МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико–математический факультет

Кафедра Теории функций и функционального анализа

Курс лекций по действительному анализу

Лектор — Олег Георгиевич Смолянов

Летописец — Бибиков Павел Витальевич (группа 212)
телефон: 137-45-97
e-mail: tsdtp4u@proc.ru

II курс, 3 семестр, 2 поток (2006 – 2007 гг.)

Лекция 1.

1. Кольца и полукольца.

Определение 1.1. Пусть Ω — фиксированное множество, тогда *кольцом S подмножеств* Ω называется всякая непустая совокупность подмножеств Ω со следующими свойствами:

(1) $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$,

(2) $A, B \in S \Rightarrow A \triangle B \in S$.

Если положить $A \triangle B = A + B$, $A \cap B = A \cdot B$, то будут выполнены все аксиомы кольца. Такие кольца называются *булевыми*.

Есть другие эквивалентные условия:

(3) $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$,

(4) $A, B \in S \Rightarrow A \setminus B \in S$.

Предложение 1.1. $\{(1),(2)\} \Leftrightarrow \{(3),(4)\}$.

Доказательство. $\{(1),(2)\} \Rightarrow \{(3),(4)\}$:

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B),$$
$$A \setminus B = (A \cup B) \triangle B.$$

$\{(3),(4)\} \Rightarrow \{(1),(2)\}$:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$
$$A \cap B = (A \cup B) \triangle (A \triangle B).$$

□

Можно ослабить условие (3):

(3′) $A, B \in S, A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B \in S$.

Предложение 1.2. $\{(3),(4)\} \Leftrightarrow \{(3'),(4)\}$.

Доказательство. $\{(3),(4)\} \Rightarrow \{(3'),(4)\}$ — очевидно.

$\{(3'),(4)\} \Rightarrow \{(3),(4)\}$: $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$. □

Определение 1.2. *Полукольцо $\mathcal{P}$ в Ω* — это совокупность подмножеств Ω со следующими свойствами:

(1) $\varnothing \in \mathcal{P}$,

(2) $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$,

(3) $A, B \in \mathcal{P}, B \subset A \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P} : A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j$.

1. Если S — кольцо, то S — полукольцо.

2. Пусть S — кольцо, тогда $\varnothing \in S$: $\exists\, A \in S \Rightarrow \varnothing = A \setminus A \in S$.

Если $\Omega \in S$, то Ω играет роль 1 в том смысле, что $\forall\, A \in S\ A \cap \Omega = A$.

Определение 1.3. Полукольцо с единицей называется *полуалгеброй подмножеств*, а кольцо с единицей — *алгеброй.*

σ-кольцо — это кольцо S, обладающее свойством: $A_1, A_2, \ldots \in S \Rightarrow \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1} A_j \in S$.

Алгебра, которая является σ-кольцом, называется *σ-алгеброй подмножеств.*

δ-кольцо — это кольцо S, обладающее свойством: $A_1, A_2, \ldots \in S \Rightarrow \Rightarrow \bigcap\limits_{j=1} A_j \in S$.

Примеры.

1. $\Omega = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{P} = \{(a;b), [a;b), (a;b], [a;b] \mid a \leqslant b \in \mathbb{R}^1\}$ — полукольцо, но не кольцо и не полуалгебра.

2. $\Omega = \mathbb{R}^1$, S — множество конечных объединений элементов из $\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — полукольцо.

3. Если $\mathfrak{a}$ — алгебра, являющаяся σ-кольцом, то $\mathfrak{a}$ — σ-алгебра.

4. Всякое σ-кольцо является δ-кольцом. Обратное неверно: пусть $\Omega = \mathbb{R}^1$, S — множество всех ограниченных подмножеств из Ω. Тогда S — δ-кольцо, но не σ-кольцо.

5. Не всякое σ-кольцо является алгеброй: пусть S — множество всех не более чем счетных подмножеств из Ω. Тогда S — σ-кольцо, но не алгебра.

2. Мера и ее счетно аддитивность.

Определение 2.1. *Мерой ν* называется функция, область определения которой является полукольцом $\mathcal{P}$ подмножеств некоторого множества, принимающая числовые значения и обладающая свойством: $\forall\, A_j \in \mathcal{P}, j = 1, \ldots, n$, если $A_i \cap A_k = \varnothing$ при $i \neq k$ и $\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{P}$, то

$$\nu\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \nu A_j.$$

Это свойство меры называется *аддитивным.*

Замечание. 1. n — произвольное число (его нельзя заменить на 2).

