которой является контур ∂S :

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}; \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S}. \quad (3.1)$$

Измерения показывают, что коэффициент пропорциональности есть $\frac{1}{c}$, где c — та же постоянная размерности скорости, которая входит в закон магнитного взаимодействия элементов тока (2.5) (*электродинамическая постоянная*). Напомним, что эта постоянная была введена в (2.5) из соображений размерности. Ее присутствие в выражении для магнитного поля элемента тока (2.7) означает, что \mathbf{E} и \mathbf{B} измеряются в одинаковых единицах, такая система единиц называется гауссовой.

Знак минус в законе Фарадея указывает на направление электрического поля (*электродвижущей силы*), при этом подразумевается, что ориентация площадки S связана с направлением обхода контура ∂S правилом правого винта. Преобразовав левую часть с помощью теоремы Стокса, получаем

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.2)$$

и, следовательно, в силу произвольности S , для полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ имеет место дифференциальное соотношение

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Это уравнение переходит в уравнение электростатики (1.8), если поля не зависят от времени. Таким образом потенциальный характер поля в электростатике является не абсолютным свойством электрического поля, а лишь следствием отсутствия переменного магнитного поля.

Возникает естественный вопрос, что произойдет, если в пространстве, где существует неоднородное *постоянное* магнитное поле, перемещать замкнутый проводящий контур. Опыт показывает, что если поток магнитного поля через контур зависит от времени, то возникает электродвижущая сила в полном соответствии с законом Фарадея. Этот результат можно интерпретировать и иначе: если в некоторой системе отсчета имеется чисто магнитное поле, то в системе, движущейся относительно нее, присутствует также и электрическое поле. Мы приходим к важному заключению, что электрическое и магнитное поля не только связаны между собой соотношением (3.3), но и действительно являются различными формами единого электромагнитного поля.

Заметим, что в рассуждениях предыдущего раздела мы получили выражение для энергии контура с током в магнитном поле не учитывая фарадеевской индукции, т.е. предполагая, что перемещение контура происходит *адиабатически*, с исчезающе малой скоростью. Мы вернёмся ниже к вопросу об энергии электромагнитного поля без этого ограничения, при этом оказывается, что выражение для плотности энергии $(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/8\pi$ сохраняет свою справедливость и в общем случае переменного электромагнитного поля.

3.2. Сохранение заряда и ток смещения

Можно попытаться формально объединить уравнения для \mathbf{E} и \mathbf{B} , полученные в предыдущих главах, с законом электромагнитной индукции, тем самым распространив их на случай переменного электромагнитного поля. Однако при этом обнаруживается, что система уравнений будет несовместна с законом сохранения электрического заряда, справедливость которого подтверждается в многочисленных экспериментах. Этот закон гласит, что заряды могут лишь перемещаться в пространстве, но не могут появляться или исчезать (в частности, рождение заряженных частиц при столкновениях частиц высоких энергий всегда происходит так, что суммарный заряд не изменяется). Математическим выражением закона сохранения заряда является уравнение непрерывности для плотностей заряда и тока ρ и \mathbf{j} , зависящих от координат и времени:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.4)$$

Проинтегрировав (3.4) по некоторому объёму V , найдем, что изменение полного заряда в этом объёме равно взятому со знаком минус полному потоку вектора \mathbf{j} через границу ∂V объёма V , равного заряду, протекающему через ∂V в единицу времени.

Дифференцируя уравнение (1.7) для дивергенции электрического поля, находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.5)$$

поскольку операторы ∇ и ∂_t перестановочны. С другой стороны, если экстраполировать уравнение магнитостатики (2.14) на случай переменных полей, то из него следовало бы $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Замечательно, что правильная форма уравнения для $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ в случае переменных полей была найдена Максвеллом «на кончике пера» и лишь затем подвергнута экспериментальной проверке. Для совместности с уравнением непрерывности Максвелл дополнил правую часть (2.14) *током смещения*

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

С физической точки зрения наличие в правой части (2.14) тока смещения означает возможность порождения магнитного поля переменным электрическим полем в отсутствие реальных токов. В этом можно усмотреть прямую аналогию с законом электромагнитной индукции. Следует обратить внимание на то, что производная от электрического поля будет входить в уравнение с другим знаком. Это обстоятельство имеет важнейшее значение, благодаря ему возможен процесс взаимной трансформации вихревых электрического и магнитного полей в пространстве, который представляет собой не что иное как распространение *электромагнитных волн*. Именно обнаружение электромагнитных волн в опытах Герца и послужило главной экспериментальной проверкой гипотезы Максвелла о токе смещения.

Итак, объединяя уравнения (1.7), (2.13), (3.3) и (1.8) с током смещения (3.6), получаем полную систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Теперь закон сохранения заряда (3.4) является следствием полевых уравнений: дифференцируя (3.7) по времени и беря дивергенцию от (3.9), получим (3.4). Заметим, что уравнение непрерывности (3.4) выполняется автоматически для плотности заряда (1.3) и тока (2.12) точечного заряда.

3.3. Энергия и импульс электромагнитного поля

Рассмотрим систему из N зарядов e_a , $a = 1, \dots, N$, движущихся в самосогласованном электромагнитном поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ вдоль кривых $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a(t)$. Каждому заряду соответствует кинетическая энергия \mathcal{E}_a и импульс \mathbf{p}_a , причём

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{f}_a = e_a \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a, t)] \right), \quad (3.11)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_a}{dt} = \mathbf{f}_a \mathbf{v}_a = e_a \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) \mathbf{v}_a, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{v}_a = d\mathbf{r}_a/dt$. Заметим, что здесь не предполагается определённой зависимости \mathcal{E}_a и \mathbf{p}_a от \mathbf{v}_a . Формулировка механики, совместимой с уравнениями Максвелла, является предметом следующих лекций. Пока же мы воспользуемся

лишь общими представлениями об импульсе как величине, производная от которой равна действующей силе, и об энергии как величине, производная от которой равна работе (в единицу времени) этой силы.

Плотность заряда и плотность тока системы точечных зарядов имеют вид

$$\rho = \sum_{a=1}^N e_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{a=1}^N e_a \mathbf{v}_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (3.14)$$

Для вывода закона сохранения энергии из уравнений Максвелла предварительно построим *вектор Пойнтинга*

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \quad (3.15)$$

и вычислим его дивергенцию, воспользовавшись формулой, аналогичной (2.33):

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B}). \quad (3.16)$$

С помощью уравнений (3.9),(3.10) преобразуем это выражение к виду

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2}{8\pi} \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (3.17)$$

Подставив \mathbf{j} в виде (3.14) и проинтегрировав по объёму V с границей ∂V , найдём

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d^3x + \sum_{a=1}^N e_a \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) \mathbf{v}_a + \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.12), получаем соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_a \mathcal{E}_a + \int_V \mathcal{W} d^3x \right) = - \oint \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (3.19)$$

выражающее закон сохранения энергии. Здесь

$$\mathcal{W} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \quad (3.20)$$

представляет собой плотность энергии электромагнитного поля, эта величина, не зависящая от производных полей по времени, является суммой выражений найденных ранее при рассмотрении статических полей. Левая часть (3.19) таким образом представляет собой изменение в единицу времени полной энергии системы заряженных частиц и создаваемого ими электромагнитного поля. Согласно (3.19), эта величина, вообще говоря, не равна нулю, а её изменение определяется потоком вектора Пойнтинга (3.15) через границу рассматриваемого объёма. Отсюда ясен физический смысл вектора \mathbf{S} как плотности потока энергии, т. е. энергии, переносимой электромагнитным полем через единичную площадку с нормалью вдоль \mathbf{S} .

Рассмотрим теперь производную по времени от величины \mathbf{S}/c^2 , выражая $\partial \mathbf{E}/\partial t$ и $\partial \mathbf{B}/\partial t$ из уравнений (3.9),(3.10)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = -\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{4\pi} \left([\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] - [\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}] \right). \quad (3.21)$$

Векторные произведения в круглых скобках перепишем в виде

$$[\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] = \partial_k (B B_k) - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \nabla \frac{\mathbf{B}^2}{2}, \quad (3.22)$$

где по векторному индексу k подразумевается суммирование, и аналогично для \mathbf{E} . Наконец, воспользуемся уравнениями (3.7) и (3.8) для дивергенций \mathbf{E} и \mathbf{B} и подставим ρ и \mathbf{j} из (3.13),(3.14). В результате интегральная форма уравнения (3.21) принимает вид, аналогичный (3.19):

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N p_a + \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{S} d^3x \right) = - \oint_{\partial V} \boldsymbol{\tau}_k d\sigma^k, \quad (3.23)$$

где $\boldsymbol{\tau}_k$ — совокупность величин, образующих симметричный тензор второго ранга

$$\tau_{ik} = (\boldsymbol{\tau}_k)_i = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k \right). \quad (3.24)$$

Мы видим, что интеграл от величины \mathbf{S}/c^2 входит в закон сохранения аддитивно с импульсами частиц. Поэтому эту величину естественно интерпретировать как плотность импульса электромагнитного поля. Одновременно выясняется двойственность смысла вектора \mathbf{S} : как было показано выше, величина \mathbf{S} также является плотностью потока энергии электромагнитного поля. Далее мы увидим, что это не является простым совпадением и связано с тем, что электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью c .

Левая часть (3.23) представляет собой изменение полного импульса зарядов и поля в объёме V . Отсюда следует, что величина $\tau_k d\sigma^k$ является силой, приложенной к системе зарядов со стороны поля, которая сведена к поверхностной силе, «действующей» на элемент граничной поверхности $d\sigma^k$. Возможность сведения объёмных сил к поверхностным существует и для сил другой природы, например, упругих сил в твёрдых телах. По аналогии тензор τ_{ik} называется *тензором напряжений* (или натяжений) электромагнитного поля.

3.4. Единственность решений уравнений Максвелла

Сформулируем постановку начальной/граничной задачи для уравнений Максвелла. Пусть заданы источники ρ , \mathbf{j} всюду в некотором ограниченном объёме V при всех t , а также заданы начальные значения электрического и магнитного полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t=0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t=0)$ всюду в V . Предположим кроме того, что на границе ∂V задана тангенциальная компонента электрического $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$, либо магнитного поля $[\mathbf{n} \times \mathbf{B}]$, где \mathbf{n} — нормаль к ∂V , для всех t . Тогда уравнения (3.7)–(3.10) имеют единственное решение $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ всюду в V .

Для доказательства этого утверждения предположим, что существуют два различных решения $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t)$. Построим векторы

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2, \quad (3.25)$$

удовлетворяющие свободным уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}' &= 0 = \operatorname{div} \mathbf{B}', \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{E}' \Big|_{t=0} = \mathbf{B}' \Big|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{r} \in V, \quad (3.27)$$

и условиями на границе

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}'] \Big|_{\partial V} = 0, \quad \text{либо} \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{B}'] \Big|_{\partial V} = 0. \quad (3.28)$$

Повторяя выкладки, приведшие к (3.19), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2}{8\pi} d^3x = -\frac{c}{4\pi} \oint_{\partial V} [\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'] \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (3.29)$$

Поскольку $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} d\sigma$, подынтегральное выражение в правой части (3.29) равно нулю в силу (3.28). Значение интеграла в левой части обращается в нуль при $t=0$ в силу (3.27), следовательно, интеграл равен нулю при всех t . Из положительной определённости подынтегрального выражения тогда следует, что $\mathbf{E}' = 0 = \mathbf{B}'$ для $\mathbf{r} \in V$ при всех t , ч. т. д.

Заметим, что в такой постановке задачи ищется электромагнитное поле, создаваемое *заданным* распределением зарядов и токов. Если систему (3.7)–(3.10) дополнить уравнениями движения частиц, то можно рассматривать задачу о *самосогласованном* решении уравнений движения зарядов и создаваемого ими поля.

Глава 4.

Электромагнитные волны

Из результатов предыдущего раздела следует, что электромагнитное поле обладает энергией и импульсом и, следовательно, является самостоятельным физическим объектом, а не просто удобным средством описания взаимодействия движущихся зарядов. Дальнейшее обоснование этого положения состоит в изучении решений *однородных* уравнений Максвелла в отсутствие источников ρ и \mathbf{j} . Система (3.7)–(3.10) при $\rho = \mathbf{j} = 0$ принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Как электрическое, так и магнитное *свободные* поля соленоидальны; имеется также симметрия относительно замены $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ (преобразование дуальности). Из уравнений (4.2) можно исключить одно из полей, взяв ротор и производную по времени и учитывая (4.1):

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} &= 0, \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

дополнительная связь между решениями определяется любым из уравнений (4.2), кроме того должно выполняться условие (4.1).

Формально уравнения (4.1), (4.2) имеют тривиальное решение $\mathbf{E} = \text{const}$, $\mathbf{B} = \text{const}$, т. е. постоянные и однородные поля. Однако из физических соображений ясно, что для создания таких полей необходимы специальные конфигурации зарядов и токов (например, плоский конденсатор, соленоид). Поэтому если задача (4.1), (4.2) имеет место во всём пространстве и при всех t , такие решения следует опускать. Рассмотрим теперь нетривиальные решения.

4.1. Плоские волны

Особенно простой вид имеют решения уравнений (4.3), если предположить зависимость полей лишь от одной координаты, скажем, z и времени t . Тогда получаем

$$\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} = \left(\partial_z - \frac{1}{c} \partial_t \right) \left(\partial_z + \frac{1}{c} \partial_t \right) \mathbf{E} = 0 \quad (4.4)$$

и аналогично для \mathbf{B} . Общее решение (4.4) представимо в виде суммы двух произвольных векторных функций от $z \pm ct$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1(z - ct) + \mathbf{E}_2(z + ct), \quad (4.5)$$

что можно понимать как суперпозицию плоских волн, распространяющихся вдоль и против оси z («плоские» означает, что решение не зависит от координат в поперечной плоскости). Итак, становится ясным смысл электродинамической постоянной c как скорости распространения волновых электромагнитных полей. Следует обратить внимание на то, что скорость электромагнитных волн, в отличие от скорости массивных частиц, является не свободным, но фиксированным параметром теории, входящим в уравнения в виде фундаментальной константы.

Решения \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 имеют одинаковые физические свойства, поэтому рассмотрим одно из них. Помимо (4.3), должны выполняться уравнения (4.1) и (4.2). Равенство нулю дивергенции поля $\mathbf{E}(z - ct)$ означает, что вектор \mathbf{E} ортогонален оси z , т. е. является двумерным вектором в плоскости xy . Аналогичный вывод можно сделать относительно $\mathbf{B}(z - ct)$. Наконец, одно из уравнений (4.2) (второе при этом удовлетворяется автоматически) даёт

$$E_x = B_y; \quad E_y = -B_x; \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.6)$$

(для их получения ротор следует представить с помощью определителя и учесть, что $\partial_t = -c\partial_z$ на решениях, зависящих от $z - ct$; постоянные интегрирования следует опустить, как указано выше). Итак, решения типа плоской волны описываются двумя скалярными функциями $E_x(z - ct)$, $E_y(z - ct)$, т. е. электрическое поле ортогонально направлению распространения, магнитное поле ортогонально направлению распространения и электрическому полю. Векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{e}_z образуют правую тройку.

Убедимся в том, что плоская электромагнитная волна переносит энергию и импульс в направлении своего распространения. Действительно, плотность энергии (3.19) равна

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4\pi}(E_x^2 + E_y^2), \quad (4.7)$$

а плотность потока энергии (3.15)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(E_x^2 + E_y^2)\mathbf{e}_z. \quad (4.8)$$

Вместе эти соотношения говорят о том, что энергия переносится со скоростью c . Плоской волне можно также приписать плотность импульса $\mathbf{p} = \mathbf{S}/c^2$. Очевидно, $c\mathbf{p} = \mathcal{W}\mathbf{e}_z$; такое соотношение, как мы увидим далее, характерно для безмассовых частиц.

Наконец, в силу соотношений (4.6), единственной отличной от нуля компонентой тензора напряжений является

$$\tau_{zz} = \mathcal{W}. \quad (4.9)$$

Поэтому волна, падающая на препятствие, действует на него с некоторой силой. Пусть происходит полное поглощение волны стенкой, ортогональной оси z . Сила, действующая на единицу площади стенки, равна потоку импульса через эту площадь, т. е. τ_z . Поскольку отлична от нуля лишь компонента τ_{zz} , находим, что сила действует ортогонально площадке. Аналогично можно рассмотреть наклонное падение, а также частичное или полное отражение.

4.2. Монохроматическая плоская волна

Особый интерес представляет случай, когда поле \mathbf{E} является простой периодической функцией своего аргумента вида $\cos[\omega(t - k/c)]$. Рассмотрим этот случай подробнее, полагая для удобства векторной записи величин, что волна распространяется вдоль произвольно ориентированного вектора \mathbf{k} . Удобно записать решение в виде вещественной части комплексной функции:

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left(\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right), \quad (4.10)$$

где, в соответствии с результатом предыдущего раздела, частота ω и волновой вектор \mathbf{k} связаны соотношением

$$\omega = c|\mathbf{k}|. \quad (4.11)$$

Абсолютная величина волнового вектора обратно пропорциональна длине волны λ :

$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.12)$$

Наконец, период колебаний в волне есть

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.13)$$

Величину, стоящую в показателе экспоненты, принято называть фазой волны: $\varphi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$.

Векторные операторы div и rot применительно к (4.10) действуют особенно просто, поскольку $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ является собственной функцией оператора ∇ :

$$\nabla e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (4.14)$$

поэтому имеем

$$\text{div} \mathbf{E} = -\text{Im}(\mathbf{k}\mathbf{E}_0 e^{i\varphi}), \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\text{Im}([\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] e^{i\varphi}). \quad (4.15)$$

Следовательно, из уравнений (4.1), (4.2), $(\mathbf{k}\mathbf{E}_0) = 0$ и

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k} \times \mathbf{E}]. \quad (4.16)$$

Вектор Пойнтинга будет иметь вид

$$\mathbf{S} = \frac{c^2 \mathbf{k}}{4\pi\omega} \mathbf{E}^2 = c^2 \frac{\mathbf{k}}{\omega} \mathcal{W}. \quad (4.17)$$

Покажем, что конец вектора \mathbf{E} совершает в общем случае движение по эллипсу в плоскости, ортогональной \mathbf{k} . В формуле (4.10) \mathbf{E}_0 есть некоторый постоянный комплексный вектор. Под квадратом комплексного вектора будем понимать скалярное произведение его на себя, $\mathbf{E}_0^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0$, которое также является комплексной величиной. Обозначим фазу \mathbf{E}_0^2 через $2\varphi_0$,

$$\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0^2| e^{2i\varphi_0}, \quad (4.18)$$

тогда вектор $\mathbf{D} = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi_0}$ будет иметь вещественный квадрат. Это означает, что его вещественная и мнимая части ортогональны:

$$\mathbf{D} = D_1 \mathbf{e}_1 + iD_2 \mathbf{e}_2, \quad (4.19)$$

где \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — пара ортов, перпендикулярных \mathbf{k} (будем считать, что $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$). Подставляя (4.19) в (4.10), находим

$$\mathbf{E} = D_1 \mathbf{e}_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \varphi_0) + D_2 \mathbf{e}_2 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \varphi_0). \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что конец вектора \mathbf{E} совершает движение по эллипсу в положительном или отрицательном направлении в зависимости от того, одинаковы или различны знаки постоянных D_1 и D_2 (*эллиптическая поляризация*). Если $D_1 = \pm D_2$, имеет место *круговая поляризация* (правая или левая). Наконец, если одна из величин D_1 , D_2 равна нулю, имеем *линейную* поляризацию, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} при этом осциллируют в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Эллиптическую волну можно рассматривать как суперпозицию двух волн, линейно поляризованных в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

4.3. Общее решение однородных уравнений Максвелла

Поскольку потенциальная часть вектора \mathbf{E} при отсутствии зарядов и токов исчезает, для полного описания электромагнитного поля достаточно лишь вектор-потенциала, т.е. можно выбрать калибровку, в которой $\varphi = 0$. При этом подстановка

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad (4.21)$$

при дополнительном условии $\text{div } \mathbf{A} = 0$ удовлетворяет трём из уравнений Максвелла, а последнее уравнение даёт

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{A} = 0. \quad (4.22)$$

Общее решение этого уравнения в терминах величин, близких к предыдущему, легко построить с помощью разложения в интеграл Фурье. Ищем решение в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{a}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k \quad (4.23)$$

Учитывая, что $\Delta e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = -\mathbf{k}^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, получаем из (4.22) уравнение для коэффициентов Фурье

$$\mathbf{k}^2 \mathbf{a} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{a}} = 0, \quad (4.24)$$

при дополнительном условии

$$\mathbf{k}\mathbf{a}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (4.25)$$

в силу равенства $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Поскольку поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ должно быть вещественным, также имеем

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{a}^*(-\mathbf{k}, t). \quad (4.26)$$

Выбирая, как и выше, пару ортов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , получим решения уравнений (4.24)–(4.26) в виде

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, t) = \sum_{\lambda=1,2} \mathbf{e}_\lambda (a_\lambda(\mathbf{k}) \bar{e}^{i\omega t} + a_\lambda^*(-\mathbf{k}) e^{i\omega t}), \quad (4.27)$$

где $a_\lambda(\mathbf{k})$, $\lambda = 1, 2$ — две произвольных комплексных функции волнового вектора \mathbf{k} . Подставляя (4.27) в (4.23), находим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda=1,2} \int \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} + \text{к. с.} \quad (4.28)$$

(к. с. — комплексно-сопряжённое выражение). Это решение описывает суперпозицию бесконечного числа монохроматических плоских волн. В силу полноты системы экспонент в этом разложении, решение является общим.

Глава 5.

Уравнения Максвелла и группа Лоренца

Уравнения Максвелла сыграли в истории физики гораздо более важную роль, нежели частная физическая теория явлений электромагнетизма. Симметрия этих уравнений относительно группы Лоренца оказала революционизирующее влияние на физику в целом, приведя к специальной, а затем общей теории относительности. В этом разделе мы обсудим эту замечательную симметрию и дадим новую формулировку уравнений Максвелла, в которой она является очевидной.

5.1. Уравнение Даламбера

Попробуем ввести скалярный и векторный потенциалы в соответствии с полной системой уравнений Максвелла для нестационарных полей (3.7)–(3.10). Как и ранее в статическом случае (гл. 1–2), идея состоит в том, чтобы обеспечить автоматическое выполнение уравнений (3.8) и (3.10), не содержащих источников. Ясно, что для этого следует сохранить параметризацию (2.20) магнитного поля, однако следует добавить соленоидальную часть в выражение для электрического поля \mathbf{E} , как и в случае свободного поля (4.21). В результате получаем

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (5.1)$$

При этом уравнения (3.8) и (3.10) удовлетворяются тождественно, а уравнения (3.7) и (3.10) дают систему уравнений для φ и \mathbf{A} . Эту систему удаётся расцепить, налагая дополнительное условие на φ и \mathbf{A} . Действительно, физически наблюдаемые величины \mathbf{E} и \mathbf{B} (гл. 1) не изменяются при следующем преобразовании потенциалов:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Это преобразование называется *калибровочным*, симметрия относительно подобных преобразований является важным свойством не только электродинамики, но и других физических теорий. Выбором ψ можно добиться выполнения дополнительного условия

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (5.3)$$

которое включает как частный случай ранее использовавшееся (при $\varphi = 0$) условие $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Подставляя (5.1) в (3.7) и (3.9), после применения (5.3) получаем два *независимых* уравнения для φ и \mathbf{A} :

$$\square \varphi = -4\pi\rho, \quad (5.4)$$

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (5.5)$$

где

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (5.6)$$

— уже встречавшийся нам в гл. 4 *оператор Даламбера*. Этот оператор, помимо симметрии относительно сдвигов координат и времени

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \\ t &\rightarrow t' = t - t_0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

а также трёх $SO(3)$ -вращений в евклидовом пространстве координат $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, обладает симметрией относительно псевдоортогональных преобразований пар переменных (x, ct) , (y, ct) и (z, ct) :

$$\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \psi_1 - ct \operatorname{sh} \psi_1, \\ ct' &= ct \operatorname{ch} \psi_1 - x \operatorname{sh} \psi_1, \end{aligned} \quad (5.8)$$

и аналогично для y и z . В совокупности десять перечисленных преобразований образуют *неоднородную группу Лоренца* $ISO(1, 3)$ (группу Пуанкаре). Чтобы получить явно симметричную запись уравнений, введём псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}_{1,3}$ (пространство Минковского) как фактор-пространство $ISO(1, 3)/SO(1, 3)$. Его точками являются координаты и время

$$x^\mu = (ct, \mathbf{r}) = (ct, x^i); \quad \mu = 0, 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.9)$$

(координаты *события*), а элементом длины — *интервал*, квадрат которого равен

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.10)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (5.11)$$

Группа $ISO(1, 3)$ оставляет инвариантной метрику пространства событий (5.11).

Оператор Даламбера (5.6) является инвариантным оператором Лапласа в $\mathbb{R}_{1,3}$:

$$\square = -\eta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (5.12)$$

Этого, однако, недостаточно, чтобы установить ковариантность уравнений (5.4), (5.5). Рассмотрим подробнее правые части этих уравнений, выбирая ρ и \mathbf{j} соответствующими одному точечному заряду (в силу линейности уравнений обобщение для произвольного числа зарядов тривиально). Чтобы выделить инвариантную относительно $ISO(1, 3)$ четырехмерную дельта-функцию

$$\delta^4(x^\mu - x_0^\mu) = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(ct - ct_0), \quad \int \delta^4(x^\mu - x_0^\mu) d^4x = 1 \quad (5.13)$$

(здесь и далее $d^4x = c dt d\mathbf{r}$), введём в выражение для ρ (1.3) единицу вида $1 = \int \delta(x^0 - x_0^0) dx^0$; тогда

$$\rho = e \int \delta^4(x^\mu - x_0^\mu) dx^0. \quad (5.14)$$

Поскольку функция $\delta^4(x^\mu - x_0^\mu)$ инвариантна относительно $ISO(1, 3)$, ясно, что ρ имеет те же трансформационные свойства, что и x^0 . Точно так же для \mathbf{j} находим

$$\mathbf{j} = ec \int \delta^4(x^\mu - x_0^\mu) \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = ec \int \delta^4(x^\mu - x_0^\mu) \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds, \quad (5.15)$$

где s — инвариантный интервал. Таким образом, \mathbf{j} преобразуется как \mathbf{r} , и, следовательно, совокупность величин

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (5.16)$$

представляет собой вектор в пространстве Минковского (*4-вектор тока*).

Трансформационные свойства φ и \mathbf{A} теперь однозначно следуют из того факта, что \square — инвариантный оператор, а правые части (5.4), (5.5) в совокупности образуют 4-вектор тока j^μ . Значит, потенциалы образуют аналогичный вектор

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}). \quad (5.17)$$

Это также соответствует виду дополнительного условия (5.3), которое теперь принимает вид 4-дивергенции

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad (5.18)$$

и таким образом представляет собой уравнение, инвариантное относительно $ISO(1, 3)$. Итак, система уравнений Максвелла сведена к уравнению Даламбера для *4-потенциала*:

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (5.19)$$

с дополнительным условием (5.18).

5.2. Преобразования Лоренца

Преобразования (5.8) имеют естественную физическую интерпретацию как преобразования к движущейся системе отсчёта. Полагая $\text{th } \psi = V/c$, будем иметь

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z. \quad (5.20)$$

При $V/c \ll 1$ получаем $x' = x - Vt$, $t' = t$, т. е. преобразования Галилея ньютоновской механики. Новым элементом является преобразование времени: это плата за одинаковость скорости света во всех инерциальных системах отчёта. Преобразования (5.20) иногда называют *бустом*, следуя англофильской традиции.

При преобразованиях (5.20) перехода к системе, движущейся относительно исходной в направлении оси x (ориентация осей в обеих системах предполагается одинаковой) поперечные координаты не изменяются: $y' = y$, $z' = z$. Если считать вектор скорости штрихованной системы относительно нештрихованной направленным произвольно, то преобразования выглядят более громоздко. Для их вывода следует заменить x на $\mathbf{V}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}/V^2)$ (и соответственно x') и учесть, что поперечная к \mathbf{V} часть \mathbf{r} не испытывает преобразования. В результате найдём

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \gamma(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + (\gamma - 1)(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}, \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right), \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{V}}{V}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

По аналогичному закону преобразуются компоненты введённых выше 4-векторов j^μ и A^μ . Что касается преобразования напряжённостей электрического и магнитного полей, то, как видно из соотношений (5.1), их трансформационные свойства получить сложнее. Поэтому можно пойти по другому пути, построив 4-ковариантный объект из производных 4-потенциала A^μ .

5.3. Тензор электромагнитного поля

Рассмотрим 1-форму четырёхмерного потенциала

$$\mathbb{A} = A_\mu dx^\mu = \varphi c dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.22)$$

(знак минус возник из-за опускания индекса пространственной части по метрике (5.11)). Калибровочное преобразование (5.2) теперь выглядит так:

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}' = \mathbb{A} - \frac{1}{c} d\psi, \quad (5.23)$$

поэтому внешняя производная от \mathbb{A} будет калибровочно-инвариантной величиной:

$$\mathbb{F} = d\mathbb{A} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (5.24)$$

Производя отождествление результата дифференцирования с соотношениями (5.1), находим

$$\mathbb{F} = \mathbf{E}c dt \wedge d\mathbf{r} - B_z dy \wedge dz - B_x dy \wedge dz - B_y dz \wedge dx. \quad (5.25)$$

Итак, мы получили антисимметричную матрицу, представляющую собой *тензор электромагнитного поля*

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Таким образом, трансформационные свойства векторов электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{B} определяются преобразованиями Лоренца ковариантного антисимметричного тензора второго ранга. Проще всего получить преобразования компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , используя лоренц-инвариантность 2-формы (5.25). Выражая в (5.25) нештрихованные координаты через штрихованные

$$dx = \gamma(dx' + V dt'); \quad dt = \gamma(dt' + \frac{V}{c^2} dx'); \quad dy = dy'; \quad dz = dz' \quad (5.27)$$

и собирая коэффициенты снова в виде (5.25), но уже относительно штрихованных величин, находим

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \gamma(E_y - \frac{V}{c}B_z), & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{V}{c}E_z), \\ E'_z &= \gamma(E_z + \frac{V}{c}B_y), & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{V}{c}E_y), \end{aligned} \quad (5.28)$$

Как видно из этих формул, продольные по отношению к \mathbf{V} компоненты \mathbf{E} и \mathbf{B} являются инвариантами преобразований.

Можно построить также два квадратичных инварианта:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2, \\ I_2 &= \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}F_{\mu\nu}F_{\lambda\tau} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

(здесь $\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}$ — абсолютно антисимметричный тензор в $\mathbb{R}_{1,3}$ — символ Леви-Чивита, $\epsilon^{0123} = 1$, остальные компоненты равны ± 1 для чётных/нечётных подстановок индексов). Преобразованиями Лоренца можно всегда добиться того, чтобы векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} приобрели любые значения, ограниченные лишь неизменностью инвариантов I_1 и I_2 . Поэтому если в некоторой системе $\mathbf{E} = \mathbf{B}$ ($I_2 = 0$) и $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ ($I_1 > 0$), то можно найти систему, в которой поле будет чисто электрическим, а если $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$, — то лишь магнитным. Если $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$ в некоторой системе ($I_2 \neq 0$), то таких систем не существует. В случае, если $I_1 = I_2 = 0$, в любой системе поля остаются равными по величине и ортогональными (в частности, этому условию удовлетворяют плоские волны).

В четырёхмерном пространстве дуальной (в смысле Ходжа) формой к 2-форме \mathbb{F} является также 2-форма, равная

$$*\mathbb{F} = \mathbf{B}c dt \wedge d\mathbf{r} + E_z dx \wedge dz + E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx, \quad (5.30)$$

либо, в матричном виде,

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F^{\lambda\tau} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Обратимся к записи уравнений Максвелла на языке тензоров $F_{\mu\nu}$, $*F_{\mu\nu}$. Поскольку $\mathbb{F} = d\mathbb{A}$, имеем $d\mathbb{F} = 0$. В тензорном виде это эквивалентно уравнениям

$$F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0 \quad \text{либо} \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.32)$$

Эти уравнения содержат однородные уравнения (3.8), (3.10). Уравнения (3.7), (3.9) эквивалентны соотношению

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \quad (5.33)$$

Вместе (5.32) и (5.33) можно представить в виде одного комплексного уравнения

$$\partial_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu, \quad \mathcal{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + i*F^{\mu\nu}, \quad (5.34)$$

при этом подразумевается, что $\text{Im } j^\mu = 0$.

Глава 6.

Специальная теория относительности

6.1. Принцип относительности

Еще в ньютоновской механике был сформулирован *принцип относительности*, согласно которому физические законы одинаковы во всех *инерциальных системах отсчета* (ИСО). Математическим выражением этого принципа в классической механике была инвариантность уравнений относительно преобразований Галилея $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{V}t$, где \mathbf{V} — скорость одной системы относительно другой. Подразумевается, что время не преобразуется и течет одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Справедливость этих положений была проверена в механических опытах для скоростей, малых по сравнению со скоростью света.

Уравнения Максвелла не обладают ковариантностью по отношению к преобразованиям Галилея. Однако принцип относительности можно сформулировать и для уравнений Максвелла, если принять, что переход от одной ИСО к другой описывается преобразованиями Лоренца. Поскольку при малых скоростях преобразования Лоренца действительно переходят в преобразования Галилея, то естественно предположить, что ньютоновская механика является приближенной формой более точной *релятивистской* механики. В конце XIX в. в этом вопросе, однако, не было ясности, и предлагалась альтернативная интерпретация уравнений Максвелла, согласно которой эти уравнения следовало относить к некоторой абсолютной системе отсчета, связанной с эфиром, что позволяло сохранить принцип относительности в форме Галилея. В этом случае скорости световых сигналов, испускаемых с Земли в различных направлениях, были бы различными по отношению к Солнцу из-за движения Земли. Однако опыты Майкельсона в 80-х гг. прошлого века опровергли это предположение.

В конечном счёте в физике утвердилась точка зрения, выдвинутая Эйнштейном в форме *специальной теории относительности* (СТО) в 1905 г. Основным положением её стало утверждение о геометрическом характере преобразований Лоренца как свойстве физического пространства-времени, а не просто преобразований симметрии частной физической теории. Это требовало пересмотра классической механики и влекло за собой необходимость аналогичной симметрии и в будущих физических теориях. В начале XX века проверка этого предположения была возможна лишь в рамках электродинамических экспериментов (что дало положительные результаты), но впоследствии были открыты другие взаимодействия (например, *слабые* и *сильные*), теории которых строились уже на основании СТО и которые также были экспериментально подтверждены. Таким образом, современный статус СТО покоится на солидной экспериментальной базе.

Вскоре были выяснены и ограничения применимости СТО. В ее основе лежит предположение о существовании инерциальных систем отсчёта во всём пространстве-времени глобально, что эквивалентно предположению о справедливости выражения для метрики пространства событий (5.16) всюду. Это предположение оказалось неверным при учёте гравитационного взаимодействия. Гравитация делает принципиально невозможным глобальное существование инерциальных систем отсчёта в присутствии любых материальных тел. Однако в достаточно малой области пространства-времени, где можно считать гравитационное поле постоянным и однородным, такие системы ввести можно. Таким образом, при учёте гравитации СТО справедлива лишь локально. Общая теория относительности (ОТО) позволяет преодолеть этот недостаток СТО.

Разумеется, пренебрежение гравитацией оправдано при описании большинства электродинамических явлений, равно как и в физике высоких энергий, где проявляются сильные и слабые взаимодействия. В опытах с элементарными частицами гравитацией можно пренебречь вплоть до *планковской энергии* имеющей фантастическую величину 10^{19} Гэв. Поэтому круг физических явлений, описываемых СТО, чрезвычайно велик.

Мы уже убедились в том, что наиболее простая формулировка уравнений электродинамики достигается в пространстве Минковского, представляющем собой естественную геометрическую арену для СТО. Обсудим теперь подробнее некоторые свойства этой геометрии в физических терминах.

6.2. Геометрия пространства-времени

В пространстве Минковского существует инвариантная поверхность, *световой конус* (рис.6.1), определяемая уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (6.1)$$

которая делит пространство событий на три части. Верхняя половина конуса ($t > 0$) содержит все события, находящиеся в будущем по отношению к событию, принятому за начало четырёхмерной системы координат O . Все кривые — *мировые линии* — изображающие движение частиц со скоростью, меньшей c (массивных частиц) и проходящие через O , лежат внутри светового конуса. Область внутри нижней половины светового конуса является областью абсолютного прошлого по отношению к точке O , эти соотношения хронологии не зависят от выбора той или иной инерциальной системы отсчёта. Все точки внутри конуса связаны с O интервалом, квадрат которого положителен; такой интервал называется *временеподобным*.

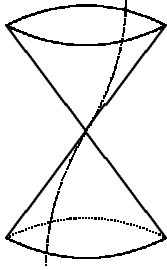


Рис.6.1

Область вне светового конуса отвечает событиям, связанным с O интервалом, квадрат которого отрицателен; такой интервал называется *пространственноподобным*. События в этой области происходят в разных пространственных точках в любой инерциальной системе отсчёта и являются абсолютно удалёнными от события O . Как мы увидим ниже, временная последовательность таких событий зависит от системы отсчёта. Два события не могут быть причинно связанными, если интервал

между ними пространственноподобен.

Сама поверхность светового конуса является геометрическим местом мировых линий безмассовых частиц (фронтов электромагнитных волн, световых сигналов), распространяющихся со скоростью c . Эта скорость является предельной скоростью любых перемещений реальных физических тел.

Вектором в пространстве Минковского $\mathbb{R}_{1,3}$ является совокупность четырёх величин, преобразующихся как x^μ . Квадрат 4-вектора по псевдоевклидовой метрике

$$A^2 \equiv A^\mu A_\mu = A_0^2 - \mathbf{A}^2 \quad (6.2)$$

может быть положительным, отрицательным либо нулём. Соответствующий вектор называется *временеподобным*, *пространственноподобным* либо *изотропным*.

Инерциальной системой отсчёта (ИСО) $K(\mathbf{r}, t)$ является совокупность трёхмерного репера и часов, причём предполагается, что в каждой пространственной точке имеется возможность измерения времени по глобально синхронизированным часам. Математически с каждой ИСО связывается система координат x^μ в $\mathbb{R}_{1,3}$. Переход к другой ИСО описывается преобразованиями Лоренца.

6.3. Кинематические эффекты СТО

Преобразования Лоренца приводят к ряду кинематических особенностей, которые с точки зрения «здорового смысла», основанного на представлениях ньютоновской механики, могут показаться парадоксальными.

Собственное время

Рассмотрим часы, движущиеся вдоль времениподобной мировой линии в некоторой выбранной ИСО. Тогда интервал, разделяющий два близких положения часов, есть

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2, \quad (6.3)$$

где v — скорость часов.

Рассмотрим другую ИСО, скорость которой в данный момент совпадает со скоростью часов. Относительно этой системы часы находятся в покое и, следовательно,

$$ds^2 = c^2 dt'^2. \quad (6.4)$$

Приравнявая (6.3) и (6.4), получаем

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6.5)$$

Здесь t' является *собственным временем* движущихся часов. Тем самым раскрывается смысл интервала как (умноженного на c) собственного времени. Таким образом, движущиеся часы всегда показывают меньшее время, чем неподвижные.

Лоренцево сокращение масштаба

Пусть линейка, *собственная длина* которой равна l_0 (эта длина измеряется в ИСО $K'(\mathbf{r}', t')$, в которой линейка покоится), движется со скоростью v относительно другой ИСО $K(\mathbf{r}, t)$. По часам K в некоторый момент времени производятся *одновременные* измерения координат начала и конца линейки. Тогда (выбирая скорость линейки направленной вдоль оси x) имеем $\Delta t = 0$ и, следовательно, согласно (5.20),

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.6)$$

Обозначим длину линейки, измеренную таким образом в K , через $l = \Delta x$; при этом $l_0 = \Delta x'$, так что

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (6.7)$$

движущаяся линейка кажется короче. Заметим, что процесс сравнения асимметричен: в системе K положения начала и конца линейки замеряются одновременно ($\Delta t = 0$), эти события, однако, неодновременны по часам K' ($\Delta t' \neq 0$).

Поскольку поперечные по отношению к скорости ИСО расстояния не изменяются, то аналогично (6.7) изменяется элемент объёма ΔV при переходе от одной ИСО к другой:

$$\Delta V = \Delta V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6.8)$$

При этом *четырёхмерный объём* является инвариантным:

$$\Delta \Omega = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \Delta x' \Delta y' \Delta z' \Delta t'. \quad (6.9)$$

Нарушение одновременности событий, разделённых пространственноподобным интервалом

Пусть два события происходят одновременно ($\Delta t = 0$) в системе K в разных точках, находящихся на расстоянии $\Delta x = L$ (интервал между такими событиями пространственноподобен). Тогда в системе K' согласно (5.20) находим

$$\Delta t' = -\frac{LV}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (6.10)$$

т.е. события неодновременны. Иначе говоря, временная последовательность событий, разделённых пространственноподобным интервалом, не является инвариантным понятием и зависит от системы отсчёта; если $t'_1 > t'_2$ в одной ИСО, то, возможно, $t_1 < t_2$ в другой.

Некоммутативность лоренцевых преобразований

Результат двух последовательных преобразований Галилея со скоростями $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ не зависит от их порядка. В случае преобразований Лоренца это не так. Действительно, два буста $SO(1, 1)$ в различных псевдоплоскостях не коммутируют в группе $SO(1, 3)$. Генераторами $SO(1, 3)$ являются операторы вращений $L_{\mu\nu}$ (псевдовращений) в различных плоскостях $x^\mu \wedge x^\nu$. Алгебра $\mathfrak{so}(1, 3)$ имеет вид

$$[L_{\mu\nu}, L_{\tau\lambda}] = L_{\mu\tau}\eta_{\nu\lambda} - L_{\mu\lambda}\eta_{\nu\tau} - L_{\nu\tau}\eta_{\mu\lambda} + L_{\nu\lambda}\eta_{\mu\tau}. \quad (6.11)$$

В частности,

$$[L_{01}, L_{02}] = L_{12}, \quad (6.12)$$

т.е. коммутатор двух преобразований Лоренца в псевдоплоскостях (ct, x) и (ct, y) представляет собой пространственный поворот вокруг оси z .

6.4. Пространство скоростей

В ньютоновской механике скорости складываются по правилу параллелограмма как векторы в \mathbb{R}^3 с евклидовой метрикой. В СТО это не так; в частности, если источник светового импульса, распространяющегося со скоростью c , движется относительно неподвижной системы со скоростью \mathbf{V} , то скорость импульса в неподвижной системе по-прежнему будет равна c . Пусть скорость частицы относительно системы K есть $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, а относительно системы K'

равна $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$. Если скорость системы K' направлена вдоль оси x системы K , то формулы преобразования компонент скорости можно получить, дифференцируя (5.20):

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}; \quad v'_{y,z} = \frac{v_{y,z} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \quad (6.13)$$

Заметим, что если $v_x = c$ ($v_y = v_z = 0$), то $v'_x = c$ независимо от V , как и следовало ожидать, скорость света одинакова во всех ИСО. Луч света, распространяющийся в системе K под углом θ к оси y , ($v_x = c \cos \theta$, $v_y = c \sin \theta$), будет виден из системы K' под другим углом:

$$\frac{v'_y}{v'_x} = \operatorname{tg} \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (6.14)$$

Это явление называется *абберацией*, оно хорошо известно в астрономии (годовое изменение углового положения звёзд за счёт изменения направления движения Земли вокруг Солнца).

Если скорость \mathbf{V} системы K' относительно K имеет произвольное направление, то преобразование скоростей можно получить дифференцированием общего преобразования координат и времени (5.21):

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V} + \mathbf{n}(V - \mathbf{v}\mathbf{n})(1 - \gamma)}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{V}/c^2)}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}}{V}; \quad V = |\mathbf{V}|; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Абсолютная величина \mathbf{v}' при этом имеет простой вид

$$|\mathbf{v}'| = \frac{\sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 - [\mathbf{v} \times \mathbf{V}]^2/c^2}}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{c^2}} \quad (6.16)$$

Формула (6.15) выражает собой неевклидово правило сложения скоростей в СТО; при $V \ll c$ она переходит в правило параллелограмма $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$. Будем рассматривать *относительную* скорость двух частиц 1 и 2 как скорость частицы 2 в системе покоя частицы 1. Если скорости близки, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, для получения абсолютной величины относительной скорости $d\mathbf{v}_{\text{отн}}$ следует положить в (6.16) $\mathbf{v} - \mathbf{V} = d\mathbf{v}$, в результате находим

$$dv_{\text{отн}}^2 = \frac{dv^2 - [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}. \quad (6.17)$$

Эту величину можно понимать как элемент длины в релятивистском пространстве скоростей $dl_v^2 = dv_{\text{отн}}^2$. Переходя к сферическим координатам

$$\mathbf{v} = v(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad (6.18)$$

будем иметь

$$dl_v^2 = \frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{v^2}{1 - v^2}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (6.19)$$

или, полагая $v = \operatorname{th} \psi$,

$$dl_v^2 = d\psi^2 + \operatorname{sh}^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.20)$$

Таким образом, релятивистское пространство скоростей является пространством постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского).

Глава 7.

Релятивистская механика

В ньютоновской механике взаимодействие двух частиц описывается посредством парного потенциала $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, и уравнения движения

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U \quad i = 1, 2 \quad (7.1)$$

(суммирования по i нет) отвечают представлению о мгновенном характере распространения взаимодействия. В случае системы зарядов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, ситуация иная: во первых, взаимодействие не является потенциальным (за исключением электростатического случая), во-вторых, электромагнитное поле, как было показано в главе 5, распространяется с конечной скоростью c . Кроме того, уравнения (7.1) инвариантны относительно преобразований Галилея, а не Лоренца, и, следовательно, их совместное рассмотрение с уравнениями Максвелла даже при надлежащей замене силы в правой части (7.1) невозможно. Вместе с тем, можно ожидать, что в пределе малых скоростей уравнения (7.1) с силой Лоренца в правой части будут справедливы. Поэтому для отыскания правильной формы релятивистского уравнения движения заряда можно считать, что выполняется уравнение ньютоновской механики

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e \mathbf{E} \quad (7.2)$$

в системе отсчета, в которой в выбранный момент времени $v = 0$. Затем необходимо совершить преобразование Лоренца к ИСО, в которой v не мало. Практически, однако, удобнее сначала развить релятивистскую кинематику формально, а затем построить лоренц-ковариантное уравнение, которое в системе покоя переходило бы в (7.2).

7.1. Релятивистские уравнения движения

Движение частиц вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$ изображается в пространстве событий в виде времениподобной мировой линии $x^\mu = x^\mu(s)$. Введем 4-вектор касательной к x^μ , называемый 4-скоростью частицы

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(c \frac{dt}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \left(c \frac{dt}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right) = u^0 \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c} \right), \quad (7.3)$$

где $u^0 = c dt/ds$. Квадрат 4-скорости по метрике Минковского (5.11) равен единице в силу выбора в качестве параметра на кривой интервала s :

$$u^2 \equiv u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1. \quad (7.4)$$

С другой стороны,

$$u^2 = (u^0)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (7.5)$$

откуда следует:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.6)$$

В системе покоя частицы

$$u^0 = 1, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (7.7)$$

Построим теперь 4-вектор ускорения, дифференцируя 4-скорость по параметру:

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{du^\mu}{dt} = \frac{u^0}{c} \frac{d}{dt} \left\{ u^0 \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right\}. \quad (7.8)$$

Заметим, что в силу равенства $u^2 = 1$, w^μ и u^μ ортогональны по метрике (5.11): поскольку $du^2/ds = 0$, то

$$u^\mu w_\mu = 0 \quad (7.9)$$

В системе покоя $\mathbf{v} = 0$ из (7.8) находим:

$$w^\mu = \left(0, \frac{\mathbf{a}}{c^2} \right), \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (7.10)$$

Поэтому «правильная» форма левой части уравнения (7.2) в произвольной ИСО должна быть $mc^2 w^\mu$. Рассмотрим теперь правую часть этого уравнения. Построим 4-вектор силы

$$f^\mu = e F^\mu{}_\nu u^\nu = (f^0, \mathbf{f}), \quad (7.11)$$

где $F^\mu{}_\nu$ — тензор электромагнитного поля (5.26) с поднятым индексом μ . Подстановка явных выражений даёт

$$\mathbf{f} = e u^0 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right), \quad (7.12)$$

$$f^0 = \frac{e}{c} u^0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}). \quad (7.13)$$

При $v \rightarrow 0$ имеем $u^0 \rightarrow 1$, и пространственная часть вектора f^μ совпадает с правой частью (7.2). Итак, лоренц-ковариантное уравнение

$$mc^2 w^\mu = f^\mu \quad (7.14)$$

при $v \rightarrow 0$ имеет пространственную часть, совпадающую с (7.2), что и представляет желаемый результат. Рассмотрим теперь подробнее компоненту $\mu = 0$:

$$mc u^0 \frac{du^0}{dt} = \frac{e u^0}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}). \quad (7.15)$$

Сократив на u^0/c , получим в правой части работу силы \mathbf{f} над зарядом в единицу времени. Отсюда следует, что величина

$$\mathcal{E} = mc^2 u^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.16)$$

должна быть отождествлена с кинетической энергией частицы, так что $d\mathcal{E}/dt = e\mathbf{E}\mathbf{v}$. Заметим, что при $v \rightarrow 0$

$$\mathcal{E} \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots, \quad (7.17)$$

т.е. получаем ньютоновское выражение для кинетической энергии с точностью до постоянной «энергии покоя» mc^2 .

Пространственную часть (7.14) также можно представить в привычном виде равенства «производная от импульса равна силе», если ввести релятивистский импульс

$$\mathbf{p} = mc\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.18)$$

переходящий при $v \rightarrow 0$ в импульс ньютоновской теории $m\mathbf{v}$. С помощью \mathbf{p} пространственная часть уравнения (7.14) переписывается в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right). \quad (7.19)$$

Итак, мы приходим к выводу, что лоренц-ковариантное уравнение

$$mc \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu \quad (7.20)$$

имеет ньютоновский нерелятивистский предел, а также содержит в себе уравнение изменения энергии (компонента $\mu = 0$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}. \quad (7.21)$$

Заметим, что это последнее является следствием пространственной части уравнения (7.20), эквивалентного уравнению (7.19). Действительно, умножая (7.19) скалярно на \mathbf{v} и принимая во внимание определения (7.16) и (7.18), получим (7.21). Это неудивительно, поскольку четыре компонента уравнения (7.20) удовлетворяют условию связи (7.9), которое автоматически следует из (7.20) ввиду антисимметрии $F_{\mu\nu}$.