2. Если $\mathcal{P}$ — кольцо, то достаточно потребовать, чтобы $\forall\, A_1, A_2 \in \mathcal{P}$: $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ имеем $\nu(A_1 \sqcup A_2) = \nu A_1 + \nu A_2$.

Определение 2.2. Мера ν называется *счетно аддитивной*, если

$$\forall\, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P} : \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{P} \Rightarrow \nu\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu A_j.$$

Мера *неотрицательна*, если ее значения неотрицательны.

Примеры.

1. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо подмножеств $\mathbb{R}^1$ (см. выше) и $\nu((a;b)) = \nu([a;b)) = \nu((a;b]) = \nu([a;b]) = b-a$, если $b \geqslant a$. Такая мера называется *мерой Лебега.*

2. *Мера Лебега-Стильтьеса*: пусть f — неубывающая на $\mathbb{R}^1$ функция, тогда

$$\begin{aligned} \nu_{LS}^{f}([a;b)) &= f(b-0) - f(a-0), \\ \nu_{LS}^{f}((a;b]) &= f(b+0) - f(a+0), \\ \nu_{LS}^{f}([a;b]) &= f(b+0) - f(a-0), \\ \nu_{LS}^{f}((a;b)) &= f(b-0) - f(a+0). \end{aligned}$$

Лекция 2.

Определение 2.3. *Кольцо, порожденное полукольцом* $\mathcal{P}$ — это минимальное кольцо, содержащее $\mathcal{P}$: $S(\mathcal{P}) = \bigcap\limits_{S \supset \mathcal{P}} S$.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо. Тогда порожденное им кольцо $S(\mathcal{P})$ — это множество всевозможных множеств вида $\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j$, где $n \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathcal{P}$.*

Доказательство. 1. Докажем, что семейство множеств $\left\{ \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j \mid n \in \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, n \right\}$ — это кольцо. Имеем:

$$\begin{aligned}
\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big) &= \bigsqcup_{l=1}^{m} C_l, \\
\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \setminus \Big(\bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big) &= \bigsqcup_{j=1}^{n} \Big(A_j \setminus \bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big) = \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{n} (((A_j \setminus B_1) \setminus B_2) \setminus \ldots \setminus B_r) = \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{n} \Big(\bigsqcup_{p=1}^{s} E_p\Big), \quad E_s \in \mathcal{P}.
\end{aligned}$$

2. Докажем минимальность: пусть $S_0 \supset \mathcal{P}$, тогда $\forall\, n, \forall\, A_j \in \mathcal{P}, j = = 1, \ldots, n \quad \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in S_0 \Rightarrow S_0 \supset S(\mathcal{P})$. □

Предложение 2.2. *Пусть* $\nu \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$ *— мера на* $\mathcal{P}$. *Тогда* $\exists!\, \bar{\nu} \colon S(\mathcal{P}) \to \to \mathbb{R}^+$ *— мера на* $S(\mathcal{P})$, *такая, что* $\bar{\nu}\, |_{\mathcal{P}} = \nu$.

Доказательство. Вначале докажем, что существует не более чем одно продолжение. Пусть $A \in S(\mathcal{P})$, тогда $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} P_j$, $P_j \in \mathcal{P}$. Отсюда $\bar{\nu} A = = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{\nu} P_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \nu P_j$.

Теперь проверим, что введенная выше функция $\bar{\nu}$ является мерой. Во-первых, докажем, что значение $\bar{\nu} A$ не зависит от множеств, на которые раскладывается A. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} P_j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} B_k$, тогда $A = \bigsqcup\limits_{j,k}^{n,m} P_j \cap B_k$ и поскольку $P_j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (P_j \cap B_k)$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} \nu P_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} \nu (P_j \cap B_k)$. Аналогично, $\sum\limits_{k=1}^{m} \nu B_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} \nu (P_j \cap B_k)$. Поэтому $\sum\limits_{j=1}^{n} \nu P_j = \sum\limits_{k=1}^{m} \nu B_k$.