Кинетическая энергия (7.16) и импульс (7.18) удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{E}^2 = m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2. \quad (7.22)$$

Если объединить \mathcal{E} и \mathbf{p} в 4-вектор импульса

$$p^\mu = m c u^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (7.23)$$

то квадрат этого вектора по метрике (5.11) в силу (7.22) будет равен

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 c^4. \quad (7.24)$$

При $v \rightarrow c$ энергия частицы и ее импульс стремятся к бесконечности, поэтому скорость света недостижима для частиц отличной от нуля массы. Однако соотношения (7.22) и (7.24) сохраняют смысл и при $m = 0$, в этом случае

$$\mathcal{E} = c|\mathbf{p}| \quad (7.25)$$

Это соотношение вполне соответствует формулам (4.7), (4.8), полученным для электромагнитных волн. В квантовой теории электромагнитная волна имеет корпускулярный аналог, фотон, для которого энергия и импульс действительно связаны соотношениями (7.25). Таким образом, можно сохранить представление о 4-импульсе и для безмассовых частиц, движущихся со скоростью c . В частности, можно применять закон сохранения энергии и импульса при рассмотрении столкновений элементарных частиц в форме

$$\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha^\mu = \sum_{\alpha=1}^N p'^\mu_\alpha \quad (7.26)$$

где $p_\alpha^\mu, p'^\mu_\alpha$ — импульсы частиц до и после столкновения. При этом $p_\alpha^2 = m_\alpha^2 c^2$ для массивных частиц и нуль для безмассовых.

7.2. Функция Лагранжа

Вариационный принцип механики (*принцип наименьшего действия*) позволяет свести описание физической системы к выбору функционала $S[q^\alpha(t)]$ на кривых в конфигурационном пространстве $\{q^\alpha\} \in \mathbb{R}^K$, $\alpha = 1, \dots, K$, называемого *действием*, обращение в нуль первой вариации которого

$$\delta S[q^\alpha(t)] = 0 \quad (7.27)$$

эквивалентно уравнениям движения. Преимущество такого описания в том, что действие S должно быть *инвариантным* относительно группы симметрий рассматриваемой системы, в то время, как уравнения движения — лишь *ковариантны*, т. е. преобразуются по некоторому представлению группы симметрий.

Напомним, что функционал S ньютоновской механики материальной точки может быть построен именно исходя из соображений инвариантности относительно группы ISO(3) (трансляции и вращения в \mathbb{R}^3), а также преобразований Галилея $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}t$, $t \rightarrow t$. Для свободной частицы требуемую симметрию имеет функционал

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 dt \quad (7.28)$$

Его вариация

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_f} m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d(\delta\mathbf{r})}{dt} dt = m \mathbf{v} \delta\mathbf{r} \Big|_{t_0}^{t_f} - m \int_{t_0}^{t_f} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} dt = 0 \quad (7.29)$$

при условии обращения в нуль вариации $\delta\mathbf{r}$ в начальный и конечный моменты времени приводит к уравнению движения

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0. \quad (7.30)$$

В общем случае действие для механической системы с конечным числом степеней свободы можно представить в виде

$$S[q^\alpha(\tau)] = \int_{\tau_0}^{\tau_f} L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, \tau) d\tau, \quad (7.31)$$

где $q^\alpha(\tau)$ — совокупность обобщенных координат, зависящих от параметра τ (не обязательно совпадающего со временем), $\dot{q}^\alpha \equiv \frac{dq^\alpha}{d\tau}$ и L — функция Лагранжа. Принцип наименьшего действия требует обращения в нуль первой вариации действия (7.27) при варьировании переменных с «закрепленными концами»

$$q^\alpha(\tau) \rightarrow q^\alpha(\tau) + \delta q^\alpha(\tau); \quad \delta q^\alpha \Big|_{\tau=\tau_0} = \delta q^\alpha \Big|_{\tau=\tau_f} = 0. \quad (7.32)$$

Обращение в нуль вариации (7.27) эквивалентно уравнениям Эйлера-Лагранжа для L :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}. \quad (7.33)$$

В релятивистской механике простейший способ удовлетворить требованиям ISO(1,3)-симметрии — это выбрать действие для свободной частицы пропорциональным интервалу (для упрощения записи будем опускать пределы интегрирования)

$$S_0 = -mc \int ds. \quad (7.34)$$

Если перейти к трехмерным переменным $\{q^\alpha\} = \{\mathbf{r}(t)\}$, то будем иметь

$$S_0 = -mc \int \left(\frac{dt}{ds} \right)^{-1} dt = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (7.35)$$

следовательно, функция Лагранжа равна

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7.36)$$

Ее разложение при малых v

$$L_0 \simeq -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots \quad (7.37)$$

соответствует с точностью до несуществующей постоянной ньютоновской функции Лагранжа в (7.28).

Взаимодействие с электромагнитным полем должно быть введено так, чтобы помимо ISO(1,3)-инвариантности обеспечить линейную зависимость силы от \mathbf{E} и \mathbf{B} . Единственная приемлемая величина представляет собой интеграл от 1-формы потенциала (5.22) вдоль мировой линии $x^\mu = x^\mu(s)$:

$$S_1 = -\frac{e}{c} \int \mathbb{A} = -e \int \left(\varphi dt - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right) \quad (7.38)$$

Объединяя это выражение с S_0 , получаем действие для заряда в электромагнитном поле $S = S_0 + S_1$ в виде

$$S = \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi \right) dt, \quad (7.39)$$

и, следовательно, функция Лагранжа равна

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\varphi \quad (7.40)$$

Хотя действие (7.38) зависит от 1-формы потенциала, определенной с точностью до калибровочного преобразования (5.23), интеграл (7.38) лишь калибровочно инвариантен, поскольку при преобразовании (5.23) получаем $\delta S_1 = -(e/c)(\psi(t_f) - \psi(t_0))$, при варьировании же согласно (7.32) вариации переменных на концах интервала исчезают.

Подстановка (7.40) в (7.33) (где $\{q^\alpha\} = \{\mathbf{r}\}$) приводит после преобразований к уравнению (7.19). При этом следует учесть, что потенциалы \mathbf{A} и φ зависят от \mathbf{r} , t , поэтому

$$\frac{dA^i}{dt} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} + \frac{\partial A^i}{\partial t} \quad \text{и т. д.} \quad (7.41)$$

7.3. Уравнения Гамильтона и Гамильтона-Якоби

Для перехода к гамильтонову описанию необходимо ввести обобщенный импульс

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad \mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.42)$$

и гамильтониан по обычному правилу

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (7.43)$$

Чтобы представить гамильтониан как функцию \mathbf{P} и \mathbf{r} , заметим, что $H - e\varphi = \mathcal{E}$, поэтому из (7.22) находим

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = e\varphi + \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}, \quad (7.44)$$

зависимость от \mathbf{r} и t входит через φ и \mathbf{A} .

В нерелятивистском пределе это выражение переходит в следующее:

$$H = \frac{1}{2} m \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi, \quad (7.45)$$

где первый член есть кинетическая энергия $\mathbf{p}^2/2m$, выраженная через обобщенный импульс \mathbf{P} , а второй — потенциальная энергия. Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (7.46)$$

при этом полная производная H по времени равна частной производной по времени от функции Лагранжа, взятой со знаком минус

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (7.47)$$

Поэтому H является интегралом движения, если φ и A не зависят от времени явно. После преобразований уравнения Гамильтона приводятся к уравнению второго порядка.

Наконец, применим к данной задаче теорию Гамильтона-Якоби. Напомним, что основным объектом теории является *функция действия*, зависящая от координат и времени, которая определяется, как интеграл от функции Лагранжа вдоль истинных траекторий, заканчивающихся в момент t в произвольной точке \mathbf{r} :

$$S(\mathbf{r}, t) = \int^t L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t') dt'. \quad (7.48)$$

При этом для производных этой функции имеем

$$\begin{aligned} \nabla S &= \int^t \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} dt' = \int^t \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} dt' = \mathbf{P}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{dS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = L - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = -H. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Подстановка обобщенного импульса \mathbf{P} и гамильтониана H , выраженных через производные от S , в уравнение (7.44), предварительно возведенное в квадрат, дает *уравнение Гамильтона-Якоби*

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 - \left(\nabla S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = m^2 c^2 \quad (7.50)$$

Как правило, уравнения Гамильтона-Якоби решают методом разделения переменных (если это возможно), отыскивая так называемый *полный интеграл* $S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, t)$, содержащий три постоянные интегрирования $\boldsymbol{\alpha}$ (четвертая постоянная тривиальна, поскольку S входит в уравнение только через свои частные производные). Согласно *теореме Гамильтона-Якоби* дифференцирование $S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ по $\boldsymbol{\alpha}$ дает новые постоянные

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta} = \text{const}. \quad (7.51)$$

В основе этого утверждения лежит теория канонических преобразований. Действие S является производящей функцией канонического преобразования к новым гамильтоновым переменным, в которых функция Гамильтона тождественно обращается в нуль.

Глава 8.

Вариационный принцип для электромагнитного поля

Уравнения Максвелла были нами получены феноменологически как результат обобщения совокупности экспериментальных фактов. Именно так обстояло дело в реальной истории: Максвелл вывел носящую его имя систему уравнений, анализируя труды Фарадея, которым был накоплен и систематизирован обширный экспериментальный материал. Однако нынешняя уверенность в справедливости этой теории основывается не только на опытных фактах, но и на чисто теоретических аргументах, устанавливающих ее смысл как теории безмассового поля единичного спина. Дальнейшие построения базируются на вариационной формулировке теории, которую можно понимать как обобщение лагранжева принципа механики на систему с бесконечным числом степеней свободы.

8.1. Поле как механическая система с бесконечным числом степеней свободы

Поле, принимающее непрерывные значения в пространстве, можно рассматривать как механическую систему с бесконечным числом степеней свободы. В качестве множества обобщенных координат удобно выбрать значения 1-формы $A(\mathbf{r}, t)$ в каждой *пространственной* точке \mathbf{r} :

$$\{q^k(t)\} = \{A_\mu(\mathbf{r}, t)\}, \quad (8.1)$$

иначе говоря, роль индекса k выполняет совокупность индекса μ и непрерывно изменяющейся пространственной координаты \mathbf{r} . При этом суммирование по индексу k переходит в суммирование по μ и интегрирование по \mathbf{r} .

$$\sum_k \rightarrow \sum_\mu \int d^3x, \quad (8.2)$$

поэтому действие становится интегралом по пространству событий от *плотности* функции Лагранжа. Лоренц-инвариантность требует, чтобы производные по времени и пространственным координатам входили в действие равноправно в виде $\partial/\partial x^\mu$. Таким образом, вместо q^k будем иметь $A_{\mu,\nu} \equiv \partial_\nu A_\mu$. Итак, функционал действия для электромагнитного поля можно представить в виде

$$S[A] = \int \mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\nu}) d^4x, \quad (8.3)$$

где \mathcal{L} — плотность функции Лагранжа. Для свободного поля эта функция не должна зависеть от x явно, физически такая зависимость означала бы, что система не является замкнутой. Для поля, порождаемого системой заряженных частиц, функция Лагранжа дополнительно должна зависеть от координат и 4-скоростей зарядов.

Вариационная задача для поля ставится следующим образом. Рассмотрим замкнутую область Ω в пространстве событий с границей

$$\partial\Omega = V_0 \cup V_f \cup \Sigma, \quad (8.4)$$

где V_0 и V_f — две пространственноподобные гиперповерхности, нормали к которым времениподобны, а Σ — бесконечно удаленная гиперповерхность с пространственноподобной нормалью, замыкающая гиперповерхность $\partial\Omega$. В частности, под V_0 и V_f можно понимать трехмерное пространство в моменты времени $t = t_0$ и $t = t_f$ в некоторой заданной лоренцевой системе отсчета. Преобразования Лоренца не изменяют времениподобности нормалей к V_0 и V_f , таким образом, разбиение (8.4) лоренц-инвариантно.

При варьировании действия (8.3) предполагается, что вариации $\delta A = 0$ на граничной гиперповерхности $\partial\Omega$, это является обобщением правила варьирования механики (7.32). Уравнение Эйлера-Лагранжа выводится следующим

образом. Варьируем действие в форме (8.3):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} \delta A_{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} \partial_{\nu} (\delta A_{\mu}) \right) d^4 x = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} \right) \delta A_{\mu} d^4 x + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} \delta A_{\mu} d\Sigma_{\nu} = 0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

используя теорему Остроградского-Гаусса для области Ω :

$$\int_{\Omega} \partial_{\nu} G^{\nu} d^4 x = \int_{\partial \Omega} G^{\nu} d\Sigma_{\nu}, \quad (8.6)$$

В силу произвольности δA_{μ} внутри Ω и равенства $\delta A_{\mu} = 0$ на $\partial \Omega$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}, \quad (8.7)$$

которое можно рассматривать как формальное обобщение уравнения (7.33) с заменой $q \rightarrow A_{\mu}$, $\frac{d}{dt} \rightarrow \partial_{\nu}$.

8.2. Действие для электромагнитного поля

Явное выражение для плотности функции Лагранжа \mathcal{L} строится из соображений лоренц-инвариантности, калибровочной инвариантности и требования линейности полевых уравнений. Более того, часть действия, описывающая взаимодействие зарядов и поля, нам уже известна (7.38), эта часть должна остаться неизменной, однако ее теперь удобнее представить в виде 4-мерного интеграла

$$S_1 = -\frac{e}{c} \int_{x_0(s)} \mathbb{A} = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} j^{\mu}(x) A_{\mu}(x) d^4 x \quad (8.8)$$

где введён 4-вектор тока

$$j^{\mu} = e c \int u^{\mu}(s) \delta^4(x^{\mu} - x_0^{\mu}(s)) ds, \quad (8.9)$$

ассоциируемого с движением заряда e вдоль мировой линии $x^{\mu} = x_0^{\mu}(s)$, в случае совокупности зарядов следует взять сумму выражений (8.9) по всем зарядам.

Заметим, что, хотя в (8.8) входит *калибровочно неинвариантная* величина A_{μ} , действие (8.8) при преобразовании $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu} \psi$ переходит в

$$S_1 \rightarrow S_1 - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} j^{\mu} \partial_{\mu} \psi d^4 x = S_1 - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \partial_{\mu} (j^{\mu} \psi) d^4 x, \quad (8.10)$$

где учтено уравнение непрерывности тока $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$. Изменение плотности функции Лагранжа на 4-дивергенцию не влияет на уравнения Эйлера-Лагранжа, поскольку интеграл в (8.10) можно преобразовать в поверхностный интеграл по границе $\partial \Omega$, что не сказывается на результате варьирования в силу обращения в нуль вариаций поля на $\partial \Omega$.

Плотность функции Лагранжа собственно электромагнитного поля не должна зависеть явно от A_{μ} (в этом случае калибровочная инвариантность была бы утрачена) и, следовательно, может зависеть только от калибровочно-инвариантной внешней производной $d\mathbb{A} = \mathbb{F}$. Наконец, чтобы уравнения были линейными, остается единственный выбор в виде квадратичного инварианта $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Заметим, что псевдоскалярный инвариант $*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ при учете соотношения (5.32) может быть представлен в виде полной дивергенции $*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2\partial_{\mu} (\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} A_{\nu} F_{\lambda\tau})$, которая не изменяет уравнений Эйлера-Лагранжа. Вводя коэффициент $-1/16\pi c$ для согласования со сделанным ранее выбором единиц, окончательно получим

$$S = S_F + S_1; \quad (8.11)$$

$$S_F = \int \mathcal{L}_F d^4 x = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4 x. \quad (8.12)$$

Подстановка (8.11), (8.8) и (8.12) в (8.7) приводит к уравнениям Максвелла

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}, \quad (8.13)$$

при этом остальные однородные уравнения выполняются тождественно: $dF = 0$ в силу выбора в качестве обобщённых координат поля 1-формы \mathbb{A} . Следует иметь в виду, что калибровочная симметрия $A \rightarrow A + d\psi$ означает, что действие S_F вырождено, поэтому последовательное применение лагранжева формализма требует введения лагранжевых множителей для обеспечения выполнения условий связи. Это необходимо, в частности, для построения гамильтоновой формы уравнения и последующего квантования. Эти вопросы, однако, выходят за рамки данного курса. Объединяя полевое действие с действием зарядов для полной системы N заряженных частиц и порождаемого ими электромагнитного поля, получаем действие

$$S = - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \int ds - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} j^{\mu} A_{\mu} d^4x - \frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x, \quad (8.14)$$

где суммирование ведётся по всем зарядам и

$$j^{\mu} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} u_{\alpha}^{\mu} \delta^4(x^{\mu} - x_0^{\mu}(s)) ds \quad (8.15)$$

— 4-вектор полного тока. Варьирование действия (8.14) по $x_0^{\mu}(s)$ затрагивает первые два слагаемых и приводит к уравнениям движения зарядов, варьирование по A_{μ} даёт уравнения Максвелла (8.13). Итак, самосогласованная динамика зарядов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, описывается действием (8.14). Заметим, что электромагнитное взаимодействие двух зарядов не может быть описано с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей частиц. Физически это означает, что создаваемое зарядами поле является самостоятельной динамической системой с бесконечным числом степеней свободы. Таким образом, система двух взаимодействующих зарядов в электродинамике является системой с бесконечным числом степеней свободы. В пределе малых скоростей можно построить приближённую функцию Лагранжа, которая зависит только от координат и скоростей частиц, в общем случае релятивистского движения это сделать нельзя. В частности, как мы увидим далее, движение взаимодействующих зарядов может сопровождаться электромагнитным излучением, которое представляет собой порождение зарядами поля электромагнитных волн.

8.3. Тензор энергии-импульса

Рассмотрим сначала свободное электромагнитное поле. В этом случае плотность функции Лагранжа в (8.3) не зависит от координат явно, поэтому её полная производная по x^{μ} равна

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda}} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu}} \frac{\partial A_{\lambda,\nu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (8.16)$$

Будем считать, что поле удовлетворяет уравнениям Эйлера-Лагранжа (8.7). Тогда, преобразуя первое слагаемое в (8.16) и меняя порядок производных во втором, будем иметь

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu}} \right) A_{\lambda,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu}} \partial_{\nu} (A_{\lambda,\mu}), \quad (8.17)$$

что группируется в полную производную по x^{ν} . Равенство (8.17) можно поэтому представить в виде

$$\partial_{\nu} \overset{\circ}{T}_{\mu}^{\nu} = 0, \quad (8.18)$$

$$\overset{\circ}{T}_{\mu}^{\nu} = A_{\lambda,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu}} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}. \quad (8.19)$$

Величина (8.19) называется каноническим тензором энергии-импульса (ТЭИ). Его построение аналогично построению гамильтониана в механике, при этом $q \rightarrow A_{\lambda}$, $\partial_t \rightarrow \partial_{\nu}$. В последнем случае отсутствие явной зависимости функции Лагранжа от t приводило к равенству нулю полной производной от функции Гамильтона, т. е. закону сохранения энергии. Нетрудно понять, что соотношение (8.18) также порождает закон сохранения, в данном случае для (ко)векторной величины (4-импульса поля)

$$P_{\mu}(V) = \int_V \overset{\circ}{T}_{\mu}^{\nu} dS_{\nu}, \quad (8.20)$$

где V — пространственно-подобная трехмерная гиперповерхность с нормалью в направлении возрастания t (в некоторой лоренцевой системе $dS_{\nu} = \delta_{\nu}^0 d^3x$). Действительно, интегрируя (8.18) по замкнутому 4-объёму Ω с границей $\partial\Omega$ вида (8.4), находим

$$P_{\mu}(V_f) - P_{\mu}(V_0) = \int_{\Sigma} \overset{\circ}{T}_{\mu}^{\nu} dS_{\nu}, \quad (8.21)$$

где учтено, что внешняя нормаль к V_0 направлена против t . Правая часть (8.21) обращается в нуль в силу предположения об отсутствии поля на пространственной бесконечности, в результате находим, что P_μ не зависит от выбора гиперповерхности V , т. е. не зависит от времени.

Заметим, что построение канонического ТЭИ содержит неоднозначность, в частности, если плотность лагранжиана изменить на полную дивергенцию, то уравнения движения останутся прежними, а тензор энергии-импульса изменится. Для доопределения ТЭИ, не изменяющего закона сохранения (8.20), можно воспользоваться следующим тождеством

$$\partial_\nu f_\mu^{[\nu\lambda]}{}_{,\lambda} \equiv 0 \quad (8.22)$$

выполняющимся для произвольного трехвалентного тензора $f_\mu^{\nu\lambda}$, где квадратные скобки означают антисимметризацию

$$f_\mu^{[\nu\lambda]} = \frac{1}{2} (f_\mu^{\nu\lambda} - f_\mu^{\lambda\nu}). \quad (8.23)$$

Если

$$\overset{s}{T}_\mu{}^\nu = \overset{c}{T}_\mu{}^\nu + f_\mu^{[\nu\lambda]}{}_{,\lambda}, \quad (8.24)$$

то новый $\overset{c}{T}_\mu{}^\nu$ также удовлетворяет (8.18). В частности, можно выбрать тензор f так, чтобы новый тензор энергии-импульса был симметричен по индексам

$$\overset{s}{T}_{\mu\nu} = \overset{s}{T}_{\nu\mu} \quad (8.25)$$

(канонический ТЭИ этим свойством, вообще говоря, не обладает). Симметричный ТЭИ имеет то преимущество, что позволяет построить сохраняющийся (имеющий нулевую дивергенцию) тензор 3-го ранга

$$M_{\mu\nu\lambda} = x_\mu \overset{s}{T}_{\nu\lambda} - x_\nu \overset{s}{T}_{\mu\lambda}, \quad (8.26)$$

$$\partial_\lambda M_{\mu\nu}{}^\lambda = 0, \quad (8.27)$$

такой, что антисимметричный тензор

$$L_{\mu\nu} = \int_V M_{\mu\nu}{}^\lambda dS_\lambda \quad (8.28)$$

сохраняется. Этот тензор называется 4-тензором момента количества движения.

Построим канонический ТЭИ свободного электромагнитного поля. Подставляя \mathcal{L}_F из (8.12) в (8.19) находим

$$\overset{c}{T}_\mu{}^\nu = \frac{1}{4\pi c} \left(F_{\lambda}{}^\nu A^{\lambda}{}_{,\mu} + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F^2 \right), \quad (8.29)$$

где $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Добавляя дивергенцию от тензора

$$f_\mu^{[\nu\lambda]} = -\frac{1}{4\pi c} F^{\nu\lambda} A_\mu \quad (8.30)$$

(здесь $A_\mu{}^{,\lambda} \equiv \eta^{\lambda\nu} A_{\mu,\nu}$), из (8.24) получаем

$$\overset{s}{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi c} \left(F_{\mu\lambda} F^{\lambda}{}_\nu + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^2 \right). \quad (8.31)$$

Подстановка $F_{\mu\nu}$ из (5.26) приводит к следующим явным выражениям для контравариантных компонент симметричного ТЭИ:

$$\overset{s}{T}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\tau_{xx} & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ S_y/c & -\tau_{yx} & -\tau_{yy} & -\tau_{yz} \\ S_z/c & -\tau_{zx} & -\tau_{zy} & -\tau_{zz} \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

где W , \mathbf{S} и τ_{ij} определяются формулами (3.15), (3.20), (3.24). Таким образом, компонента T^{00} является плотностью энергии, смешанные компоненты T^{0i} (умноженные на c) равны плотности импульса, а пространственные компоненты T^{ij} образуют тензор натяжений электромагнитного поля. Поэтому 4-вектор

$$P^\mu = \int_V \overset{s}{T}^{\mu\nu} dS_\nu = \left(\int_V W d^3x, \frac{1}{c} \int_V \mathbf{S} d^3x \right) \quad (8.33)$$

действительно представляет собой 4-импульс поля, находящегося в объеме V .

Рассмотрим теперь полную систему, состоящую из зарядов и поля. Тогда ТЭИ $\overset{s}{T}^{\mu\nu}$ уже будет иметь ненулевую дивергенцию:

$$\partial_\nu \overset{s}{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^\mu{}_\nu j^\nu \quad (8.34)$$

(при вычислении следует воспользоваться уравнениями Максвелла $F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$, $dF = 0$). Этому и следовало ожидать, поскольку теперь должен сохраняться лишь полный 4-импульс, включающий 4-импульс зарядов. Такой тензор здесь проще всего построить «вручную», (вариационное построение будет описано в главе 12) проверив, что результирующий закон сохранения имеет место в силу уравнений движения. Рассмотрим симметричный тензор

$$\overset{m}{T}^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha c \int u_\alpha^\mu u_\alpha^\nu \delta^4(x - x_\alpha(s)) ds, \quad (8.35)$$

который представляет собой тензорный аналог плотности 4-тока. Дифференцируя по x^ν с учётом соотношения $dx^\mu = u^\mu ds$, находим:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \overset{m}{T}^{\mu\nu} &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha c u_\alpha^\mu u_\alpha^\nu \partial_\nu \delta^4(x - x_\alpha(s)) ds = \\ &= -\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha c u_\alpha^\mu \frac{d}{ds} \delta^4(x - x_\alpha(s)) ds = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha c \frac{du_\alpha^\mu}{ds} \delta^4(x - x_\alpha(s)) ds = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu \int u_\alpha^\nu \delta^4(x - x_\alpha(s)), \end{aligned} \quad (8.36)$$

что равно правой части (8.34) со знаком минус. Итак, уравнение непрерывности

$$\partial_\nu \left(\overset{s}{T}^{\mu\nu} + \overset{m}{T}^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (8.37)$$

должно совпадать с дифференциальной формой закона сохранения энергии-импульса для полной системы. Подставив сюда (8.32) и (8.35), действительно получаем соотношения (3.19), (3.23), полученные из уравнений Максвелла.