Во-вторых, докажем аддитивность. По определению,

$$\bar{\nu}\Big(\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big)\Big) = \sum_{j=1}^{n} \nu A_j + \sum_{k=1}^{r} \nu B_k =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \bar{\nu} A_j + \sum_{k=1}^{r} \bar{\nu} B_k = \bar{\nu}\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + \bar{\nu}\Big(\bigsqcup_{k=1}^{r} B_k\Big).$$

□

Теорема 2.1. *Если исходная мера счетно аддитивна, то ее продолжение тоже счетно аддитивно.*

Доказательство. Пусть $A \in S(\mathcal{P})$, $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in S(\mathcal{P})$. Тогда $\forall\, j$ $A_j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{k(j)} A_{jk}$, $A_{jk} \in \mathcal{P}$. Значит, $\bar{\nu} A = \bar{\nu}\Big(\bigsqcup\limits_{j,k} A_{jk}\Big)$, поэтому

$$\bar{\nu} A = \sum_{j,k} \nu A_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k(j)} \nu A_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\nu} A_j.$$

□

Предложение 2.3. *Пусть ν — мера на кольце S. Тогда ν счетно аддитивна $\Leftrightarrow$ для всех $A, A_j \in S$ выполняется следующее свойство: если $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \supset A$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu A_j \geqslant \nu A$.*

Доказательство. Пусть ν счетно аддитивна и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \supset A$, где $A, A_j \in S$. Тогда

$$A = (A \cap A_1) \sqcup (A \cap (A_2 \setminus A_1)) \sqcup (A \cap (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))) \sqcup \ldots,$$

поэтому

$$\nu A = \nu(A \cap A_1) + \nu(A \cap (A_2 \setminus A_1)) + \nu(A \cap (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))) + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \nu A_1 + \nu A_2 + \nu A_3 + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \nu A_j.$$

Обратно, пусть $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B, B_k \in S$. Докажем, что $\nu B = \sum_{k=1}^{\infty} \nu B_k$. Заметим, что для любого n выполняется равенство

$$B = \Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\Big) \sqcup \Big(B \setminus \Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\Big)\Big),$$

поэтому в силу аддитивности меры

$$\nu B = \sum_{k=1}^{n} \nu B_k + \nu\Big(B \setminus \Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\Big)\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \nu B_k.$$

В то же время $\nu B \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \nu B_k$. Отсюда получаем, что $\nu B = \sum_{k=1}^{\infty} \nu B_k$ и мера ν счетно аддитивна. $\square$

Рассмотрим полукольцо $\mathcal{P}$ подмножеств $\mathbb{R}^1$ с мерой Лебега ν. Тогда верна следующая

Теорема 2.2. *Мера Лебега счетно аддитивна.*

Доказательство. Вначале заметим, что если $(a;b) = (a;c] \cup (c;b)$, то $\nu((a;b)) = b - a = (c-a) + (b-c) = \nu((a;c]) + \nu((c;b))$. Аналогичное равенство можно записать и для произвольного конечного количества интервалов разбиения отрезка $(a;b)$.

Пусть теперь $\mathcal{P} \ni A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$, где $A_j \in \mathcal{P}$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Будем считать, что $A = (a;b]$ — полуинтервал. В таком случае $\exists\, [\alpha;\beta] \subset A : \nu([\alpha;\beta]) > \nu A - \varepsilon$ и $\exists\, (\alpha_j;\beta_j) \supset A_j : \nu((\alpha_j;\beta_j)) < \nu A_j + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Отсюда $[\alpha;\beta] \subset A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j;\beta_j)$. Значит, $\exists\, n : [\alpha;\beta] \subset \bigcup_{j=1}^{n} (\alpha_j;\beta_j)$, поэтому $\nu([\alpha;\beta]) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \nu((\alpha_j;\beta_j)) < \sum_{j=1}^{n} \left(\nu A_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \nu A_j + 2\varepsilon$ и $\nu A \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu A_j$. $\square$

Определение 2.4. Рассмотрим алгебру S со счетно аддитивной мерой ν. $T(\Omega)$ — это множество всех подмножеств Ω. Легко видеть, что $T(\Omega)$ является σ-алгеброй. Определим *внешнюю меру* $\nu^*\colon T(\Omega) \to \mathbb{R}^1$, $\nu^* A = \inf\limits_{A \subset \bigcup_j A_j} \sum_{j=1}^{\infty} \nu A_j$, где $A \in T(\Omega)$.

Множество $A \subset \Omega$ называется *ν-измеримым*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, B \in S :$ $\nu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Лекция 3.

3. Теорема Каратеодори.