Подстановка (8.35) в (8.28) приводит к следующему выражению для тензора момента количества движения

$$L^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha^\mu p_\alpha^\nu - x_\alpha^\nu p_\alpha^\mu, \quad (8.38)$$

где $p_\alpha^\nu = m_\alpha c u_\alpha^\nu / \sqrt{1 - v_\alpha^2/c^2}$. Трёхмерная часть этого тензора дуальна моменту количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, а смешанные компоненты равны

$$L^{0i} = \sum_\alpha \left(t p_\alpha^i - \frac{\mathcal{E}_\alpha x_\alpha^i}{c^2} \right). \quad (8.39)$$

Их сохранение представляет собой условие равномерного движения центра «масс», координаты которого определяются через энергии частиц.

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_\alpha \mathcal{E}_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{\sum_\alpha \mathcal{E}_\alpha}, \quad (8.40)$$

со скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha}{\sum_\alpha \mathcal{E}_\alpha}. \quad (8.41)$$

В заключение заметим, что если в определении (8.26) плотности тензора момента вместо симметричного ТЭИ использовать канонический, то для получения сохраняющейся величины нужно будет добавить *тензор спина* $S_{\mu\nu\lambda}$:

$$M_{\mu\nu\lambda} = x_\mu \overset{c}{T}_{\nu\lambda} - x_\nu \overset{c}{T}_{\mu\lambda} + S_{\mu\nu\lambda}, \quad (8.42)$$

смысл которого как внутреннего момента количества движения фотона становится ясным в квантовой теории электромагнитного поля.

Глава 9.

Электромагнитное излучение

Важнейшим отличием электромагнитного взаимодействия точечных зарядов от взаимодействия материальных точек в механике является невозможность ограничиться при его описании рассмотрением только переменных, характеризующих движение самих частиц. В электродинамике взаимодействие является результатом двух актов: порождения электромагнитного поля одним зарядом и воздействия этого поля на другой заряд. Эти акты разнесены во времени, поскольку уравнения Максвелла описывают распространение электромагнитного поля с конечной скоростью c . Возможен и процесс «отчуждения» поля: заряд, движущийся ускоренно, порождает не только движущееся вместе с ним кулоновское поле, но и *волновое* электромагнитное поле, которое затем распространяется независимо от породившего его заряда. Этот процесс называется *электромагнитным излучением*.

9.1. Функции Грина уравнения Даламбера

Рассмотрим уравнение для 4-потенциала A^μ , создаваемого заданным током j^μ

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (9.1)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int G(x-x') j^\mu(x') d^4x, \quad (9.2)$$

где $G(x-x')$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\square_x G(x-x') = -4\pi\delta^4(x-x'), \quad (9.3)$$

индекс x означает, что оператор Даламбера \square действует на координату x .

Функция Грина G определена неоднозначно: к решению неоднородного уравнения (9.3) можно добавить решение однородного уравнения. Доопределение функции Грина требует наложения некоторого дополнительного физического условия. Естественным требованием является условие запаздывания,

$$G_{\text{ret}}(x-x') = 0, \quad \forall t < t', \quad (9.4)$$

определяющее *запаздывающую* функцию Грина. Чтобы построить для нее явное выражение, введем разности $\tau = t - t'$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и заметим, что решение уравнения (9.3) не должно зависеть от направления вектора \mathbf{R} , так что в выражении для оператора Лапласа всюду, кроме точки $\mathbf{R} = 0$, угловую часть можно опустить. В результате для $G \equiv G(\tau, \mathbf{R})$ будем иметь уравнение

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial G}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = -4\pi\delta^3(\mathbf{R})\delta(\tau), \quad (9.5)$$

где $R = |\mathbf{R}|$. Чтобы правильно учесть особенность при $\mathbf{R} = 0$ в смысле обобщенных функций, достаточно заметить, что уравнение (1.23) в сферических координатах принимает вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \right) = \partial_R^2 \frac{1}{R} + \frac{2}{R} \partial_R \frac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\mathbf{R}), \quad (9.6)$$

и, таким образом, действие оператора $R^{-2} \partial_R (R^2 \partial_R)$ на $1/R$ в смысле обобщенных функций как раз даёт дельта-функцию, стоящую в правой части (9.5). Сопоставляя уравнения (9.6) и (9.5), можно заметить, что величина

$$G_{\text{ret}} = \frac{\delta(c\tau - R)}{R} \quad (9.7)$$

удовлетворяет как (9.5), так и дополнительному условию (9.4). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \partial_R \left[R^2 \partial_R \left(\frac{\delta(c\tau - R)}{R} \right) \right] - \frac{1}{c^2} \frac{1}{R} \partial_\tau^2 \delta(c\tau - R) = \\ = \delta(c\tau - R) \frac{1}{R^2} \partial_R (R^2 \partial_R \frac{1}{R}) + \frac{1}{R} \partial_R^2 \delta(c\tau - R) - \frac{1}{c^2} \frac{1}{R} \partial_\tau^2 \delta(c\tau - R) = -4\pi \delta^3(\mathbf{R}) \delta(c\tau), \end{aligned} \quad (9.8)$$

где учтено, что члены, содержащие первые производные от $\delta(c\tau - R)$, сокращаются, кроме того $\delta(c\tau - R)\delta(\mathbf{R}) = \delta(c\tau)\delta(\mathbf{R})$. Таким образом, выражение (9.7) представляет собой искомую запаздывающую функцию Грина.

Проведенная выкладка не изменяется, если вместо $c\tau - R$ в выражении для функции Грина взять $c\tau + R$,

$$G_{\text{adv}} = \frac{\delta(c\tau + R)}{R}, \quad (9.9)$$

однако дополнительное условие теперь будет иметь следующий вид

$$G_{\text{adv}}(x - x') = 0 \quad \forall t > t'. \quad (9.10)$$

Это условие определяет *опережающую* функцию Грина. Ясно, что истинное поле, создаваемое источником j^μ , должно удовлетворять условию *запаздывания*, поэтому функция Грина (9.9) сама по себе не является физической. Однако, полезно представить запаздывающую функцию Грина в виде суммы *собственной* и *радиационной* функций:

$$G_{\text{ret}} = G_{\text{self}} + G_{\text{rad}}, \quad (9.11)$$

$$G_{\text{self}} = \frac{1}{2}(G_{\text{ret}} + G_{\text{adv}}), \quad (9.12)$$

$$G_{\text{rad}} = \frac{1}{2}(G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}), \quad (9.13)$$

что соответствует разбиению поля на четную и нечетную части относительно инверсии времени $\tau \rightarrow -\tau$:

$$G_{\text{rad}}(-\tau) = -G_{\text{rad}}(\tau), \quad (9.14)$$

$$G_{\text{self}}(-\tau) = G_{\text{self}}(\tau). \quad (9.15)$$

Следует ожидать, что кулоновская часть поля будет описываться четной функцией Грина G_{self} , действительно, эта часть поля движется вместе с зарядом, поэтому несущественно, смотрим ли мы в реальном времени или «прокручиваем пленку назад». Излучение, напротив, должно соответствовать нечетной части поля относительно отражения времени: в реальном времени волна распространяется от источника на бесконечность, при «прокручивании назад» волна приходит из бесконечности и движется к источнику, что физически соответствует *поглощению*, а не излучению. Можно также заметить, что функция G_{rad} удовлетворяет *свободному* уравнению Даламбера

$$\square G_{\text{rad}} = 0, \quad (9.16)$$

это также говорит о том, что мы имеем дело с волновой (свободной) частью поля. Учитывая правило

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f(x_i) = 0, \quad (9.17)$$

где суммирование ведется по всем (простым) корням функции f , из (9.7), (9.9), (9.12) и (9.13) находим

$$G_{\text{self}} = \delta(c^2\tau^2 - R^2) = \delta[(x^\mu - x^{\mu'})(x_\mu - x_{\mu}')], \quad (9.18)$$

$$G_{\text{rad}} = \text{sign}(\tau)\delta(c^2\tau^2 - R^2) = \text{sign}(\tau)\delta[(x^\mu - x^{\mu'})(x_\mu - x_{\mu}')]. \quad (9.19)$$

Эти выражения явно лоренц-инвариантны.

9.2. Запаздывающие потенциалы

Подставляя (9.7) в (9.2) и выбирая в качестве источника плотность тока одиночного заряда (8.9), движущегося вдоль мировой линии $x^\mu = x_0^\mu(s)$, находим

$$A_{\text{ret}}^\mu(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{u^\mu(s) \delta(c(t - t_0(s)) - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s)|) ds}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s)|}. \quad (9.20)$$

При интегрировании по s нужно учесть, что $u^\mu = \frac{dx_0^\mu}{ds}$ и

$$\frac{d}{ds} \{c(t - t_0(s)) - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s)|\} = u^0 \left(\frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{cR} - 1 \right), \quad (9.21)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(s)$, причем равенство нулю аргумента δ -функции определяет момент времени t_0 как неявную функцию t, \mathbf{r} :

$$t_0(t, \mathbf{r}) = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0[t_0(t, \mathbf{r})]|. \quad (9.22)$$

С учётом этого получаем

$$A_{\text{ret}}^\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{e u^\mu}{c u^0 (Rc - \mathbf{v}\mathbf{R})} \Big|_{t_0(t, \mathbf{r})}, \quad (9.23)$$

где величины в правой части относятся к моменту t_0 на траектории. Физически t_0 следует понимать как момент «испускания» поля в точке \mathbf{r}_0 , а t — как момент наблюдения в точке \mathbf{r} , уравнение (9.22) при этом означает, что поле распространяется со скоростью c из точки \mathbf{r}_0 в точку \mathbf{r} .

9.3. Излучение

Чтобы вычислить напряженности электрического и магнитного полей, нужно продифференцировать A_{ret}^μ по \mathbf{r}, t в соответствии с формулами (5.1). При этом дифференцирование соотношения (9.22) даёт

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_0}{\partial t} &= 1 + \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{Rc} \frac{\partial t_0}{\partial t}, \\ \frac{\partial t_0}{\partial \mathbf{r}} &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{(\mathbf{R}\mathbf{v})}{R} \frac{\partial t_0}{\partial \mathbf{r}} \right), \end{aligned} \quad (9.24)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_0}{\partial t} &= \frac{c}{c - \mathbf{n}\mathbf{v}}, & \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{R}}{R}, \\ \frac{\partial t_0}{\partial \mathbf{r}} &= -\frac{\mathbf{n}}{c - \mathbf{n}\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Результат вычисления следующий:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial A^0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{e(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c})(1 - \frac{v^2}{c^2})}{R^2 (1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c})^3} + \frac{e[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a}]]}{c^2 R (1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c})^3}, \quad (9.26)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (9.27)$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ — ускорение заряда. Вектор \mathbf{n} является единичным вектором вдоль луча зрения, при этом магнитное поле ортогонально \mathbf{n} . Второе слагаемое в (9.26) отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \neq 0$. Покоящийся заряд ($\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} = 0$) создает кулоново поле $\mathbf{E} = e\mathbf{n}/R^2$, при этом $\mathbf{B} = 0$. Характерно, что если первое слагаемое (кулонова часть) спадает с расстоянием как $1/R^2$, то второе, зависящее от ускорения, спадает как $1/R$. Поэтому, если вычислить поток энергии, переносимый полем через бесконечно удаленную сферу S_∞^2 , то первое слагаемое в (9.26) вклада не дает, а второе дает отличное от нуля выражение

$$I = \oint_{S_\infty^2} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{c}{4\pi} \oint_{S_\infty^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \mathbf{n} R^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \oint_{S_\infty^2} E^2 R^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c^3} \oint_{S_\infty^2} \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a}]]^2}{(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c})^6} d\Omega. \quad (9.28)$$

При выводе этой формулы учтено, что при $r \rightarrow \infty$ и конечном \mathbf{r}_0 имеем $R \sim r$, при этом вектор \mathbf{n} нормален к S_∞^2 . Подынтегральное выражение является положительно определённым, поэтому интеграл положителен, если ускорение отлично от нуля. Отличное от нуля значение и положительность полного потока энергии через замкнутую поверхность означает, что заряд необратимо теряет энергию, которая уносится электромагнитным полем (излучение). Величина I называется интенсивностью излучения.

Интегрирование по углам в (9.28) удобно выполнить, выбирая систему отсчета, в которой заряд мгновенно покоится, $\mathbf{v} = 0$. Тогда имеем

$$I = \frac{e^2}{4\pi c^3} \oint_{S_\infty^2} (\mathbf{a}^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2) d\Omega = \frac{2}{3} \frac{e^2 \mathbf{a}^2}{c^3}. \quad (9.29)$$

Подынтегральное выражение здесь симметрично относительно замены \mathbf{n} на $-\mathbf{n}$, т.е. в системе покоя заряд излучает одинаково во взаимно противоположных направлениях. Далее, вектор плотности импульса электромагнитной волны ориентирован вдоль направления её распространения, поэтому из закона сохранения импульса следует, что излучающий заряд не теряет импульса. Поскольку $I = -d\mathcal{E}/dt$ (\mathcal{E} — энергия заряда), то $-d\mathcal{E}/ds = Iu^0$, отсюда следует, что величина I не изменяется при переходе к произвольной системе отсчета (обе величины \mathcal{E} и u^0 являются временными компонентами 4-векторов). Таким образом, преобразование (9.29) к произвольной системе отсчета сводится к замене \mathbf{a}^2 на инвариант, который совпадает с \mathbf{a}^2 в системе покоя. Из (7.11) следует, что такой величиной является $-c^4(du^\mu/ds)^2$ (квадрат по метрике Минковского). Таким образом, в произвольной системе отсчета будем иметь

$$I = -\frac{2e^2 c}{3} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du_\mu}{ds}. \quad (9.30)$$

Это выражение является положительно определенным, поскольку 4-ускорение — пространственноподобный вектор. К такому же результату можно прийти, выполнив явно интегрирование по углам в (9.28). В случае, когда ускорение и скорость параллельны, получаем

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{a^2}{(1 - v^2/c^2)^3}, \quad (9.31)$$

если перпендикулярны, то

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{a^2}{(1 - v^2/c^2)^2}. \quad (9.32)$$

В обоих случаях a — абсолютная величина ускорения в собственной системе отсчета.

Рассмотрим подробнее угловое распределение излучения (подынтегральное выражение в (9.28)). Раскрывая квадрат векторного произведения, находим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c})^5} \times \left\{ \mathbf{a}^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)^2 - (\mathbf{a}\mathbf{n})^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + 2(\mathbf{a}\mathbf{n}) \left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{c}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right) \right\}. \quad (9.33)$$

Отсюда видно, что в ультрарелятивистском случае ($v \rightarrow c$) излучение сильно анизотропно, и происходит в основном в узкий конус вокруг направления \mathbf{v} с углом раствора

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.34)$$

Для получения этой оценки следует разложить $1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c} \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2}$, где θ — (малый) угол между \mathbf{v} и \mathbf{n} , и рассмотреть предел $v \rightarrow c$.

Важным примером является синхротронное излучение заряженных частиц в циклических ускорителях. Если заряженная частица движется в магнитном поле \mathbf{B} перпендикулярно силовым линиям, центростремительное ускорение равно

$$\mathbf{a} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.35)$$

Соответствующая интенсивность излучения определяется формулой (9.32):

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2 v^2}{m^2 c^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.36)$$

Эта величина растет пропорционально квадрату энергии частицы и в случае электронов является основным источником потерь в ускорителях.

Другой важный пример — излучение электрона в атоме. Если бы поведение электрона в атоме подчинялось законам классической электродинамики, то в модели Резерфорда (точечное ядро, точечный электрон на финитной орбите) время жизни электрона было бы ничтожно малым.

9.4. Радиационное трение

Излучение электромагнитных волн приводит к появлению силы отдачи, действующей на точечный заряд. Эту силу удастся вычислить, рассматривая в уравнении движения

$$m \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu \quad (9.37)$$

помимо внешнего $F_{\mu\nu}^{\text{ext}}$ также собственное поле заряда

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{\text{ret}} - \partial_\nu A_\mu^{\text{ret}}, \quad (9.38)$$

где A_ν^{ret} — запаздывающий потенциал. Заранее ясно, что собственное поле расходится в точке, где находится заряд, однако возникающую расходимость удается устранить с помощью *перенормировки массы*. Положим массу m в (9.37) равной некоторой нефизической «затравочной» массе m_0 , величина которой заранее не фиксирована и может быть бесконечной (любого знака). Выделение бесконечных членов в правой части (9.37) показывает, что они также пропорциональны du^μ/ds , что и позволяет объединить их с левой частью, объявив суммарный коэффициент равным физической массе заряда.

Рассмотрим сначала в правой части (9.37) вклад собственного поля (9.38), представив запаздывающее поле в виде (9.11). Пусть заряд движется вдоль мировой линии $x^\mu(s)$, тогда s' будем считать «моментом испускания», а s — «моментом поглощения», в окончательном пределе $s' \rightarrow s$. «Собственное» поле (self) в точке $x(s)$ тогда в соответствии с (9.18) равно

$$\begin{aligned} A_{\text{self}}^\mu(x) &= \frac{1}{c} \int G^{\text{self}}(x-x') j^\mu(x') d^4x' = \\ &= \frac{e}{c} \int u^\mu(s') \delta[(x-x')^2] \delta^4(x-x'(s')) ds' d^4x' = \\ &= \frac{e}{c} \int u^\mu(s') \delta[(x-x'(s'))^2] ds', \end{aligned} \quad (9.39)$$

где $(x-x')^2 \equiv (x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)$. Подставляя в (9.38), находим

$$\begin{aligned} f_{\text{self}}^{\mu\nu} &= \frac{2e}{c} \int u^{[\nu}(s') \partial^{\mu]} \delta[(x-x'(s'))^2] ds' = \\ &= \frac{4e}{c} \int u^{[\nu}(s') (x-x'(s'))^{\mu]} \delta'[(x-x'(s'))^2] ds', \end{aligned} \quad (9.40)$$

где штрихом обозначена производная от дельта-функции по ее аргументу. Построим теперь выражение для силы самодействия, подставляя поле (9.40) в правую часть (9.37) и беря его значение в точке $x^\mu = x^\mu(s)$ на мировой линии:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{self}}^\mu &= \frac{e}{c} f_{\text{self}}^{\mu\nu}(x(s)) u_\nu(s) = \\ &= \frac{4e^2}{c^2} \int u_\nu(s) u^{[\nu}(s') (x(s) - x'(s'))^{\mu]} \delta'[(x(s) - x'(s'))^2] ds'. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Присутствие (производной от) δ -функции означает, что в конечном счете $s = s'$, однако, при переходе к пределу $s' = s - \sigma$, $\sigma \rightarrow 0$, возникают сингулярные члены, которые необходимо выделить явно. Затем следуют члены, конечные при $\sigma \rightarrow 0$, и, наконец, члены, обращающиеся в нуль в этом пределе. Поэтому произведём разложение в (9.41) по σ , имея в виду, что аргумент дельта-функции в пределе равен

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (x(s) - x'(s'))^2 = \sigma^2 u^\mu u_\mu = \sigma^2. \quad (9.42)$$

В остальных членах пишем

$$\begin{aligned} x^\mu(s') &= x^\mu(s) - \sigma u^\mu + \frac{\sigma^2}{2} \dot{u}^\mu - \frac{\sigma^3}{6} \ddot{u}^\mu + \dots, \\ u^\nu(s') &= u^\nu - \sigma \dot{u}^\nu + \frac{\sigma^2}{2} \ddot{u}^\nu + \dots, \end{aligned} \quad (9.43)$$

причём обозначенные многоточием члены более высокого порядка вклада не дают. Учитывая, что $\delta'(\sigma^2) = \frac{d}{d\sigma^2} \delta(\sigma^2)$ — четная функция σ , можно показать, что ненулевой вклад дают только четные степени σ в подынтегральном выражении не выше второй. Имеется единственный член такого вида, который пропорционален \dot{u}^μ :

$$\mathcal{F}_{\text{self}}^\mu = \frac{e^2}{c^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \frac{d}{d\sigma^2} \delta(\sigma^2) d\sigma \right) \dot{u}^\mu. \quad (9.44)$$

Стоящий здесь интеграл расходится, однако, замечая, что сила $\mathcal{F}_{\text{self}}^\mu$ пропорциональна \dot{u}^μ , можем перенести её в левую часть уравнения движения (9.37), объединив расходящийся интеграл с затравочной массой:

$$mc = m_0 c - \frac{e^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \frac{d}{d\sigma^2} \delta(\sigma^2) d\sigma, \quad (9.45)$$

и считая конечную величину m физической массой. Таким образом, вклад силы самодействия в уравнение движения заряда сводится к бесконечной перенормировке его массы.

После этого остается рассмотреть вклад радиационной компоненты поля в правой части (9.37). Отличие радиационной функции Грина G_{rad} от G_{self} только в факторе $\text{sign}(x^0 - x'^0) = \text{sign}(\sigma)$, поскольку вектор u^μ времениподобен; поэтому вместо (9.41) получаем

$$\mathcal{F}_{\text{rad}}^\mu = \frac{4e^2}{c^2} \int u_\nu(s) u^{[\nu}(s') (x(s) - x'(s'))^\mu] \frac{\sigma}{|\sigma|} \frac{d}{d\sigma^2} \delta(\sigma^2) d\sigma. \quad (9.46)$$

Теперь ненулевой вклад дают только нечётные по σ члены разложения степени не выше третьей. Вычисления показывают, что членов первой степени нет вовсе, а члены третьей степени дают конечный вклад, пропорциональный интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^3 \frac{\sigma}{|\sigma|} \frac{d}{d\sigma^2} \delta(\sigma^2) d\sigma = \frac{1}{2}. \quad (9.47)$$

Производя в (9.46) разложение по σ и собирая кубические члены, находим

$$\mathcal{F}_{\text{rad}}^\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \left(\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} + u^\mu \frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds} \right). \quad (9.48)$$

Наконец, добавив в правую часть внешнее поле $F_{\mu\nu}^{\text{ext}}$, получаем уравнение Дирака-Лоренца:

$$mc \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\nu}^{\text{ext}} u^\nu + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \left(\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} + u^\mu \frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds} \right), \quad (9.49)$$

в котором присутствует сила радиационного трения.

Заметим, что хотя и удаётся вывести *одночастичное* уравнение для излучающего заряда и тем самым исключить из рассмотрения бесконечное число степеней свободы электромагнитного поля, полученное уравнение не является вполне удовлетворительным. Прежде всего заметим, что потеря энергии на излучение дается лишь вторым слагаемым в (9.48) (ср. с (9.30)), однако при учёте лишь этого слагаемого была бы утрачена ортогональность 4-скорости и 4-ускорения, лишь полная сила $\mathcal{F}_{\text{rad}}^\mu$ ортогональна u_μ . При этом первое слагаемое в (9.48) имеет характер полной производной, поэтому оно *не может описать* необратимую потерю энергии. Действительно, если ускорение (и, следовательно, излучение) было отлично от нуля на конечном отрезке времени, то первое слагаемое не давало бы вклада в полную потерю энергии. Поэтому было бы целесообразно объединить это слагаемое (при $\mu = 0$) с левой частью уравнения, считая величину $-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \frac{du^0}{ds}$ добавкой к энергии $mc^2 u^0$ (*шоттовская энергия*). Однако и это не является вполне последовательным: гамильтоново определение энергии будет утрачено. Наконец, наличие высших производных в уравнении движения (которые не удаётся ввести методами лагранжевой или гамильтоновой механики) приводит к дополнительным затруднениям. Например, при $F_{\mu\nu}^{\text{ext}} = 0$ уравнение (9.49) имеет так называемые самоускоряющиеся решения. Рассмотрим для простоты случай скоростей, малых по сравнению со скоростью света. Тогда из (9.49) при отсутствии внешнего поля получаем

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2}. \quad (9.50)$$

Нетривиальным решением этого уравнения является следующее:

$$\mathbf{a} = a_0 e^{\frac{3ct}{2r_{\text{кл}}}}, \quad (9.51)$$

где a — ускорение, $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{mc^2}$ — так называемый классический радиус заряда (для электрона величина порядка 10^{-11} см). Таким образом, при построении решений уравнения Дирака-Лоренца необходимы дополнительные условия для отбора физических решений. В частности, ясно, что при отсутствии внешнего поля излучение происходить не будет, и самоускоряющиеся решения следует отбросить ($a_0 = 0$).

В конечном счете все эти затруднения связаны с тем, что из лагранжевой системы с бесконечным числом степеней свободы была выделена нелагранжева система лишь с конечным числом степеней свободы. Хотя вывод уравнения Дирака-Лоренца и был достаточно обоснован, все же использованная при этом процедура перенормировки массы не была заложена в исходном формализме теории. Следует иметь в виду и другое обстоятельство, связанное с величиной возникающего при этом размерного параметра $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{mc^2}$. Этот параметр в $\hbar c/e^2 = 137$ раз меньше так называемой комптоновской длины волны электрона $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$, являющейся индикатором масштаба, на котором становятся существенными квантовые эффекты. Таким образом, последовательное решение проблемы радиационного трения является скорее задачей квантовой теории поля.

9.5. Рассеяние электромагнитных волн

Рассмотрим некоторую систему зарядов, подвергающуюся воздействию электромагнитных волн от внешнего источника. Поле электромагнитных волн будет вызывать вынужденное движение зарядов, причём ввиду периодичности движение будет ускоренным. Это, в свою очередь, должно приводить к возникновению вторичного электромагнитного излучения во всех направлениях. Поэтому, если падающая волна имела определенное направление распространения, то наблюдатель воспринимает вторичное излучение как *рассеяние*.

Рассмотрим рассеяние плоской волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}); \quad \mathbf{B} = [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]c/\omega \quad (9.52)$$

на свободном заряде, который изначально покоился, предполагая, что воздействие волны (9.52) начинается при $t = 0$. Если $eE_0/m\omega \ll c$, то за время одного полупериода π/ω заряд приобретает скорость $v \sim a\pi/\omega$ ($a \sim eE_0/m$ — ускорение), малую по сравнению со скоростью света, а затем начинает ускоряться в противоположном направлении, так что движение остаётся нерелятивистским. В этом случае можно пренебречь действием магнитного поля, а также пространственной зависимостью в (9.52), поскольку

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \sim \frac{\omega}{c} v \frac{\pi}{\omega} \sim v/c \ll 1. \quad (9.53)$$

В таком приближении уравнение движения будет иметь вид

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E}_0 \sin(\omega t), \quad (9.54)$$

следовательно, ускорение заряда является периодической функцией времени. Это движение вызывает вторичное электромагнитное излучение в виде волн той же частоты. Действительно, при $v/c \ll 1$ второе слагаемое в (9.26) имеет на больших расстояниях от заряда (где $R \sim r$) вид

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 r} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{a}]], \quad (9.55)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор вдоль направления распространения, поэтому поле является периодической функцией времени той же частоты. Угловое распределение интенсивности излучения находим из соотношения (9.29):

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} (\mathbf{a}^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2) = \frac{e^4 E_0^2 \sin^2 \omega t \sin^2 \theta}{4\pi m^2 c^3}, \quad (9.56)$$

где θ — угол между \mathbf{E}_0 и \mathbf{n} . Усреднённое по времени значение равно

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{cE_0^2}{8\pi} r_{\text{кл}}^2 \sin^2 \theta. \quad (9.57)$$

Как видно отсюда, рассеяние происходит во всех направлениях, кроме $\theta = 0, \pi$. Процесс принято характеризовать *дифференциальным сечением рассеяния*, разделив (9.57) на усреднённый по времени поток энергии в падающей волне $\overline{S} = \frac{cE_0^2}{8\pi}$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \overline{S}^{-1} \overline{\frac{dI}{d\Omega}} = r_{\text{кл}}^2 \sin^2 \theta. \quad (9.58)$$

Физически $d\sigma$ есть эффективная площадь, с которой падающая волна рассеивается в телесный угол $d\Omega$ в направлении θ . *Полное сечение рассеяния* определяется как интеграл от (9.58) по всем углам

$$\sigma = \oint r_{\text{кл}}^2 \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{8\pi}{3} r_{\text{кл}}^2 \quad (9.59)$$

(формула Томсона). Таким образом, заряд рассеивает плоскую волну с эффективной площади $\sim r_{\text{кл}}^2$.

Рассмотрим теперь рассеяние на *связанных* зарядах. Пусть в отсутствие волны заряд совершает периодическое движение с частотой ω_0 (например, колеблющийся ион в кристаллической решетке). При этом заряд излучает, однако нас будет интересовать не его *собственное* излучение, а дополнительное излучение, возникающее при воздействии на заряд периодического поля внешней электромагнитной волны (9.52). Вместо (9.54) тогда будем иметь уравнение

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \sin \omega t, \quad (9.60)$$

вынужденное решение которого имеет вид

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \frac{\sin \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (9.61)$$

Повторяя предыдущие вычисления, для полного сечения рассеяния получим

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_{\text{кл}}^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (9.62)$$

Характерной особенностью является зависимость сечения от близости к собственной частоте, и, следовательно, избирательный характер рассеяния. Сечение (9.62) расходится в резонансе $\omega = \omega_0$. На самом деле, всегда имеются диссипативные процессы, к которым, в частности, относится и сила радиационного трения; эти процессы препятствуют бесконечному росту амплитуды колебаний в резонансе. Вводя в левую часть (9.60) диссипативный член $\gamma \dot{r}$, где γ — коэффициент трения, вместо (9.62) будем иметь

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_{\text{кл}}^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (9.63)$$

Это сечение остается конечным при $\omega = \omega_0$.

Глава 10.

Пространство-время в общей теории относительности

Представление об инерциальных системах отсчета, лежащее в основе СТО, является ограниченным и справедливо лишь до тех пор, пока мы пренебрегаем эффектами *гравитации*. Между тем гравитационное взаимодействие, в отличие от электромагнитного, является универсальным: все виды материи — электрически нейтральные и заряженные частицы, электромагнитное и другие известные в физике поля — подвержены гравитационному взаимодействию с одинаковой константой связи. Разумеется, во многих случаях гравитационные силы малы по сравнению с другими видами сил, и тогда оправдано использование СТО. Но, строго говоря, предположение о глобальном существовании ИСО при учёте гравитации является неверным. В общей теории относительности (ОТО) инерциальные системы отсчета не играют выделенной роли, и уравнения записываются в *общековариантном* виде в искривлённом пространстве-времени. На метрику пространства событий накладываются лишь общие ограничения, такие как лоренцева сигнатура и дважды дифференцируемость.

10.1. Принцип эквивалентности

Принцип эквивалентности (ПЭ) гласит, что силы *инерции* и гравитации локально неразличимы. Например, свободно падающая в гравитационном поле система отсчета является неинерциальной, причем силы инерции в точности компенсируют гравитационные силы. Этой же причине обязано состояние невесомости на спутнике, вращающемся по околоземной орбите: центробежные силы компенсируют гравитационное притяжение со стороны Земли. ПЭ справедлив лишь *локально*, как мы увидим далее, истинное гравитационное поле отличается от поля сил инерции тем, что *тензор кривизны* в первом случае отличен от нуля, а во втором равен нулю. Для определения тензора кривизны, зависящего от вторых производных от метрики, необходимы измерения в соседних точках.

Переход к неинерциальным системам описывается отсчета преобразованием координат общего вида

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x), \quad (10.1)$$

в результате чего независимая от координат метрика пространства событий становится функцией координат:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3. \quad (10.2)$$

Тот или иной выбор координат x^μ в пространстве событий является в значительной мере вопросом удобства. Интервал (10.2) по-прежнему является инвариантным по определению, так что при преобразованиях (10.1) метрика преобразуется следующим образом:

$$g_{\mu'\nu'}(x') = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}. \quad (10.3)$$

В отличие от СТО, форм-инвариантность метрики уже не предполагается.

ПЭ означает, что в присутствии гравитационного поля пространство событий по-прежнему определяется некоторой метрикой $g_{\mu\nu}$. При этом, однако, не существует возможности привести метрику к плоской метрике $\eta_{\mu\nu}$ всюду. Более того, не всегда *полное пространственно-временное многообразие* удастся накрыть одной *картой*. Поэтому общее определение пространства-времени в ОТО — это дифференцируемое многообразие с набором карт, накрывающих его в совокупности. Математический аппарат ОТО — дифференциальная геометрия многообразий.

Хотя наличие гравитационного поля препятствует приведению метрики к виду $\eta_{\mu\nu}$ всюду (не существует глобально определенных ИСО), это всегда можно сделать в любой заданной точке $x^\mu = x_0^\mu$, для чего достаточно привести матрицу $g_{\mu\nu}(x_0)$ к диагональному виду и затем произвести перерастяжку координат так, чтобы иметь

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (10.4)$$

Этого ещё недостаточно, чтобы построить *локальную* ИСО, в которой действие гравитационных сил было бы скомпенсировано действием сил инерции (мы вернемся к такому построению ниже), однако, приводит к важному ограничению на возможный выбор $g_{\mu\nu}$, связанный с *сигнатурой* $\eta_{\mu\nu}$. Сигнатура метрики (разность числа плюсов и минусов в (10.4)) является ее инвариантным свойством. В частности, определитель метрики пространства-времени должен быть отрицателен:

$$g = \det g_{\mu\nu} < 0. \quad (10.5)$$

Поскольку в ОТО выбор координат произволен, необходимо использовать некоторую процедуру измерения для определения физических расстояний и промежутков времени между событиями. Так, промежуток времени dt между событиями, разделенными интервалом ds^2 и происходящими в одной пространственной точке ($dx^i = 0$) очевидно равен

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}(x)} dx^0. \quad (10.6)$$

Эту величину можно проинтегрировать:

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (10.7)$$

и получить конечный промежуток времени между событиями (x_1^0, x^i) , (x_2^0, x^i) в одной пространственной точке. В общем случае неясно, какую из координат x^μ считать «временной», критерием выбора является положительность соответствующей компоненты метрики, т. е. g_{00} . Может случиться, что g_{00} в некоторой точке обращается в нуль и затем становится отрицательной. Это означает, что x^0 стала пространственной координатой, ввиду сохранения сигнатуры метрики должна появиться другая координата, которой отвечает положительная (диагональная) компонента метрики, она и становится временной координатой в этой области. Такая ситуация характерна для метрики *черной дыры*.

Вычисление расстояний выглядит сложнее, поскольку при этом нельзя просто положить $dx^0 = 0$: собственное время течет в разных пространственных точках по-разному. Рассмотрим две пространственные точки $x_1^i = x^i$ и $x_2^i = x^i + dx^i$. Распространение светового сигнала из 1 в 2 и обратно определяется двумя корнями уравнения

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{00}(dx^0)^2, \quad (10.8)$$

решая которое относительно dx^0 , получаем

$$dx_{\pm}^0 = g_{00}^{-1} \left[-g_{0i} dx^i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00}) dx^i dx^j} \right]. \quad (10.9)$$

Полный промежуток координатного «времени» x^0 распространения сигнала из 2 в 1 и обратно равен $dx_+^0 - dx_-^0$, а промежуток истинного времени получается с помощью (10.6). Умножая на c , получаем удвоенное расстояние между точками 1, 2, в результате

$$dl^2 = \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \right) dx^i dx^j \equiv \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (10.10)$$

где γ_{ij} следует понимать как метрику трехмерного пространства. Эта метрика является тензором, обратным к $-g^{ij}$, т. е. к пространственной части контравариантного тензора $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (10.11)$$

иначе говоря, γ_{ij} удовлетворяет уравнению

$$g^{ij} \gamma_{jk} = -\delta_k^i. \quad (10.12)$$

В отличие от (10.7), интегрировать dl между двумя точками, находящимися на конечном расстоянии, не имеет смысла, такой интеграл зависел бы от формы пути, если метрика $g_{\mu\nu}$ зависит от x^0 . Таким образом, в ОТО пространственные расстояния, вообще говоря, определены лишь в бесконечно малом. Однако, если метрика не зависит от временной координаты x^0 , интеграл от dl имеет смысл.

Нетривиальным является в ОТО и вопрос о синхронизации часов, находящихся в разных пространственных точках. В рассмотренном выше процессе измерения пространственного расстояния момент x^0 в точке 1 соответствует моменту $x^0 + \frac{1}{2}(dx_+^0 + dx_-^0)$ в точке 2, поэтому разность временных координат x^0 двух одновременных событий в точках, разделенных пространственными координатами dx^i есть

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}}. \quad (10.13)$$

Продолжая этот процесс, можно синхронизировать часы вдоль любой незамкнутой кривой. Но если мы возвращаемся в исходную точку, то, вообще говоря, получим другое показание часов, поскольку в общем случае

$$\oint \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} \neq 0. \quad (10.14)$$

Если $g_{0i} \equiv 0$, то синхронизация часов возможна. Подчеркнем, что с помощью некоторого преобразования координат (10.1) выполнения этого условия всегда можно добиться. Более того, координатным преобразованием можно обеспечить выполнение условия $g_{00} = 1$, всего в нашем распоряжении четыре произвольных функции. Такая система отсчета, в которой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j, \quad (10.15)$$

называется *синхронной*.

В *постоянном* гравитационном поле можно выбрать координаты так, чтобы метрический тензор не зависел от временной координаты x^0 . Тогда для событий в одной пространственной точке интервалы физического и координатного времени связаны (в силу (10.6)) соотношением

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} \Delta x^0, \quad (10.16)$$

справедливым для любых конечных промежутков. Если теперь рассмотреть две различные пространственные точки 1 и 2, то одинаковому промежутку координатного времени Δx^0 будут отвечать разные промежутки физического времени

$$\frac{\Delta\tau_1}{\sqrt{g_{00}(1)}} = \frac{\Delta\tau_2}{\sqrt{g_{00}(2)}}. \quad (10.17)$$

Вместо часов можно рассматривать периодический процесс с частотой $\omega \sim \frac{1}{\Delta\tau}$. Тогда отсюда получаем соотношение для частот колебаний

$$\omega_1 \sqrt{g_{00}(1)} = \omega_2 \sqrt{g_{00}(2)}, \quad (10.18)$$

выражающее *красное смещение* в статическом гравитационном поле.

Можно связать эти соотношения с гравитационным потенциалом φ ньютоновской теории. В классической механике действие для массы m в гравитационном поле φ имеет вид

$$S_N = \int \left(m \frac{\mathbf{v}^2}{2} - m\varphi \right) dt. \quad (10.19)$$

В ОТО, согласно ПЭ, действие имеет тот же вид, что и в СТО:

$$S = -m \int ds = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt. \quad (10.20)$$

Сравнивая (10.20) и (10.19), находим, что S и S_N будут отличаться на несущественную величину $\int mc^2 dt$ (как и в СТО), если квадрат интервала имеет вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (c^2 + 2\varphi) dt^2 - d\mathbf{r}^2, \quad (10.21)$$

причем $\varphi \ll c^2$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \ll 1$. Таким образом, в нерелятивистском ньютоновском пределе только компонента метрики g_{00} отлична от единицы на малую величину

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, \quad (10.22)$$

остальные компоненты те же, что и для метрики Минковского. Подставляя это выражение в (10.16), находим

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x^0}{c} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right), \quad (10.23)$$

следовательно, собственное время течет тем быстрее, чем выше гравитационный потенциал. Аналогично, из (10.18) имеем в слабом постоянном гравитационном поле

$$\omega_1 \left(1 + \frac{\varphi_1}{c^2} \right) = \omega_2 \left(1 + \frac{\varphi_2}{c^2} \right), \quad (10.24)$$

это говорит о том, что частота света уменьшается с увеличением гравитационного потенциала. Этот эффект хорошо наблюдается экспериментально в поле Земли для разности высот порядка сотен метров.

10.2. Векторы, тензоры, параллельный перенос, кривизна

Напомним некоторые сведения из дифференциальной геометрии многообразий. Вектором называется оператор дифференцирования вдоль кривой

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (10.25)$$

оператор по определению не зависит от выбора координат, для его *компонент* V^μ при преобразованиях (10.1) соответственно получаем

$$V^{\mu'} = V^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}. \quad (10.26)$$

Аналогично, для *контравариантного тензора*

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_n} = T^{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_n}}{\partial x^{\mu_n}}. \quad (10.27)$$

Сопряжённым к векторному является пространство 1-форм (ковекторов)

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (10.28)$$

также инвариантных при преобразованиях (10.1). Для *компонент* A_μ получаем

$$A_{\mu'} = A_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}. \quad (10.29)$$

Соответственно, для *ковариантного тензора* будем иметь

$$T_{\mu'_1 \dots \mu'_n} = T_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}}. \quad (10.30)$$

Дифференцирование вектора (ковектора, тензора) по x^μ даёт объект нетензорной природы, который не имеет закона преобразования одного из типов (10.26), (10.27), (10.29), (10.30). Правильный тензорный закон преобразования имеют *ковариантные производные* вектора и ковектора

$$\nabla_\nu V^\mu \equiv V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda \quad (10.31)$$

$$\nabla_\nu A_\mu \equiv A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda, \quad (10.32)$$

и, соответственно, для тензоров высших валентностей

$$\nabla_\nu T^{\mu_1 \dots \mu_n} = T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{;\nu} = T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{,\nu} + \Gamma^{\mu_1}_{\nu\lambda} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_n} + \dots + \Gamma^{\mu_n}_{\nu\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_{n-1} \lambda}, \quad (10.33)$$

$$\nabla_\nu T_{\mu_1 \dots \mu_n} = T_{\mu_1 \dots \mu_n;\nu} = T_{\mu_1 \dots \mu_n,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu_1\nu} T_{\lambda \mu_2 \dots \mu_n} - \dots - \Gamma^\lambda_{\mu_n\nu} T_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} \lambda}. \quad (10.34)$$

Преобразования и ковариантные производные от *смешанных* тензоров получаются очевидной суперпозицией приведенных правил, например,

$$\nabla_\nu T_\mu^\lambda = T^\lambda_{\mu;\nu} = T^\lambda_{\mu,\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} T^\sigma_\mu - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} T^\lambda_\sigma. \quad (10.35)$$

Входящие в (10.31), (10.32) *символы Кристоффеля* определяются из условия ковариантного постоянства метрики

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\tau_{\lambda\mu} g_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\nu} g_{\mu\tau} = 0, \quad (10.36)$$

разрешая которое, находим

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} (g_{\mu\tau,\nu} + g_{\tau\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\tau}). \quad (10.37)$$

Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$. При преобразованиях (10.1) символы Кристоффеля преобразуются *неоднородно*:

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda}, \quad (10.38)$$

благодаря чему компенсируются неоднородные члены в законах преобразования величин типа $V^\mu_{;\nu}$, $A_{\mu;\nu}$ и других.

Ковариантная производная определяет полный дифференциал тензора

$$DV^\mu = V^\mu_{;\nu} dx^\nu = V^\mu_{;\nu} dx^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda dx^\nu, \quad (10.39)$$

который обращается в нуль при его *параллельном переносе*.

При ковариантном дифференцировании произведения выполняется правило Лейбница, например,

$$(A_\mu V^\nu)_{;\lambda} = A_{\mu;\lambda} V^\nu + A_\mu V^\nu_{;\lambda} \quad (10.40)$$

и т. д.

Используя соотношение для определителя метрики

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}, \quad (10.41)$$

находим следующее простое выражение для свёртки символов Кристоффеля по индексу

$$\Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\mu}, \quad (10.42)$$

поэтому ковариантная дивергенция вектора равна

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} A^\mu). \quad (10.43)$$

Применим эту формулу для вектора $A^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi = g^{\mu\nu} \nabla_\nu \psi$, где ψ — скаляр, получаем ковариантный оператор Лапласа

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \psi \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi). \quad (10.44)$$

аналогично упрощается ковариантная дивергенция от антисимметричного контравариантного тензора 2 ранга:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}). \quad (10.45)$$

Результат параллельного переноса вектора (тензора) из одной точки в другую зависит от формы пути, при переносе по замкнутому контуру, натянутому на $dx^\mu \wedge dx^\nu$ получим следующие приращения:

$$\delta V^\mu = -\frac{1}{2} R^\mu_{\nu\lambda\tau} V^\nu dx^\lambda dx^\tau, \quad (10.46)$$

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} R^\nu_{\mu\lambda\tau} A_\nu dx^\lambda dx^\tau, \quad (10.47)$$

где

$$\frac{1}{2} R^\mu_{\nu\lambda\tau} = \partial_{[\lambda} \Gamma^\mu_{\tau]\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma[\lambda} \Gamma^\sigma_{\tau]\nu} \quad (10.48)$$

— *тензор кривизны* Римана-Кристоффеля (индексы в квадратных скобках означают альтернирование с делением пополам). Тензор Римана удовлетворяет следующим свойствам (опускание индекса осуществляется по метрике $g_{\mu\nu}$):

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} = -R_{\nu\mu\lambda\tau} = -R_{\mu\nu\tau\lambda} = R_{\lambda\tau\mu\nu} \quad (10.49)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} + R_{\mu\lambda\tau\nu} + R_{\mu\tau\nu\lambda} = 0 \quad (\text{тождество Риччи}) \quad (10.50)$$

$$R^\mu_{\nu\lambda\tau;\sigma} + R^\mu_{\nu\tau\sigma;\lambda} + R^\mu_{\nu\sigma\lambda;\tau} = 0 \quad (\text{тождество Бианки}) \quad (10.51)$$

Свёртывание по паре индексов даёт *тензор Риччи*

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = R_{\nu\mu}, \quad (10.52)$$

свёртывание тензора Риччи даёт скалярную кривизну

$$R = R^\mu_{\mu}. \quad (10.53)$$

Из тождества Бианки (10.51) получаем тождество Бианки для тензора Риччи

$$R^\mu_{\nu;\mu} = \frac{1}{2} \partial_\nu R. \quad (10.54)$$

Подсчёт числа независимых компонент $R_{\mu\nu\lambda\tau}$ в четырёхмерном пространстве даёт 20 (21 компонента симметричного тензора $R_{AB} = R_{BA}$, $A = \{\mu\nu\}$ — бивекторный индекс, $A = 1 \dots 6$, минус тождество Риччи). Число компонент тензора Риччи в четырёхмерном пространстве равно 10. Таким образом, из 20 компонент тензора Римана половина может

быть выражена через компоненты тензора Риччи, а половина отлична от нуля и в случае, когда $R_{\mu\nu} = 0$. Как мы увидим ниже, последнее условие означает, что мы имеем *свободное* гравитационное поле.

Полезно также следующее представление тензора кривизны со всеми нижними индексами:

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} = g_{\mu[\tau,\lambda]\nu} + g_{\nu[\lambda,\tau]\mu} + 2g_{\rho\sigma}\Gamma_{\tau[\mu}^{\rho}\Gamma_{\nu]\lambda}^{\sigma}, \quad (10.55)$$

где оба индекса после запятой означают производные $g_{\mu\tau,\nu\lambda} \equiv \partial_{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\tau}$.

Более просто тензор кривизны выглядит на языке форм. Построим 1-формы связности

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}dx^{\lambda}, \quad (10.56)$$

тогда 2-форма кривизны есть

$$\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu} \equiv R^{\mu}{}_{\nu\lambda\tau}dx^{\lambda} \wedge dx^{\tau} = d\Gamma^{\mu}{}_{\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda} \wedge \Gamma^{\lambda}{}_{\nu}. \quad (10.57)$$

Это соотношение проясняет аналогию между тензором кривизны и тензором напряженности $\mathbb{F} = dA$ электромагнитного поля: роль A играет совокупность форм $\Gamma^{\mu}{}_{\nu}$, а появление внешнего произведения в (10.57) связано с неабелевым характером калибровочных преобразований (в данном случае зависящих от точки преобразований $SO(1,3)$).

10.3. Изометрии

Напомним определение *производной Ли*. Пусть задана конгруэнция кривых, определяемая векторным полем $K^{\mu}(x)$. Эта конгруэнция задает однопараметрическую группу диффеоморфизмов $x_0^{\mu} \rightarrow x_t^{\mu}$, так что

$$\frac{dx_t^{\mu}}{dt} = K^{\mu}. \quad (10.58)$$

Будем сравнивать значения тензорного поля $T^{\nu}{}_{\mu}(x)$ в точках x_0 и x_t , относя индексы к системе координат x_0^{μ} . Значение тензора в точке x_t в координатах системы x_0^{μ} равно

$$T^{\nu}{}_{\mu}(x_t) = T^{\beta}{}_{\alpha}(x_t) \frac{\partial x_0^{\nu}}{\partial x_t^{\beta}} \frac{\partial x_t^{\alpha}}{\partial x_0^{\mu}}. \quad (10.59)$$

Производная Ли от $T^{\mu}{}_{\nu}$ вдоль K^{μ} определяется так:

$$\mathcal{L}_K T^{\nu}{}_{\mu} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{T^{\nu}{}_{\mu}(x_t) - T^{\nu}{}_{\mu}(x_0)}{t} \right). \quad (10.60)$$

Учитывая, что при $t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial x_t^{\alpha}}{\partial x_0^{\mu}} \simeq \delta_{\mu}^{\alpha} + tK^{\alpha}{}_{,\mu}, \quad \frac{\partial x_0^{\nu}}{\partial x_t^{\beta}} \simeq \delta_{\beta}^{\nu} - tK^{\nu}{}_{,\beta}, \quad (10.61)$$

получаем

$$\mathcal{L}_K T^{\nu}{}_{\mu} = K^{\lambda}T^{\nu}{}_{\mu,\lambda} - K^{\nu}{}_{,\lambda}T^{\lambda}{}_{\mu} + K^{\lambda}{}_{,\mu}T^{\nu}{}_{\lambda} \quad (10.62)$$

(при большем числе индексов члены, пропорциональные производным от K^{μ} , обслуживают все индексы по аналогичному правилу).

Если производная Ли от метрического тензора $g_{\mu\nu}$ вдоль векторного поля K^{μ} равна нулю,

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0 = g_{\mu\nu,\lambda}K^{\lambda} + K^{\alpha}{}_{,\mu}g_{\alpha\nu} + K^{\beta}{}_{,\nu}g_{\mu\beta}, \quad (10.63)$$

то K^{μ} порождает преобразование *изометрии*. Нетрудно показать, что (10.63) эквивалентно уравнениям Киллинга

$$K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0. \quad (10.64)$$

В случае пространства Минковского СТО, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, существует 10 векторов Киллинга, порождающих группу $ISO(1,3)$. В искривлённом пространстве-времени ОТО возможны иные группы изометрий, при этом максимальное число линейно независимых векторов Киллинга равно 10 (максимально симметричное пространство). В последнем случае тензор кривизны выражается через метрику следующим образом:

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} = k(g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\tau}), \quad (10.65)$$

где k — некоторая постоянная (скалярная кривизна $R = 12k$). При $k \geq 0$ имеем пространство де Ситтера (анти де Ситтера), при $k = 0$ — пространство Минковского.

Статическое гравитационное поле сферически симметричного распределения метрики имеет четырёхпараметрическую группу изометрий $T \times \text{SO}(3)$, где T — сдвиги по времени, порождаемые полем Киллинга $K_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Интервал пространства-времени тогда можно выбрать в виде

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega; \quad d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (10.66)$$

где ν и λ — функции радиальной координаты r .

Пространственно однородное и изотропное гравитационное поле, порождаемое усреднённым распределением материи во Вселенной, имеет 6-параметрическую группу изометрий. Таких групп, порождающих односвязные пространства, имеется всего три: $\text{SO}(4)$ (соответствующее трёхмерное пространство — сфера S^3), $\text{ISO}(3)$ (евклидова трёхмерная группа) и $\text{SO}(1, 3)$ (трёхмерное пространство Лобачевского $\text{SO}(1, 3)/\text{SO}(3)$). Четырёхмерные метрики пространства событий для этих трёх случаев соответственно можно параметризовать так:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(dr^2 + \begin{bmatrix} \sin^2 r \\ r^2 \\ \text{sh}^2 r \end{bmatrix} d\Omega \right). \quad (10.67)$$

10.4. Гравитация или инерция

Если задана метрика $g_{\mu\nu}(x)$, отличная от метрики Минковского, то это ещё не означает, что имеется физическое гравитационное поле; возможно, мы имеем дело лишь с «неудачным» выбором координат в плоском пространстве событий. Попытаемся найти преобразование координат $x^\mu \rightarrow \xi^\mu(x)$, которое привело бы метрику к виду $\eta_{\mu\nu}$. В качестве первого шага приведем метрику к виду $\eta_{\mu\nu}$ в заданной точке x_0^μ . Для этого достаточно произвести диагонализацию с помощью некоторой матрицы $e_\mu^\alpha(x_0)$, такой что

$$\eta^{\alpha\beta} = e_\mu^{(\alpha)}(x_0) e_\nu^{(\beta)}(x_0) g^{\mu\nu}(x_0). \quad (10.68)$$

Будем теперь переносить четверку ковекторных полей $e_\mu^{(\alpha)}(x)$ параллельно из точки x_0^μ в произвольную точку x^μ ,

$$\nabla_\nu e_\mu^{(\alpha)}(x) = 0, \quad (10.69)$$

при этом скалярные произведения

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = e_\mu^{(\alpha)}(x) e_\nu^{(\beta)}(x) g^{\mu\nu}(x) \quad (10.70)$$

будут постоянными. Действительно, поскольку $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — скалярная матрица, имеем

$$\partial_\lambda \varepsilon^{\alpha\beta} = \nabla_\lambda \varepsilon^{\alpha\beta} = 0 \quad (10.71)$$

в силу (10.69) и ковариантного постоянства метрики $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$. Следовательно, $\varepsilon^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$. Перепишем (10.69) в виде

$$\partial_\nu e_\mu^{(\alpha)} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^{(\alpha)}, \quad (10.72)$$

это означает, что левая часть симметрична по индексам μ, ν , и, следовательно, существует четверка скаляров $\xi^{(\alpha)}$, таких что

$$\partial_\nu e_\mu^{(\alpha)} = \partial_\nu \partial_\mu \xi^{(\alpha)}, \quad (10.73)$$

или, иначе,

$$e_\mu^{(\alpha)} = \partial_\mu \xi^{(\alpha)}, \quad (10.74)$$

так что

$$d\xi^{(\alpha)} = e_\mu^{(\alpha)} dx^\mu. \quad (10.75)$$

Если метрика $g_{\mu\nu}$ невырождена, т. е. $\det g_{\mu\nu} \neq 0$ (что предполагается), то существует обратная матрица $e_{(\alpha)}^\mu$, удовлетворяющая соотношению

$$e_{(\alpha)}^\mu e_\mu^{(\beta)} = \delta_\alpha^\beta, \quad (10.76)$$

и мы получаем из (10.70) и равенства $\varepsilon^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$

$$g_{\mu\nu}(x) e_{(\alpha)}^\mu(x) e_{(\beta)}^\nu(x) = \eta_{\alpha\beta}. \quad (10.77)$$

Это в свою очередь означает, что в координатах $\xi^{(\alpha)}$

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^{(\alpha)} d\xi^{(\beta)} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (10.78)$$

Тем самым, метрика приводится к виду Минковского. Однако в этом рассуждении есть одно существенное ограничение: результат параллельного переноса (10.69) не будет зависеть от формы кривой, соединяющей x_0^μ с x^μ в том и только том случае, когда тензор кривизны $R^\mu{}_{\nu\lambda\tau} = 0$. Итак, мы приходим к следующему утверждению: необходимым и достаточным условием существования системы координат, в которой метрика совпадает с метрикой Минковского глобально, является равенство нулю тензора кривизны пространства событий. Физически это означает, что критерием, позволяющим отличить гравитационное поле от поля сил инерции, является отличие от нуля тензора кривизны. Истинное гравитационное поле имеет отличный от нуля тензор кривизны хотя бы в некоторой области пространства-времени. Если же $R_{\mu\nu\lambda\tau} = 0$ всюду, то мы имеем дело лишь с силами инерции. Как мы увидим далее, присутствие любой материи делает выполнение этого условия невозможным, поэтому ИСО могут существовать лишь локально.

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что метрику $g_{\mu\nu}$ можно привести к виду $\eta_{\alpha\beta}$ в окрестности любой выбранной точки x_0 с точностью до членов, пропорциональных квадратам отклонений $x^\mu - x_0^\mu$. Точнее, существуют так называемые *нормальные римановы координаты*, такие что

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta}(x_0)(x^\alpha - x_0^\alpha)(x^\beta - x_0^\beta) + \dots, \quad (10.79)$$

в которых отклонение метрики от метрики Минковского непосредственно определяется кривизной. Такая система отсчёта является локально-инерциальной, в ней символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке x_0^μ .

Глава 11.

Частицы и поля в искривлённом пространстве-времени

Принцип эквивалентности позволяет получить уравнения движения частиц и уравнения электромагнитного поля в заданном гравитационном поле путём обобщения соответствующих уравнений СТО на неинерциальные системы отсчёта. Такое обобщение достигается заменой частных производных на ковариантные, или, как часто говорят, заменой «запятой» на «точку с запятой». Однако заранее неясно, не содержат ли «правильные» уравнения движения добавочных членов, зависящих от тензора кривизны. Такие члены в ряде случаев не запрещены из общих принципов, и необходимы дополнительные соображения (теоретического либо экспериментального характера), чтобы их отвергнуть. Взаимодействие с гравитационным полем, описываемое на основании правила $\partial \rightarrow \nabla$ называется *минимальным*; классическая электродинамика относится к теориям, для которых принимается принцип минимальности. Следует иметь в виду, что гравитационное взаимодействие в электродинамических системах крайне мало, поэтому непосредственная экспериментальная проверка этой гипотезы затруднительна.

11.1. Движение частиц

Из сказанного следует, что действие для (нейтральной) точечной частицы в искривлённом пространстве-времени, независимо от наличия или отсутствия истинного гравитационного поля, описывается тем же выражением, что и в СТО, с заменой метрики $\eta_{\mu\nu}$ на $g_{\mu\nu}$:

$$S_m = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu}[x(s)]} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds. \quad (11.1)$$

Существенное отличие, однако, состоит в том, что теперь при варьировании по x^μ следует учитывать зависимость метрики от координат. Последовательное проведение варьирования действия в форме (11.1) нарушает общую ковариантность теории, поскольку из четырёх координат $x^\mu(s)$ независимыми являются лишь три, в СТО мы выбирали в качестве независимых переменных пространственные координаты. Если считать все четыре координаты независимыми, то действие оказывается вырожденным в силу равенства $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$, где $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$. Действительно, если написать

$$S_m = \int L(s) ds, \quad L(s) = mc \sqrt{g_{\mu\nu}(x(s)) u^\mu u^\nu}, \quad (11.2)$$

то гессиан обращается в нуль:

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} = mc \det(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu) = 0, \quad (11.3)$$

где $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$ и учтено, что $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$. Это последнее условие является условием связи, которое вытекает из уравнения движения. Более глубокая причина возникновения связи заключается в дополнительной симметрии действия (11.1) помимо инвариантности относительно диффеоморфизмов или *общекоординатных преобразований* $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x)$. Кроме того, имеет место *репараметризационная инвариантность*: при замене параметра s (интервала) на кривой $x^\mu(s)$ другим параметром $s = s(\lambda)$ действие остается форм-инвариантным. В более последовательной теории уравнения связей следует получать, вводя лагранжевы множители. Другой недостаток действия (11.1) заключается в невозможности его использования для безмассовых частиц, например, фотонов. Можно предложить альтернативное действие, которое является функционалом *четырёх* переменных $x^\mu(s)$ и *лагранжева множителя* h .

$$S_m[x(\lambda), h] = -\frac{1}{2} \int \left[h^{-1} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + h(mc)^2 \right] d\lambda. \quad (11.4)$$

Варьирование по h приводит к уравнению связи

$$(hmc)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (11.5)$$

из которого можно выразить лагранжев множитель h через динамические переменные. Подставив найденное значение в (11.4), мы возвращаемся к действию в первоначальной форме (11.1). Преимуществом формы (11.4) является её применимость и при $m = 0$; в этом случае условие связи сводится к изотропности вектора $dx^\mu/d\lambda$. Очевидно, при $m = 0$ интервал не годится на роль параметра, поскольку вдоль изотропной кривой $ds = 0$; в качестве параметра можно тогда выбрать временную координату x^0 .

Варьирование действия (11.4) по x^μ приводит к уравнениям движения

$$\frac{d}{d\lambda} \left(h^{-1} \frac{dx^\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu}(x) \right) = \frac{1}{2} h^{-1} g_{\alpha\beta,\nu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}. \quad (11.6)$$

Для частицы ненулевой массы можно выбрать $\lambda = s$, тогда из (11.5) следует $h^{-1} = mc^2$ и эта величина выпадает из уравнения (11.6), которое можно переписать в более простом виде

$$\frac{du_\mu}{ds} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta, \quad (11.7)$$

где $u_\mu = u^\nu g_{\mu\nu}$. В уравнении (11.7) нетрудно узнать уравнение геодезической линии в псевдоримановом пространстве, записанное для ковариантной компоненты 4-скорости. Поднятие индекса приводит к более привычному уравнению

$$\frac{Du^\mu}{ds} \equiv \frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0, \quad (11.8)$$

выражающему условие параллельности переноса касательного вектора u^μ вдоль кривой. Заметим, что варьированию подвергалась *длина* кривой, поэтому геодезическая является также кривой экстремальной длины. Хотя масса m не входит в (11.8), что является следствием ПЭ, это уравнение непосредственно неприменимо к случаю $m = 0$, при этом следует изменить параметризацию кривой.

Можно показать, что при наличии вектора Киллинга K^μ свёртка $u^\mu K_\mu$ является интегралом движения. Действительно,

$$\frac{D}{ds}(u^\mu K_\mu) = K_\mu \frac{Du^\mu}{ds} + u^\mu K_{\mu;\nu} u^\nu = 0, \quad (11.9)$$

поскольку первое слагаемое равно нулю в силу (11.8), а второе — в силу антисимметрии тензора $K_{\mu;\nu}$, вытекающей из уравнения Киллинга (10.63). В (11.9) было учтено, что ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница почленного дифференцирования произведения. Таким образом, каждое преобразование изометрии пространства-времени порождает интеграл движения, в такой форме выступает в ОТО теорема Нётер. В частности, если метрика не зависит явно от временной координаты $x^0 = ct$, т. е. $\partial/\partial t$ является вектором Киллинга, то сохраняется *ковариантная* компонента u_0 4-скорости, с этой величиной связана *полная энергия* в гравитационном поле

$$\mathcal{E} = mc^2 u_0 = mc^2 g_{0\nu} u^\nu. \quad (11.10)$$

В ньютоновском пределе $g_{ij} = -\delta_{ij}$, $g_{0i} = 0$, $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$, $\varphi \ll c^2$, поэтому условие связи даёт

$$\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (u^0)^{-2} \simeq 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2\varphi}{c^2}, \quad (11.11)$$

откуда $u^0 \simeq 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\varphi}{c^2}$. Подставляя в (11.10), находим

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi, \quad (11.12)$$

что представляет собой ньютоновское выражение с точностью до постоянной mc^2 .

Обсудим четырёхмерную гамильтонову форму уравнений, соответствующую действию в форме (11.4). Заранее оговоримся, что эта форма отличается от трехмерной, развитой в главе 7. Определяя обобщённые импульсы как

$$P_\mu = -\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = h^{-1} g_{\mu\nu} u^\nu, \quad (11.13)$$

построим гамильтониан

$$\mathcal{H} = -P_\mu u^\mu - L = \frac{h}{2} (m^2 c^4 - g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu). \quad (11.14)$$

Знак минус в первом члене соответствует выбору знака в (11.13). Нетрудно проверить, что в силу условия связи (11.5) гамильтониан $\mathcal{H} = 0$. Можно показать что обращение в нуль гамильтониана является следствием репараметризационной инвариантности действия (11.4), это общее свойство репараметризационно-инвариантных теорий. Обращение гамильтониана в нуль на поверхности связей не препятствует возможности написания уравнений Гамильтона, поскольку производные от \mathcal{H} по x^μ и P_ν отличны от нуля:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\mu}, \quad \frac{dP_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}. \quad (11.15)$$

Вместо уравнения геодезических более удобно рассматривать уравнение Гамильтона-Якоби, при этом отпадает необходимость вычисления символов Кристоффеля. Уравнение Гамильтона-Якоби получается заменой в уравнении $\mathcal{H} = 0$ обобщённого импульса на $-\partial S/\partial x^\nu$. В калибровке (11.8) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}(x) = m^2 c^2. \quad (11.16)$$

Это уравнение справедливо и при $m = 0$. Интегралами движения являются производные от S по циклическим координатам, от которых метрика не зависит. Заметим, что в уравнение Гамильтона-Якоби входит дважды контравариантный тензор $g^{\mu\nu}$, обратный к метрике $g_{\mu\nu}$.

Уравнения движения точечной частицы эквивалентны условию консервативности $\nabla_n u T_\mu{}^\nu = 0$ тензора энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = mc^2 \int u^\mu u^\nu \frac{\delta^4(x - x(s))}{\sqrt{-g}} ds, \quad (11.17)$$

которое отличается от (8.33) лишь множителем $\sqrt{-g}$, появившимся в результате замены 4-объёма на инвариантный: $d^4x \rightarrow \sqrt{-g} d^4x$.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле A_μ в искривлённом пространстве-времени можно получить, добавив к действию в форме (11.1) либо (11.4) вклад, описывающий взаимодействие. Этот вклад сохраняет вид (7.39), поскольку интеграл от 1-формы вдоль мировой линии не зависит от метрики. Варьирование в калибровке (11.8) приводит к уравнению

$$mc \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu, \quad (11.18)$$

отличающемся от (7.21) заменой простой производной на ковариантную. При наличии изометрии K^μ и при соответствующем условии симметрии 1-формы потенциала A_μ ,

$$\mathcal{L}_K A_\mu = 0, \quad (11.19)$$

аналогично предыдущему можно вывести закон сохранения проекции обобщённого импульса на вектор Киллинга

$$\frac{D}{ds}(K^\mu P_\mu) = 0, \quad (11.20)$$

где обобщенный 4-импульс в калибровке (11.8) равен

$$P_\mu = -\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = mc^2 \left(u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right). \quad (11.21)$$

Наконец, заменяя $P_\mu = -\partial S/\partial x^\mu$ в условии связи, получим уравнение Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \frac{e}{c} A_\nu \right) g^{\mu\nu} = m^2 c^2. \quad (11.22)$$

11.2. Скалярное поле

Прежде чем переходить к описанию Максвелловского поля в ОТО, рассмотрим случай безмассового скалярного поля; подобные поля необходимы в теориях сильных и слабых взаимодействий, а также в теории суперструн. На этом примере удобно проследить возникновение тензора энергии-импульса при варьировании действия по метрике, а также обсудить вопрос о минимальности взаимодействия с гравитационным полем.

Рассмотрим вещественное скалярное поле $\phi(x)$. Действие, инвариантное относительно диффеоморфизмов $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ и приводящее к уравнениям поля без высших производных, можно записать в виде

$$S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{d\phi}{dx^\nu} g^{\mu\nu} - V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x \equiv \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x, \quad (11.23)$$

где V — некоторая вещественная функция, по аналогии с механикой называемая потенциалом. Варьирование по ϕ приводит к уравнениям поля

$$(\square - V)\phi = 0, \quad (11.24)$$

где

$$\square = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu) = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu \quad (11.25)$$

— оператор Даламбера, ∇_μ — ковариантная производная.

Канонический тензор энергии-импульса имеет вид

$$\overset{\circ}{T}_\mu{}^\nu = \phi_{,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}} - \delta_\mu^\nu\mathcal{L} = \phi_{,\mu}\phi^{,\nu} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu(\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - V). \quad (11.26)$$

В отличие от максвелловского этот тензор симметричен: $\overset{\circ}{T}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{T}_{\nu\mu}$, что связано с равенством нулю *спина* скалярного поля. В силу уравнений поля (11.24) имеет место *условие консервативности* ТЭИ

$$\nabla_\nu T_\mu{}^\nu = \partial_\nu T_\mu{}^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu T_\mu{}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda T_\lambda{}^\nu = 0. \quad (11.27)$$

Как видно, в искривлённом пространстве-времени условие консервативности не имеет смысла уравнения непрерывности, а потому не позволяет формулировать закон сохранения 4-импульса. Однако мы и не вправе ожидать сохранения каких бы то ни было величин в случае произвольной метрики $g_{\mu\nu}$, вообще говоря, не обладающей симметрией. Если же метрика допускает существование векторного поля Киллинга, то закон сохранения соответствующей величины действительно имеет место. Учитывая (10.64) и (11.27), находим

$$\nabla_\nu(T_\mu{}^\nu K^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}T_\mu{}^\nu K^\mu) = 0. \quad (11.28)$$

Отсюда при обычных предположениях об убывании поля на бесконечности (см. гл. 8) следует независимость интеграла

$$\mathcal{P}_K = \int_\Sigma \overset{\circ}{T}_\mu{}^\nu K^\mu dS_\nu, \quad (11.29)$$

от выбора пространственноподобной гиперповерхности Σ .

Рассмотрим теперь вариацию действия (11.23) по метрике пространства-времени. Мы обнаружим, что варьирование по ковариантному тензору $g^{\mu\nu}$ даёт в точности тензор (11.26) с опущенным индексом ν :

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda} - V) \quad (11.30)$$

т.е. $T_{\mu\nu} = \overset{\circ}{T}_{\mu\nu}$. В общем случае, варьирование действия материальной системы по метрике по определению даёт *метрический* тензор энергии-импульса. Этот тензор всегда симметричен.

Обсудим теперь выбор действия (11.23) с более общих позиций. Такой выбор соответствует *минимальному* взаимодействию с гравитационным полем. В принципе можно допустить существование членов, явно зависящих от кривизны, например $R^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$ или $R\phi^2$ (где $R^{\mu\nu}$ — тензор Риччи, R — скалярная кривизна). Добавление подобных членов может обеспечить дополнительную симметрию действия, что представляет интерес в конкретных физических теориях. Так, есть основания полагать, что уравнения *безмассовых* полей должны быть инвариантны относительно конформного растяжения метрики

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}. \quad (11.31)$$

Если одновременно подвергнуть преобразованию скалярное поле

$$\phi \rightarrow \Omega^{-1}\phi, \quad (11.32)$$

то при $\Omega = const$ можно избавиться от Ω в первом слагаемом в (11.23), поскольку $g^{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-2}g^{\mu\nu}$, $\sqrt{-g} \rightarrow \Omega^4\sqrt{-g}$. Чтобы второе слагаемое оставалось инвариантным, потенциал должен иметь вид $V \sim \phi^4$. Однако всё же инвариантность действия нарушается, если конформное преобразование *локально*, т.е. если Ω зависит от x (из-за дополнительных членов, возникающих при дифференцировании Ω). Результат действия на ψ оператора Даламбера преобразуется следующим образом:

$$\square\psi \rightarrow \Omega^{-3}\square\psi - \psi\Omega^{-4}\square\Omega. \quad (11.33)$$

Можно показать, что аналогичный закон преобразования при конформном растяжении (11.31) имеет скалярная кривизна :

$$R \rightarrow \Omega^{-2} R + 6\Omega^{-3} \square \Omega. \quad (11.34)$$

Это позволяет построить действие инвариантное относительно локальных конформных растяжений метрики вводя неминимальное взаимодействие через скаляр кривизны. Нетрудно проверить, что действие с конформной связью

$$S = \frac{1}{2c} \int \left((\nabla \phi)^2 + \frac{1}{6} R \phi^2 - \frac{\lambda}{2} \phi^4 \right) \sqrt{-g} d^4 x \quad (11.35)$$

действительно обладает указанной симметрией. Соответствующее уравнение поля

$$\square \phi + \frac{1}{6} R \phi - \lambda \phi^3 = 0 \quad (11.36)$$

содержит скалярную кривизну явно и, таким образом, нарушает ПЭ в его сильной форме. Если $R = 0$, действие (11.35) переходит в действие (11.23) при $V = \lambda \phi^4/4$. Однако метрический тензор энергии-импульса, отвечающий действию (11.35),

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} - \frac{1}{6} \nabla_\mu \nabla_{\nu\alpha} \phi^2 + \frac{1}{6} g_{\mu\nu} \square \phi^2 - \frac{\phi^2}{6} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) + \frac{\lambda}{2} \phi^4 \quad (11.37)$$

сохраняет память о конформной связи и при $R_{\mu\nu} = R = 0$. Это ещё одно проявление неоднозначности в выборе ТЭИ.

Инвариантность относительно конформных преобразований, как видно из вариационного определения (11.30), должна приводить к равенству нулю следа метрического ТЭИ: $T^\mu_\mu = 0$; это действительно имеет место для выражения (11.37).

11.3. Электродинамика в общековариантной форме

Источником электромагнитного поля является сохраняющийся ток $j^\mu(x)$. Закон сохранения в общековариантной форме имеет вид

$$\nabla_\mu j^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (j^\mu \sqrt{-g}) = 0, \quad (11.38)$$

где учтено соотношение (10.43). Для точечного заряда, движущегося вдоль мировой линии $x_0^\mu(s)$, плотность тока равна

$$j^\mu = e c \int u^\mu \frac{\delta^4(x - x_0(s))}{\sqrt{-g}} ds, \quad (11.39)$$

где дельта-функция определена как обычно, $\int \delta^4(x) d^4 x = 1$, т. е. не является инвариантной относительно общекоординатных преобразований.

Заметим, что уравнение (11.38), в отличие от условия консервативности тензора энергии-импульса (11.27), по-прежнему выражает закон сохранения электрического заряда

$$Q = \int_\Sigma j^\mu dS_\mu \quad (11.40)$$

в произвольном искривлённом пространстве-времени. Математическое отличие ковариантных дивергенций от вектора и тензора второго ранга состоит в том, что в первом случае ковариантная дивергенция сводится к простой дивергенции от того же вектора умноженного на $\sqrt{-g}$, а во втором нет. При наличии же вектора Киллинга, тензор энергии-импульса порождает 4-вектор $T_\mu{}^\nu K^\mu$, для которого условие консервативности аналогично (11.38) и действительно ведёт к закону сохранения (11.30).

Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ может быть выражен через 4-потенциал двояким образом:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (11.41)$$

ввиду сокращения символов Кристоффеля, иначе говоря, соотношение $\mathbb{F} = dA$ не зависит от метрики. При поднятии индексов мы получаем контравариантный тензор поля, который существенно зависит от метрики. Поэтому трёхмерные векторы электрического и магнитного полей нуждаются в доопределении. Уравнения Максвелла в трёхмерном виде можно записать аналогично уравнениям Максвелла в среде, свойства которой определяются метрикой пространства-времени. Мы не будем обсуждать здесь эти вопросы подробнее.

Действие для электромагнитного поля с источником в ОТО является прямым обобщением действия (8.13):

$$S = -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \right) \sqrt{-g} d^4 x. \quad (11.42)$$

Варьирование по потенциалу A_μ (с нижним индексом) приводит к уравнению Даламбера

$$\square A^\mu = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (11.43)$$

Заметим, что действие (11.42) (при $j^\mu = 0$) вырождено вследствие калибровочной инвариантности относительно преобразования $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} + d\psi$, поэтому более последовательным было бы введение в действие члена $(\partial_\mu A^\mu)^2$ с лагранжевым множителем, чтобы обеспечить выполнение условия $\partial_\mu A^\mu = 0$. Это условие является условием совместности уравнений (11.43) в присутствии сохраняющегося тока.

В терминах тензора поля имеем

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (11.44)$$

Тождество Бианки $dF = 0$ можно записать в различной форме:

$$F_{[\mu\nu;\lambda]} = F_{[\mu\nu;\lambda]} = 0, \quad \nabla_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (11.45)$$

где дуальный тензор поля равен

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} F_{\lambda\tau}, \quad (11.46)$$

(здесь $\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} = \pm 1$ — тензорная плотность). Все эти соотношения иллюстрируют правило $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ минимального общеквариантного обобщения СТО.

Построим метрический ТЭИ для свободного электромагнитного поля. Для удобства варьирования первого слагаемого в (11.42) предварительно его следует представить в виде $F_{\mu\nu} F_{\lambda\tau} g^{\mu\lambda} g^{\nu\tau} \sqrt{-g}$, поскольку роль обобщённых координат максвелловского поля в ОТО играют *ковариантные* компоненты A_μ , и, следовательно, не зависящими от метрики являются величины $F_{\mu\nu}$, но не $F^{\mu\nu}$. В результате с помощью формулы (11.30) находим

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (11.47)$$

Метрический ТЭИ совпадает с *симметричным* максвелловским ТЭИ специальной теории относительности (8.29) (с точностью до замены $\eta_{\mu\nu}$ на $g_{\mu\nu}$). Что же касается законов сохранения, вытекающих из условия консервативности $\nabla_\nu T^{\mu\nu}$, то они, как и выше, возникают только при наличии векторов Киллинга. Заметим, что все законы сохранения в ОТО означают сохранение величин, включающих вклад самого гравитационного поля. Примером может служить сохранение энергии точечной частицы в постоянном гравитационном поле (11.10)–(11.12), здесь речь идет о полной энергии включая потенциальную энергию в гравитационном поле.

Действие для электромагнитного поля также обладает конформной симметрией, причем при преобразованиях (11.31) потенциал A_μ следует оставить неизменным. Поэтому след метрического ТЭИ (11.47) обращается в нуль: $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$.

11.4. Струны и мембраны

До сих пор нам встречались объекты двойкой природы: точечные *частицы* и непрерывно распределённые в пространстве *поля*. В квантовой теории поля различие между частицами и полями в значительной степени стирается, и скорее является следствием различного поведения полей целого и полуцелого спина. Между тем, в квантовой теории фундаментальных взаимодействий, которая пока не существует в окончательном виде, но многие стороны которой ясны уже сейчас (эта теория должна включать и квантовую теорию гравитации), оказывается необходимым рассматривать протяжённые объекты различной размерности. Первой в иерархии таких объектов является *релятивистская струна*. Струна локализована на некоторой кривой, которая может быть замкнутой, либо конечным отрезком. В пространстве событий струна замечает двумерную поверхность — *мировой лист*

$$x^\mu = x^\mu(\sigma, \tau), \quad (11.48)$$

где σ — пространственноподобный, а τ — времениподобный параметр (пишем также $\sigma_a = (\tau, \sigma)$, $a = 0, 1$). Действие струны выбирается в виде

$$S = T \int d^2 s, \quad (11.49)$$

где T — натяжение струны, (в этом разделе полагаем $c = 1$), а интеграл представляет собой площадь поверхности мирового листа между моментами времени τ_0 и τ_f . Инвариантное выражение для элемента поверхности

$$d^2s = \sqrt{-h} d\sigma d\tau, \quad h = \det h_{\alpha\beta}, \quad (11.50)$$

где $h_{\alpha\beta}$ — метрика, индуцированная на мировом листе (11.48),

$$h_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \Big|_{x^\mu = x^\mu(\sigma, \tau)}, \quad \partial_\alpha = (\partial_\sigma, \partial_\tau). \quad (11.51)$$

Струна может быть *замкнутой*, тогда выбирают $\sigma \in [0, \pi]$, $x^\mu(\sigma + \pi) = x^\mu(\sigma)$, либо *открытой*: $\sigma \in [0, \pi]$ без условия периодичности.

Более удобно считать компоненты метрики на мировом листе $h_{\alpha\beta}$ независимыми переменными, переписав действие в виде

$$S = -\frac{T}{2} \int h^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu g_{\mu\nu} \sqrt{-h} d\sigma d\tau, \quad (11.52)$$

такой переход аналогичен переходу от (11.1) к (11.4) для точечной частицы. Варьирование (11.52) по h_{ab} даёт условия связи, поскольку величины h_{ab} , входящие в действие без производных, являются лагранжевыми множителями:

$$\tau_{ab} \equiv \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{ab}} = -T \left(\partial_a x^\mu \partial_b x^\nu - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \partial_c x^\mu \partial_d x^\nu \right) g_{\mu\nu} = 0. \quad (11.53)$$

Совокупность величин τ_{ab} можно понимать как тензор энергии-импульса эквивалентной двумерной теории поля — *нелинейной сигма-модели* — для которой $x^\mu(\sigma, \tau)$ являются полевыми переменными. Обращение в нуль (11.53) эквивалентно решению (11.51) для h_{ab} ; таким образом, подставляя индуцированную метрику в (11.52), мы возвращаемся к исходному действию в форме (11.49).

Действие (11.52) инвариантно относительно диффеоморфизмов пространства-времени, а также репараметризации мирового листа $\sigma^a \rightarrow \sigma^{a'}(\sigma^b)$. Наконец, дополнительная и очень важная симметрия действия — конформная инвариантность относительно локальных растяжений метрики h_{ab}

$$h_{ab} \rightarrow \Omega(\sigma, \tau) h_{ab}. \quad (11.54)$$

Действительно, при этом преобразовании $\sqrt{-h} \rightarrow \Omega \sqrt{-h}$, $h^{ab} \rightarrow \Omega^{-1} h^{ab}$ остальные величины не преобразуются. В результате действие струны оказывается инвариантным относительно бесконечномерной конформной группы в двумерном пространстве, совпадающем с группой конформных преобразований комплексной плоскости. Бесконечномерная симметрия классического действия обеспечивает возможность непротиворечивого квантования теории: в отличие от стандартной квантовой теории поля, в основе которой лежит квантование точечной частицы и которая страдает от расходимостей, квантовая теория струны при некоторых дополнительных условиях является конечной.

Варьирование действия (11.52) по x^μ приводит к уравнениям движения

$$\frac{1}{\sqrt{-h}} \partial_a (\sqrt{-h} h^{ab} \partial_b x^\mu) = 0, \quad (11.55)$$

которые эквивалентны двумерным инвариантным уравнениям Даламбера на мировом листе для набора скалярных полей $x^\mu(\sigma, \tau)$. Используя инвариантность относительно диффеоморфизмов и конформную инвариантность, можно выбрать на мировом листе двумерную метрику Минковского $h_{ab} = \text{diag}(1, -1)$. Тогда вместо (11.55) будем иметь

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2) x^\mu = 0, \quad (11.56)$$

откуда следует, что решение представимо в виде суперпозиции двух произвольных функций:

$$x^\mu = x_R^\mu(\sigma - \tau) + x_L^\mu(\sigma + \tau), \quad (11.57)$$

называемых *правыми* и *левыми модами*. Таким образом, струна, в отличие от точечной частицы, обладает внутренней динамикой. Физически это объясняется тем, что действие (11.49) описывает не совокупность свободных материальных точек, а объект, обладающий внутренним *натяжением*. Чтобы убедиться в этом, построим метрический тензор энергии-импульса струны, варьируя действие (11.52) по $g^{\mu\nu}$. Предположим, что струна вытянута вдоль оси z , $x^\mu = (\tau, 0, 0, \sigma)$, и является бесконечной. Тогда, умножая действие на единицу вида $1 = \int \delta^4(x - x(\sigma, \tau)) d^4x$, и производя варьирование, получим

$$T_0^0 = T_z^z = T \delta(x) \delta(y). \quad (11.58)$$

Формула (11.58) показывает, что струна *натянута* вдоль оси z , причём натяжение экстремально велико, так что скорость бегущих по струне волн совпадает со скоростью света $c = 1$.

В теории Максвелла взаимодействие точечного заряда с 4-векторным полем A^μ вводилось как интеграл от 1-формы A вдоль мировой линии. Аналогично можно ввести взаимодействие струны с полем 2-формы $B = B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$,

интегрируя по мировому листу струны. Поле $B_{\mu\nu}$ называется полем Калб-Рамона. Добавка к действию (11.52) будет иметь вид

$$S_{\text{int}} = - \int \mathbb{B} = - \int B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = - \int B_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \epsilon^{ab} d\sigma d\tau, \quad (11.59)$$

где $\epsilon^{\sigma\tau} = -\epsilon^{\tau\sigma} = 1$. Интеграл (11.59) не зависит от метрики $g_{\mu\nu}$ и сохраняет все симметрии действия (11.52), включая конформную.

В теории струн размерность пространства событий заранее не фиксируется, а подлежит определению из самой теории. Традиционная теория (супер)струн фиксирует размерность $D = 10$; в более общей теории, включающей, помимо струн, другие протяжённые объекты, D -размерность пространства-времени вероятно равна одиннадцати (М-теория). В D -мерном пространстве событий могут существовать протяжённые объекты (p -браны) размерности $0 \leq p \leq D - 2$: $p = 0$ отвечает точечной частице, $p = 1$ — струне, $p = 2$ — мембране и т. д. Действие свободной p -браны является непосредственным обобщением (11.52):

$$S = -T_p \int d^{p+1}s, \quad (11.60)$$

или, в развёрнутой форме,

$$S = -\frac{T_p}{2} \int h^{ab} \sqrt{-h} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu g_{\mu\nu} d^{p+1}\sigma, \quad (11.61)$$

где *мировой объём*, заматаемый p -браной, определяются уравнениями

$$x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma^1, \dots, \sigma^p). \quad (11.62)$$

Он параметризован $p + 1$ вещественными координатами σ^a , $a = 0, \dots, p$, причем $\sigma^0 = \tau$. Действие (11.61) уже не обладает конформной симметрией относительно локальных растяжений метрики (11.54), поскольку теперь $\sqrt{-h} \rightarrow \Omega^{(p+1)/2} \sqrt{-h}$, в то время как для контравариантных компонент метрики по-прежнему $h^{ab} \rightarrow \Omega^{-1} h^{ab}$. В этом отношении случай струны $p = 1$ является исключительным.

Можно ввести взаимодействие p -браны с полем $(p+1)$ -формы $\mathbb{A}_{(p+1)} = A_{\mu_0, \dots, \mu_p} dx^{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$, интегрируя форму по мировому объёму (11.62):

$$S_{\text{int}} = - \int \mathbb{A}_{p+1}. \quad (11.63)$$

В случае $p = D - 1$ мировой объём p -браны заполняет всё пространство событий, т. е. мы имеем ситуацию *теории поля*. Однако действие типа (11.61) при этом теряет смысл, чтобы получить содержательную теорию поля необходимо выбрать некоторый *негеометрический* лагранжиан. Примерами таких лагранжианов являются рассмотренные выше лагранжианы скалярного и максвелловского полей.

Глава 12.

Динамика гравитационного поля

До сих пор метрика пространства событий считалась заданной. Теперь обратимся к выводу динамических уравнений для гравитационного поля. Прежде всего нужно уточнить, какие величины описывают гравитационное поле как таковое. Мы уже знаем, что метрический тензор пространства событий определен неоднозначно в связи с произволом в выборе координат. Более того, символы Кристоффеля, играющие роль «гравитационной силы», также не определяются однозначно, будучи нетензорными величинами. Если проводить аналогию с электромагнитным полем, то в теории Максвелла вообще отсутствует объект типа метрики, а 4-потенциал A^μ играет роль, аналогичную роли символов Кристоффеля в ОТО, при этом выбор координат соответствует выбору калибровки 4-потенциала A^μ . Тензор поля $F_{\mu\nu}$ аналогичен тензору кривизны в ОТО. Тензор кривизны как инвариантный оператор от выбора координат не зависит (разумеется, его компоненты при этом преобразуются по правилам, обсуждавшимся в разделе 10.2). Поэтому уравнения гравитационного поля вместе с физическими условиями на решения должны однозначно определять тензор кривизны; что же касается метрики, то одно и то же гравитационное поле можно описывать бесконечным числом способов, что часто приводит к непростой задаче идентификации различных метрик, описывающих одну и ту же физическую ситуацию. Однако решение конкретных задач, как правило, начинается именно с параметризации метрики, при этом свобода в выборе координат в пространстве событий используется для максимального упрощения уравнений. Определяющую роль играет предполагаемая симметрия решения, выводимая из физических условий задачи. Решение состоит в явном определении всех функций, параметризующих метрический тензор, тем самым определяется гравитационное поле в фиксированной системе координат.

12.1. Уравнения Эйнштейна

Дадим сначала эвристический вывод уравнений Эйнштейна из уравнения ньютоновской гравитации

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho, \quad (12.1)$$

где φ — гравитационный потенциал, ρ — плотность массы, G — ньютоновская постоянная. В теории Максвелла «релятивизация» аналогичного уравнения для электростатического потенциала (с другим знаком в правой части, поскольку одноимённые заряды отталкиваются) приводила к уравнениям Даламбера для потенциала A^μ в пространстве Минковского. Поэтому прежде всего возникает вопрос, нельзя ли получить релятивистское уравнение (в смысле СТО) и для гравитационного потенциала. Из общих соображений следует, что на роль переносчика гравитационного взаимодействия в СТО могли бы претендовать скалярное поле, либо поле симметричного тензора второго ранга. Векторное поле не годится, поскольку приводит к отталкиванию одноимённых зарядов (масс). Антисимметричный тензор второго ранга имеет в качестве напряжённости 3-форму, уравнения для которой в 4-мерном пространстве событий сводятся к уравнению для скаляра. Симметричные тензоры ранга выше второго вообще не имеют нетривиальных взаимодействий в классическом пределе (результат квантовой теории). Таким образом, нужно исследовать скалярное поле, поле симметричного тензора второго ранга, либо смесь обоих полей. Скалярное поле в чистом виде не годится по следующей причине. Закон Ньютона для нерелятивистских масс

$$F = \frac{GM_1M_2}{r^2} \quad (12.2)$$

действительно можно получить из уравнения Даламбера для скалярного потенциала. Однако, из гравитационных экспериментов следует, что такой же закон, причём с эффективной постоянной ровно в 2 раза большей, имеет место для взаимодействия фотона с энергией $\hbar\omega$ (луча света) с массивным телом M (отклонение луча в поле Солнца)

$$F = \frac{GM2\hbar\omega/c^2}{r^2}, \quad (12.3)$$

роль массы здесь выполняет величина $2\hbar\omega/c^2$. Помимо неожиданного коэффициента 2, взаимодействие (12.3) имеет еще одну особенность: оно не зависит от поляризации фотона, т.е. направления электрического вектора электромагнитной волны. Эти закономерности невозможно увязать с представлением о скалярном переносчике гравитационного взаимодействия: в этом случае отклонение луча в поле Солнца существенно бы зависело от поляризации.

Симметричный тензор второго ранга $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ оказывается, напротив, вполне подходящим. Если выбрать лагранжиан взаимодействия в виде $\mathcal{L}_{\text{int}} \sim -h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи, то будем иметь согласующиеся с экспериментальными данными уравнения движения для массивных частиц и фотонов, причем коэффициент 2 в (12.3) получает естественное истолкование как следствие *конформной симметрии* электромагнитного поля (равенства нулю следа T_{μ}^{μ}). Однако если пытаться построить теорию в плоском пространстве-времени, то такая теория будет непоследовательной. В отличие от максвелловской электродинамики, в которой электромагнитные поля *не взаимодействуют* между собой, гравитационное поле с необходимостью оказывается *самодействующим*, причём с той же константой связи G (этот результат можно получить в квантовой теории, рассматривая испускание гравитонов в классическом пределе). Это означает, что уравнения гравитационного поля *нелинейны*. Выход из этой ситуации заключается в том, что нужно рассмотреть *искривлённое пространство-время* с метрикой

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (12.4)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского, которая становится фиктивной: расстояния и промежутки времени будут определяться метрикой $g_{\mu\nu}$ по правилам, обсуждавшимся в главе 10.

После этих предварительных замечаний интерпретация ньютоновского уравнения (12.1) в виде

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (12.5)$$

представляется вполне естественной. Действительно, для покоящейся материи $T_{00} = \rho c^2$, при этом в ньютоновском пределе $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$.

Теперь это уравнение следует обобщить так, чтобы правая и левая части стали общековариантными тензорами. В правой части очевидно можно взять ТЭИ $T_{\mu\nu}$ для всех значений индексов μ, ν . В левой части пока имеем существенно нековариантное выражение. Однако можно заметить, что вторые производные от метрики входят в тензор кривизны, поэтому можно попытаться построить нужную комбинацию из его компонент. Поскольку правая часть (12.5) — симметричный тензор, то годятся комбинации тензора Риччи $R_{\mu\nu}$ и скалярной кривизны, умноженной на метрику $Rg_{\mu\nu}$. Кроме того, правая часть удовлетворяет ковариантному условию консервативности $\nabla_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = 0$. Единственной комбинацией $R_{\mu\nu}$ и $Rg_{\mu\nu}$, удовлетворяющей такому же условию является *тензор Эйнштейна*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (12.6)$$

Действительно, в силу тождеств Бианки для тензора Риччи (10.54) имеем

$$\nabla_{\nu}G_{\mu}^{\nu} = 0. \quad (12.7)$$

Далее, в приближении $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ с помощью (10.55) находим $G_{00} \approx \Delta g_{00}$. Таким образом, левую часть (12.5) можно понимать как компоненту тензора Эйнштейна, отсюда очевидно, что искомое общековариантное обобщение (12.5) есть *уравнения Эйнштейна*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (12.8)$$

Симметричный тензор в четырёхмерном пространстве имеет 10 независимых компонент. Однако имеются тождества Бианки (12.7), так что не все уравнения (12.7) независимы. Из 10 уравнений только 6 являются *динамическими* в том смысле, что они содержат вторые производные по временной координате x^0 . Для $(\mu 0)$ -компонент из тождеств Бианки следует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^0} G^{\mu 0} = -\frac{\partial}{\partial x^i} G^{\mu i} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} G^{\nu\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} G^{\mu\lambda}, \quad (12.9)$$

в котором правая часть содержит производные по x^0 порядка не выше второго, следовательно $G^{\mu 0}$ не содержит вторых производных по x^0 . Соответствующие компоненты уравнений Эйнштейна являются связями. Число связей равно числу произвольных функций при выборе системы координат в пространстве событий. Таким образом, уравнения Эйнштейна содержат шесть динамических уравнений для шести независимых функций, параметризующих метрику с точностью до преобразования координат.

Уравнения Эйнштейна можно также рассматривать как алгебраические соотношения, частично определяющие тензор кривизны. Учитывая определение тензора Риччи, можно получить следующее представление для тензора Римана:

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} = C_{\mu\nu\lambda\tau} + g_{\mu[\lambda}R_{\tau]\nu} - g_{\nu[\lambda}R_{\tau]\mu} - \frac{R}{3}g_{\mu[\lambda}g_{\tau]\nu}, \quad (12.10)$$

где $C_{\mu\nu\lambda\tau}$ — *тензор Вейля*, обладающий всеми симметриями тензора Римана и, кроме того, удовлетворяющий условию $C^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = 0$. Тензор Риччи отличен от нуля лишь в той области пространства-времени, в которой отличен от нуля ТЭИ материи. Тензор Вейля описывает *свободное* гравитационное поле вне источников. Разумеется, при решении уравнений Эйнштейна может быть получена информация и о свободной части поля, подобно тому, как при

решении задачи об излучении в электродинамике удаётся однозначно отыскать поле излучения системы зарядов, удовлетворяющее свободным уравнениям Максвелла. Для этого необходимо рассматривать уравнения Эйнштейна как дифференциальные уравнения для метрики, дополнив их подходящими граничными условиями. Заметим, что метрика входит также и в соотношение (12.10), определяющее тензор Римана через тензор Риччи.

В заключение этого раздела заметим, что уравнения (12.8) существенно нелинейны относительно метрики, поэтому в ОТО не имеет места принцип суперпозиции. Гравитационные поля двух масс складываются линейно лишь в пределе слабого поля $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

12.2. Действие для гравитационного поля

Функционал, варьирование которого по метрике даёт левую часть уравнений Эйнштейна, имеет вид

$$S = S_g + S_{\text{пов}}, \quad (12.11)$$

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^4x. \quad (12.12)$$

Варьирование производится так. Представим скалярную кривизну в виде $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, тогда

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \left[(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (12.13)$$

где учтено соотношение

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (12.14)$$

Для преобразования последнего члена в (12.13) используем систему отсчёта, в которой $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$, в этой системе

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_{\mu} w^{\mu}, \quad w^{\mu} = g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}. \quad (12.15)$$

Величины $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ (в отличие от $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$) образуют тензор, поскольку неоднородные члены в законе преобразования (10.38) сокращаются, поэтому w^{μ} есть вектор, и, следовательно, в произвольной системе отсчёта имеем

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} = \partial_{\mu} (\sqrt{-g} w^{\mu}). \quad (12.16)$$

Соответствующий интеграл преобразуется в интеграл по граничной гиперповерхности. Существенно, что подынтегральное выражение содержит вариации не только метрики, но и ее производных, причём не только тангенциальных, но и нормальных к гиперповерхности. Это отличие от случая электродинамики связано с тем, что эйнштейновское действие содержит вторые производные от метрики. Было бы ошибкой потребовать обращения в нуль на граничной гиперповерхности вариаций не только метрики, но и ее нормальных производных, при этом часть физически интересных решений (таких как метрика Шварцшильда) были бы потеряны. Поэтому поверхностный интеграл нельзя просто опустить, а необходимо скомпенсировать специально подобранным поверхностным вкладом в действие. Один из способов записи поверхностного интеграла в геометрических терминах следующий:

$$S_{\text{пов}} = -\frac{c^3}{8\pi G} \int_{\partial\Omega} (K - K_0) \sqrt{|\gamma|} d^3x, \quad (12.17)$$

где K — след второй квадратичной формы гиперповерхности $\partial\Omega$, а γ — определитель трёхмерной метрики, индуцируемой на $\partial\Omega$. Величина K_0 , отвечает замене метрики на плоскую, её вычитание необходимо для обеспечения конечности действия (это соответствует вычитанию бесконечной константы). Заметим, что в литературе поверхностный член часто игнорируется, это приводит к неправильным результатам при вычислении действия на решениях уравнений Эйнштейна, что необходимо в квантовой гравитации.

Таким образом, правильный результат варьирования действия (12.10) следует записать так:

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (12.18)$$

где $S = S_g + S_{\text{пов}}$.

Полное действие для материальной системы и создаваемого ею гравитационного поля есть сумма (12.11) и действия материи S_m . Варьирование S_m по метрике даёт метрический ТЭИ по правилу (11.30), или, что то же самое,

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (12.19)$$

Объединяя (12.18) и (12.19), получаем уравнения Эйнштейна (12.8).

Варьирование действия материи по метрике даёт тензор энергии-импульса материи, варьирование же гравитационного действия даёт тензор Эйнштейна, поэтому возникает вопрос об энергии-импульсе самого гравитационного поля. Частично ответ на этот вопрос содержится в характере условия консервативности для ТЭИ материи в ОТО: сохраняющиеся величины, возникающие при наличии векторов Киллинга, содержат вклад как материи, так и гравитационного поля. Можно пойти несколько дальше и представить условие консервативности в виде обычной (нековариантной) дивергенции от суммы двух величин, одна из которых переходит в ТЭИ материи при «выключении» гравитационного поля, а вторая зависит только от переменных гравитационного поля. Но по самому построению такая величина не будет тензором, хотя и может иметь тензорный характер относительно ограниченного класса преобразований координат, например, линейных, как преобразования Лоренца в СТО. Один из таких *псевдотензоров* был построен Ландау и Лифшицем, известны также другие конструкции (например, *псевдотензор Эйнштейна*). Согласование получаемых с помощью различных псевдотензоров энергетических характеристик гравитационного поля, достигается для *асимптотически плоских* метрик, для которых на большом удалении от материальной системы координаты выбраны так, что $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, причём $h_{\mu\nu}$ спадают не медленнее, чем $1/r$.

Отметим ещё одно важное обстоятельство. Уравнения Эйнштейна (12.19) связаны тождествами Бианки (12.7) и поэтому совместны только при выполнении условия консервативности ТЭИ материи. Последнее справедливо при выполнении уравнений движения. Так, в случае точечных частиц имеем

$$T_m^{\mu\nu} = \sum_a m_a c \int u_a^\mu u_a^\nu \frac{\delta(x^\mu - x_a^\mu(s))}{\sqrt{-g}} ds, \quad (12.20)$$

и условие $\nabla_\nu T_m^{\mu\nu} = 0$ сводится к уравнению геодезических

$$\frac{Du_a^\mu}{ds} = 0. \quad (12.21)$$

Таким образом, уравнения движения содержатся в уравнениях Эйнштейна. Для системы из заряженных частиц и электромагнитного поля полный ТЭИ есть $T_m^{\mu\nu} + T_F^{\mu\nu}$, где $T_F^{\mu\nu}$ — максвелловский ТЭИ (11.47). Условие консервативности выполняется при выполнении уравнений движения зарядов (11.18) и уравнений Максвелла (11.44). В этом случае, однако, число материальных уравнений превосходит число тождеств Бианки, поэтому выполнение материальных уравнений является лишь *достаточным* условием совместности уравнений Эйнштейна.

12.3. Линейное приближение

Рассмотрим случай слабого гравитационного поля, выбирая систему отсчёта так, чтобы

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (12.22)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского. Введём вместо $h_{\mu\nu}$ величины

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad h \equiv h^\mu_\mu, \quad (12.23)$$

считая здесь и далее, что поднятие и опускание индексов производится с помощью метрики Минковского. Координаты пространства событий по-прежнему могут быть подвергнуты преобразованию, не выходящему за пределы ограничения (12.22). Это преобразование индуцирует следующее преобразование величин $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}; \quad |\xi_\mu| \ll 1. \quad (12.24)$$

Преобразованием (12.24) можно воспользоваться, чтобы добиться выполнения следующего калибровочного условия:

$$\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (12.25)$$

(калибровка Фока-де Дондера). Теперь нетрудно убедиться в том, что тензор Эйнштейна в линейном по $\psi_{\mu\nu}$ приближении принимает простой вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}\square\psi_{\mu\nu} + O(\psi^2) \quad (12.26)$$

(при выводе этой формулы следует воспользоваться представлением (10.55) для тензора кривизны). В результате находим, что уравнения Эйнштейна в линейном по $\psi_{\mu\nu}$ приближении являются уравнениями Даламбера

$$\square\psi_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (12.27)$$

Отсюда следует, что гравитационное поле, так же как и электромагнитное, распространяется со скоростью света. Свободное поле $\psi_{\mu\nu}$, удовлетворяющее уравнению

$$\square\psi_{\mu\nu} = 0, \quad (12.28)$$

представляет собой поле *гравитационных волн*. Рассмотрим этот случай подробнее.

Плоская монохроматическая гравитационная волна, распространяющаяся вдоль волнового вектора \mathbf{k} имеет вид

$$\psi_{\mu\nu} = \text{Re} \left\{ \epsilon_{\mu\nu} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}, \quad \omega = c|\mathbf{k}|, \quad (12.29)$$

где амплитуды $\epsilon_{\mu\nu}$ удовлетворяют условиям поперечности

$$k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0; \quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right); \quad k^\mu k_\mu = 0. \quad (12.30)$$

Решения уравнения Даламбера (12.28) можно снова подвергнуть калибровочному преобразованию (12.24), теперь при дополнительном условии

$$\square \xi_\mu = 0, \quad (12.31)$$

так что преобразованные величины $\psi_{\mu\nu}$ по-прежнему удовлетворяют уравнению (12.28). Этим можно воспользоваться, чтобы обратить в нуль след $\psi = \psi^\mu_\mu$, а также смешанные компоненты ψ_{0i} . Тогда из (12.30) находим

$$\epsilon_{00} = \frac{ck_i e_{0i}}{\omega} = 0; \quad \epsilon_{ii} = 0; \quad k_i \epsilon_{ij} = 0. \quad (12.32)$$

Таким образом, поляризация гравитационных волн описывается поперечным трёхмерным тензором ϵ_{ij} с нулевым следом. Обозначим через e^θ, e^φ пару ортов, лежащих в плоскости, ортогональной \mathbf{k} и образующих с ним правую тройку $c[\mathbf{k} \times \mathbf{r}^\theta] = \omega e^\varphi$. Тогда можем разложить ϵ_{ij} по двум состояниям поляризации

$$\epsilon_{ij} = a_\oplus \epsilon_{ij}^\oplus + a_\otimes \epsilon_{ij}^\otimes, \quad (12.33)$$

$$\epsilon_{ij}^\oplus = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^\theta e_j^\theta - e_i^\varphi e_j^\varphi); \quad \epsilon_{ij}^\otimes = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^\theta e_j^\varphi + e_i^\varphi e_j^\theta). \quad (12.34)$$

Гравитационные волны воздействуют на пробные частицы, а также на электромагнитное поле, передавая им энергию и импульс. В рамках линеаризованной теории можно построить лоренц-ковариантный тензор энергии-импульса для поля $\psi_{\mu\nu}$, исходя из лагранжева формализма. Такая теория аналогична максвелловской, при этом роль калибровочных преобразований играют четыре преобразования (12.24). Существенным отличием является то, что в рамках теории без высших производных сформулировать теорию в терминах калибровочно-инвариантных величин невозможно. В электродинамике калибровочно-инвариантными являются компоненты поля $F_{\mu\nu}$, в линеаризованной теории гравитации аналогичную роль играют компоненты тензора кривизны $R_{\mu\nu\lambda\tau}$. Но эти величины построены из *вторых* производных от $\psi_{\mu\nu}$, с помощью только первых производных построить калибровочно-инвариантный тензор вообще нельзя. Если в качестве лагранжиана взять квадрат тензора кривизны, то мы получим для $\psi_{\mu\nu}$ уравнения четвёртого порядка, не совпадающие с (12.27). Если же пытаться построить лагранжиан из первых производных от $\psi_{\mu\nu}$, то удаётся обеспечить инвариантность лишь в линейном приближении по ξ_μ . Это служит указанием на то, что результирующая теория будет лишь приближённой. Но именно так происходит на самом деле, точной теорией является нелинейная ОТО.

Действие, обладающее указанными свойствами, имеет вид

$$S_h = \frac{c^3}{32\pi G} \int (\psi_{\mu\nu,\lambda} \psi^{\mu\nu,\lambda} - 2\psi_{\mu\nu,\lambda} \psi^{\mu\lambda,\nu} - \frac{1}{2} \psi_{,\lambda} \psi^{,\lambda}) d^4x = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x. \quad (12.35)$$

Варьирование приводит к уравнению (12.28) в калибровке (12.25). Канонический тензор энергии-импульса

$$t^{\mu\nu} = \psi'_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'_{\alpha\beta}} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\{ 2\psi'_{\alpha\beta} (\psi^{\alpha\beta,\nu} - 2\psi^{\alpha\nu,\beta}) - \right. \\ \left. - \psi'^{\mu} \psi'^{\mu} - \eta^{\mu\nu} (\psi_{\alpha\beta,\lambda} \psi^{\alpha\beta,\lambda} - 2\psi_{\alpha\beta,\lambda} \psi^{\alpha\lambda,\beta} - \frac{1}{2} \psi_{,\lambda} \psi^{,\lambda}) \right\} \quad (12.36)$$

удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_\nu t^{\mu\nu} = 0, \quad (12.37)$$

и, следовательно, ведёт к сохранению 4-импульса

$$P^\mu = \int t^{0\mu} d^3x. \quad (12.38)$$

Общее решение уравнения Даламбера (12.28) в калибровке Фока-де Дондера (12.25)

$$\psi^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} (\varphi^{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \varphi^{\mu\nu*}(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}) \quad (12.39)$$

после подстановки в (12.38) и интегрирования по пространству даёт

$$P^\mu = \frac{c^4}{8\pi G} \int k^\mu (|a^\oplus(\mathbf{k})|^2 + |a^\otimes(\mathbf{k})|^2) d\mathbf{k}, \quad (12.40)$$

где введены проекции

$$a^\oplus(\mathbf{k}) = \epsilon_{ij}^\oplus \varphi^{ij}(\mathbf{k}), \quad a^\otimes(\mathbf{k}) = \epsilon_{ij}^\otimes \varphi^{ij}(\mathbf{k}). \quad (12.41)$$

Правую часть в линеаризованных уравнениях Эйнштейна (12.27) можно получить, вводя взаимодействие поля $h_{\mu\nu}$ с материей через её ТЭИ:

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \int h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} d^4x. \quad (12.42)$$

Заметим, что это выражение не зависит от калибровки (12.24) при условии консервативности $T^{\mu\nu}$ в смысле СТО, т.е. $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Уравнения (12.27) позволяют построить запаздывающие решения и рассчитать гравитационное излучение в полной аналогии с результатами главы 9. При этом динамика материальной системы должна быть *негравитационной* (например, система зарядов и создаваемого ими электромагнитного поля). В противном случае условие консервативности в смысле СТО $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ не будет выполняться, поскольку гравитационное поле трансформирует это условие в равенство нулю ковариантной производной. Чтобы корректно описать гравитационное излучение гравитирующей системы, необходимо в уравнениях Эйнштейна учесть также члены квадратичные по $\psi_{\mu\nu}$, которые следует отнести к правой части уравнений Даламбера, рассматривая их как вклад эффективного ТЭИ гравитационного поля.

Теорию с действием $S_0 = S_h + S_{\text{int}}$, инвариантную относительно бесконечно малых калибровочных преобразований (12.24), можно использовать для итерационного построения нелинейной теории, инвариантной относительно *конечных* преобразований. Результирующая теория будет действительно совпадать с ОТО.

12.4. Чёрные дыры

Гравитационное поле сферически-симметричного статического распределения материи удобно описывать в системе координат (10.66). Рассмотрим поле вне создающего его источника, где $T_{\mu\nu} = 0$. Тогда уравнения Эйнштейна в пустоте сводятся к следующей системе уравнений для функций $\nu(r)$ и $\lambda(r)$:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (12.43)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (12.44)$$

где первое представляет компоненту G_r^r , а второе — G_θ^0 тензора Эйнштейна. Для метрики (10.66) отличны от нуля также компоненты

$$G_\theta^\theta = G_\varphi^\varphi = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right), \quad (12.45)$$

однако уравнения Эйнштейна для них не приводят к новым уравнениям на ν , λ : возникающее соотношение является следствием уравнений (12.43)–(12.44).

Сумма уравнений (12.43)–(12.44) даёт $\nu' = -\lambda'$, при интегрировании этого соотношения постоянную можно положить равной нулю (ненулевую постоянную можно устранить перерастяжкой временной координаты в (10.66)). Уравнение (10.45) легко интегрируется, и в результате чего имеем

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 + \frac{\text{const}}{r}. \quad (12.46)$$

Значение постоянной можно получить, переходя к ньютоновскому пределу при $r \rightarrow \infty$, при этом должно быть

$$g_{00} = e^\nu = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (12.47)$$

где M — масса источника (напомним, что $\varphi = -GM/r$). Таким образом, (12.46) можно представить в виде

$$e^\nu = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right), \quad (12.48)$$

где

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (12.49)$$

— величина размерности длины (для массы Солнца $r_g \sim 3.4$ км), называемая *гравитационным радиусом*. Итак, поле сферически-симметричного распределения масс во внешней области описывается метрикой

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega, \quad (12.50)$$

известной как *решение Шварцшильда*. Исходное выражение для интервала (10.66) было записано в предположении, что все величины не зависят от времени. Однако можно показать, что формула (12.50) остаётся справедливой и для нестационарного распределения материи (совершающей, например, радиальные пульсации или испытывающей радиальное сжатие) во внешней области, где $T_{\mu\nu} = 0$ (*теорема Биркгофа*). Для того, чтобы вещество могло противостоять силам гравитационного сжатия необходимо, чтобы давление, развиваемое при уменьшении объёма, нарастало достаточно быстро. Известны три типа реальных астрофизических объектов, удовлетворяющих этому требованию: обычные звёзды, вещество которых находится в состоянии больцмановского идеального газа, белые карлики, в которых вещество находится в твёрдом состоянии и давление в основном создаётся электронным газом (такой газ обнаруживает существенно квантовое поведение), а также нейтронные звёзды, которые практически целиком состоят из нейтронов, также создающих давление по законам квантовой физики. Эти три состояния являются результатом эволюции звёзд при их остывании. При этом равновесное состояние нейтронной звезды возможно лишь для ограниченных значений полной массы $M < M_{cr}$, где величина M_{cr} имеет порядок трёх солнечных масс. Значительное число звёзд имеет большие массы, поэтому результатом их эволюции не может быть нейтронная звезда. Гравитационное сжатие при остывании такой звезды не может остановиться, происходит *гравитационный коллапс*.

Вне коллапсирующего тела пространство-время по-прежнему будет статическим (12.50), так что для удалённого наблюдателя коллапсирующее тело не отличается от обычной звезды. Однако, метрика (12.50) имеет особенность при $r = r_g$, поэтому следует рассмотреть подробнее приближение коллапсирующего тела к гравитационному радиусу. Для упрощения задачи пренебрежём давлением и будем рассматривать движение частиц на границе коллапсирующего тела как свободное. Радиальные геодезические описываются уравнением Гамильтона-Якоби (11.16), в котором $S = -\mathcal{E}t + f(r)$, где \mathcal{E} — полная энергия:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = m^2 c^2. \quad (12.51)$$

Определяя f в квадратурах и дифференцируя действие по \mathcal{E} , $\partial S / \partial \mathcal{E} = -t_0 = \text{const}$ находим (для движения к центру)

$$c(t - t_0) = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \int_r^{r_0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2}}, \quad (12.52)$$

где t_0 — момент прохождения точки r_0 . Если падение начинается из точки r_0 с нулевой скоростью, то, согласно (11.10),

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \quad (12.53)$$

(здесь учтено условие нормировки 4-скорости). Подставляя в (12.52) находим

$$c(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \int_r^{r_0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{r_r - r_g}{r} - \frac{r_r - r_g}{r_0}}}. \quad (12.54)$$

Интеграл логарифмически расходится при приближении к гравитационному радиусу, таким образом приближение границы коллапсирующего тела к r_g происходит бесконечно долго по времени t (этот вывод не изменяется при учёте давления). Закон приближения имеет экспоненциальный характер

$$r - r_g = \text{const} \exp\left(-\frac{ct}{r_g}\right). \quad (12.55)$$

Однако по часам наблюдателя, движущегося вместе с границей коллапсирующего тела, приближение к гравитационному радиусу происходит за *конечное* собственное время

$$c\tau = \int ds = \int \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2}, \quad (12.56)$$

где dr/dt следует подставить из (12.54). В результате находим

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int_r^{r_g} \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}\right)^{-1/2} dr, \quad (12.57)$$

что остаётся конечным при $r \rightarrow r_g$. Для сопутствующего наблюдателя пересечение гравитационного радиуса вообще остаётся незамеченным, кривизна пространства-времени не имеет особенности при $r = r_g$, особенность интервала (11.50) связана с выбором *статических* координат, иначе говоря, карта (11.50) покрывает лишь часть $r > r_g$ пространственно-временного многообразия.

Для внешнего наблюдателя приближение к гравитационному радиусу сопровождается «почернением» звезды: лучи света, испускаемые с поверхности коллапсирующего тела, распространяются в радиальном направлении бесконечно долго. Действительно, для световых сигналов $ds^2 = 0$ и для времени распространения Δt из точки r в точку r_0 находим

$$c\Delta t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad (12.58)$$

этот интеграл расходится при $r \rightarrow r_g$. Трёхмерная гиперповерхность $r = r_g$ (*горизонт событий*) является изотропной, испускаемые на горизонте направленные наружу световые лучи не покидают её. Разумеется, никакие сигналы не могут выходить и из внутренней области под горизонтом событий.

Таким образом, коллапсирующая звезда «застывает» на гравитационном радиусе с точки зрения удалённого наблюдателя, однако для наблюдателя, движущегося вместе с телом, сжатие не останавливается при $r = r_g$, а продолжается и дальше, причём истинная сингулярность $r = 0$ достигается за конечное собственное время (порядка r_g/c). Такое на первый взгляд парадоксальное, поведение объясняется бесконечным замедлением времени при стремлении к нулю компоненты метрики g_{00} .

В реальной астрофизической ситуации коллапсирующая звезда, как правило, не является уединённым объектом, в этом случае будет происходить падение вещества в чёрную дыру, сопровождающееся его разогреванием (*аккреция*). Аккрецирующее вещество светится как и обычная звезда (с характерными особенностями в спектре), и таким образом чёрные дыры могут быть обнаружены. Важнейшим параметром является масса объекта; если она превышает три солнечных массы, то, по всей вероятности, мы имеем дело с чёрной дырой. Такие источники в последнее время были действительно обнаружены. Не исключена также возможность гравитационного коллапса ядер галактик, при этом огромное число звёзд ($\sim 10^8 - 10^9$) может оказаться под гравитационным радиусом, соответствующим их суммарной массе. Средняя плотность вещества при этом остаётся невысокой, порядка плотности газа в отдельной звезде. Существуют основания полагать, что в центре нашей Галактики имеется подобная чёрная дыра, хотя полной ясности в этом вопросе пока нет. Имеются более определённые данные о наличии чёрных дыр в ядрах других галактик. Третий тип чёрных дыр, которые не запрещены теоретически, правда экспериментальных указаний на их существование нет — это *реликтовые* чёрные дыры относительно малой массы и микроскопических размеров. Согласно квантовой теории чёрная дыра испускает все виды частиц с тепловым спектром (*квантовое излучение Хокинга*), преимущественно гравитоны, фотоны и нейтрино. Чёрная дыра с массой порядка массы астероида ($\sim 10^{15}$ г), образовавшаяся на начальной стадии космологического расширения, к настоящему моменту должна почти полностью испариться, при этом заключительная фаза испарения должна иметь взрывной характер. Поиски взрывающихся реликтовых чёрных дыр пока не увенчались успехом. В заключение заметим, что квантовое испарение не противоречит классическому свойству горизонта событий как «односторонней мембраны», поскольку квантовые частицы подчиняются соотношению неопределённостей, и не являются строго локализованными. Можно считать, что чёрная дыра рождает частицы вне горизонта, такие частицы могут уходить на бесконечность, если обладают достаточной энергией.

12.5. Модели Фридмана и инфляция

Вселенная в целом, вероятно, описывается одной из метрик (10.66), во всех трёх случаях 3-пространство однородно и изотропно. В сопутствующей системе отсчёта (10.67) вещество должно покоиться, движение нарушало бы изотропию, поэтому (усреднённое) поведение материи описывается лишь двумя функциями времени t : плотностью энергии ϵ и давлением p . Удобно ввести *конформное время* η , полагая $c dt = a d\eta$, тогда (10.67) можно переписать в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dr^2 - S_k^2 d\Omega), \quad (12.59)$$

где $k = 0, \pm 1$ и

$$S_1 = \sin r, \quad S_0 = r, \quad S_{-1} = \text{sh } r \quad (12.60)$$

соответственно для *замкнутой* (пространственное сечение S^3 , $k = 1$), *пространственно плоской* (\mathbb{R}^3 , $k = 0$) и *открытой* модели (гиперboloид L^3 , $k = -1$).

Обозначая штрихом производную по η , для компоненты тензора Риччи R_0^0 и скалярной кривизны из (10.37), (10.48), получаем

$$R_0^0 = \frac{3}{a^4}(a'^2 - aa''), \quad R = -\frac{6}{a^3}(ka + a''). \quad (12.61)$$

Тензор энергии-импульса, в соответствии со сказанным выше, имеет отличные от нуля компоненты

$$T_0^0 = \epsilon, \quad T_j^i = -\delta_j^i P, \quad (12.62)$$

при этом из условия консервативности $\nabla_\mu T_0^\mu = 0$ находим

$$-\frac{d\epsilon}{\epsilon + P} = 3 \frac{d\Omega}{a}. \quad (12.63)$$

Удобно воспользоваться G_0^0 -компонентой уравнения Эйнштейна

$$\frac{a'^2}{a^4} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^4} \epsilon \quad (12.64)$$

совместно с уравнением (12.63). Величина

$$H = \frac{a'}{a^2} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (12.65)$$

называется «постоянной» Хаббла (эта величина входит в виде эффективной постоянной в формулу для красного смещения). Её значение определяется экспериментально. Из (12.64) видно, что существует критическая плотность

$$\epsilon_{\text{кр}} = \frac{3c^4}{8\pi G} H^2, \quad (12.66)$$

при которой $k = 0$, т.е. 3-пространство плоское. Если $\epsilon > \epsilon_{\text{кр}}$, то уравнение (12.64) может выполняться только при $k = 1$ (закрытая модель), если $\epsilon < \epsilon_{\text{кр}}$ — при $k = -1$ (открытая модель). Существующие в настоящее время данные не позволяют сделать окончательное суждение какая модель реализуется из-за проблемы скрытой массы (порядка 90% массы Вселенной не имеет пока окончательного истолкования на основании имеющихся теорий фундаментальных взаимодействий!). Но по порядку величины наблюдаемая с учётом скрытой массы плотность близка к критической.

Чтобы замкнуть систему (12.63)–(12.64), необходимо соотношение между ϵ и P , которое является характеристикой вещества: *уравнение состояния*. В современную эпоху (после рекомбинации, т.е. образования нейтральных атомов из первичной плазмы) давлением можно пренебречь, $P = 0$, а плотность энергии определяем энергией покоя тел $\epsilon = \mu c^2$ (*пыль*). Тогда из (12.63) получаем

$$\mu = \frac{\text{const}}{a^3}. \quad (12.67)$$

Пространственный объём замкнутой Вселенной конечен, $V = 2\pi^2 a^3$, поэтому при $k = 1$

$$\mu a^3 = \frac{M}{2\pi^2}. \quad (12.68)$$

Проинтегрировав с учётом этого уравнение (12.64), получаем:

$$a = a_0(1 - \cos \eta), \quad a_0 = \frac{2GM}{3\pi c^2}, \quad (12.69)$$

при этом из условия $c dt = a d\eta$ находим

$$ct = a_0(\eta - \sin \eta). \quad (12.70)$$

Таким образом, замкнутая Вселенная, заполненная пылью, расширяется до максимального значения радиуса $a = 2a_0$ при $t = \pi a_0/c$ и снова сжимается в точку при $ct = 2\pi a_0$.

Для открытой Вселенной, заполненной пылью, величина a_0 уже не определяется формулой (12.69), а является заданным параметром (объём Вселенной и её масса бесконечны). Закон расширения имеет вид

$$a = a_0(\text{ch } \eta - 1), \quad ct = a_0(\text{sh } \eta - \eta), \quad (12.71)$$

причём

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi G} a_0. \quad (12.72)$$

В пространственно-плоском случае получаем

$$\mu a^3 = \text{const}, \quad a = \text{const } t^{2/3}. \quad (12.73)$$

Эти формулы, однако, не описывают реальной Вселенной в эпоху до рекомбинации, когда давлением пренебречь нельзя. В ранней *горячей* Вселенной вещество сначала находилось в состоянии, близком к состоянию *фотонного газа*:

$$P = \frac{\epsilon}{3}. \quad (12.74)$$

В этом случае из (12.63) находим

$$\epsilon = \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi G} \frac{1}{a^4}, \quad (12.75)$$

где a_1 — постоянный параметр. Тогда для замкнутой модели получаем

$$a = a_1 \sin \eta, \quad ct = a_1(1 - \cos \eta), \quad (12.76)$$

что следует применять при достаточно малых η , при этом

$$a = \sqrt{2a_1 ct}; \quad \epsilon = \frac{3}{32\pi c^2 G} \frac{1}{t^2}. \quad (12.77)$$

В открытой модели

$$a = a_1 \operatorname{sh} \eta, \quad ct = a_1(\operatorname{ch} \eta - 1), \quad (12.78)$$

при малых η поведение совпадает с (12.77). Наконец, в пространственно плоском случае

$$\epsilon a^4 = \operatorname{const}, \quad a = \operatorname{const} \sqrt{t}. \quad (12.79)$$

До момента рекомбинации уравнение состояния имело вид $P = \frac{\epsilon}{3}$ и фотоны находились в тепловом равновесии с плазмой. После рекомбинации фотоны выходят из теплового равновесия с веществом, и «запоминают» тот тепловой спектр, который они имели в момент рекомбинации. В результате последующего расширения температура фотонного газа адиабатически падает, в настоящее время значение температуры этого *реликтового* излучения около 3°К. Излучение с такой температурой наблюдается из всех доступных участков Вселенной.

Более детальный анализ однако показывает, что описанные выше модели приводят к парадоксам, известным как *проблемы горизонта* и *плоскостности*. Оказывается, что наблюдаемая сейчас часть Вселенной, обнаруживающая одинаковую температуру реликтового излучения, образовалась из огромного числа областей, которые были причинно несвязанными в ранней Вселенной, если её расширение действительно описывалось уравнением $P = \frac{\epsilon}{3}$ вплоть до $t = 0$. Непонятно, каким образом установилось тепловое равновесие между областями, которые не могли успеть обменяться световыми сигналами за всё время от начала расширения (проблема горизонта). Проблема плоскостности состоит в том, что наблюдаемая сейчас близость плотности вещества к критической отвечает оценке

$$\left| \frac{\epsilon - \epsilon_{\text{кр}}}{\epsilon} \right| < 10^{-55} \quad (12.80)$$

на так называемый «момент Великого объединения» (при энергии частиц порядка 10^{17} Гэв), т. е. равенства плотности критическому значению с колоссальной точностью. Неясно, почему Вселенная была «изготовлена» точно в критическом состоянии. Другие проблемы связаны с поведением возмущений во фридмановской модели, которые призваны объяснить происхождение галактик и наблюдаемые закономерности крупномасштабной структуры.

Продвинуться в понимании этих вопросов позволяет модель *инфляционной Вселенной*, в которой предполагается, что при очень малых t давление было отрицательным и экстремально большим по величине:

$$P = -\epsilon \quad (12.81)$$

(к такому уравнению приводят некоторые квантово-полевые модели). Уравнение (12.63) при этом теряет смысл, и нужно вернуться к полной системе уравнений Эйнштейна. В результате оказывается, что на ранней стадии закон расширения был экспоненциальным:

$$a \sim e^{H_0 t}, \quad (12.82)$$

где H_0 — некоторая постоянная. Столь быстрое расширение объясняет, почему оказались причинно связанными отдалённые участки Вселенной.

Наконец, представляет проблему и объяснение возникновения Вселенной. Имеются модели, объясняющие это как процесс квантового рождения Вселенной (как пространства-времени) из «ничего». В теории суперструн состояние «без» пространства-времени допускает математическое описание, однако говорить о последовательной теории происхождения Вселенной пока рано.