Теорема 3.1 (Каратеодори). *Пусть ν — счетно аддитивная неотрицательная мера на алгебре S подмножеств Ω, $\sigma(S)$ — σ-алгебра, порожденная S. Тогда $\exists!\, \bar{\nu}\colon \sigma(S) \to \mathbb{R}^1$ — счетно аддитивная мера на $\sigma(S)$, такая, что $\bar{\nu}\,|_S = \nu$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}$ — множество ν-измеримых подмножеств Ω. Докажем, что на самом деле $\bar{\nu} = \nu^*$, где ν^* — внешняя мера. Для этого мы докажем следующие утверждения:

- $S \subset \mathfrak{a}$;
- $\mathfrak{a}$ — σ-алгебра;
- сужение ν^* на $\mathfrak{a}$ счетно аддитивно;
- $\nu^*\,|_S = \nu$;
- ν^* — единственное продолжение, удовлетворяющее условиям теоремы.

Введем на множестве $T(\Omega)$ *полуметрику*: $\rho(A,B) = \nu^*(A \triangle B)$. Функция ρ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$ (очевидно).

2) $\rho(A,B) \geqslant 0$, причем $\rho(A,B) = 0 \not\Leftrightarrow A = B$.

3) $\rho(A,C) \leqslant \rho(A,B) + \rho(B,C)$ (неравенство треугольника): действительно, из определения внешней меры следует, что если $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, то $\nu^* A \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu^* A_j$, а т.к. $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$, то

$$\rho(A,C) = \nu^*(A \triangle C) \leqslant \nu^*(A \triangle B) + \nu^*(B \triangle C) = \rho(A,B) + \rho(B,C).$$

Заметим, что из свойства 3) следует, что

$$|\rho(A,C) - \rho(A,B)| \leqslant \rho(C,B).$$

В самом деле, положим $A = \varnothing$, тогда

$$|\rho(\varnothing, C) - \rho(\varnothing, B)| \leqslant \rho(C, B) \Leftrightarrow |\nu^* C - \nu^* B| \leqslant \nu^*(C \triangle B).$$

1. Докажем, что $S \subset \mathfrak{a}$. Действительно, $A \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C \in S : \rho(A, C) < \varepsilon$. Если $A \in S$, то положим $C = A$, тогда $\rho(A, C) = 0 < \varepsilon$ и $S \subset \mathfrak{a}$.

2. Докажем, что $\mathfrak{a}$ — алгебра. Понятно, что $\Omega \in \mathfrak{a}$, т.к. $\Omega \in S$. Необходимо проверить, что если $A, B \in \mathfrak{a}$, то $A \setminus B \in \mathfrak{a}$ и $A \cup B \in \mathfrak{a}$. Проверим только первую импликацию (вторая проверятся аналогично). Т.к. $A, B \in \mathfrak{a}$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_S, B_S \in S : \nu^*(A \triangle A_S) < \varepsilon/2$ и $\nu^*(B \triangle B_S) < \varepsilon/2$. Поскольку $(A \setminus B) \triangle (A_S \setminus B_S) \subset (A \triangle A_S) \cup (B \triangle B_S)$, то

$$\nu^*((A \setminus B) \triangle (A_S \setminus B_S)) \leqslant \nu^*(A \triangle A_S) + \nu^*(B \triangle B_S) < \varepsilon.$$

3. Докажем[1], что $\nu^* \mid_S = \nu$. Очевидно, что если $A \in S$, то $\nu^* A \leqslant \leqslant \nu A$. Докажем обратное неравенство. Если $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j$, то $\nu A \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu C_j$, поэтому $\nu A \leqslant \inf\limits_{A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu C_j = \nu^* A$. Отсюда получаем, что $\nu A = \nu^* A$.

Прежде чем двигаться дальше, докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Функция $\mu\colon S \to \mathbb{R}^+$ является мерой тогда и только тогда, когда $\forall A_1, A_2 \in S \quad \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu A_1 + \mu A_2$ и $\mu(\varnothing) = 0$.*

Доказательство. Сначала установим, что функция μ, удовлетворяющая условию леммы, будет мерой. Действительно, если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $\mu(A_1 \cup \cup A_2) = \mu A_1 + \mu A_2$.

Обратно, поскольку $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu A_2$, то

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu A_2 + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu A_1 + \mu A_2.$$

□

4. Докажем, что ν^* является мерой на $\mathfrak{a}$. Согласно лемме 3.1, достаточно доказать, что $\forall A, C \in \mathfrak{a} \quad \nu^*(A \cup C) + \nu^*(A \cap C) = \nu^* A + \nu^* C$. По определению, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_S, C_S \in S : \nu^*(A \triangle A_S) < \varepsilon$ и $\nu^*(C \triangle C_S) < \varepsilon$. Т.к. $(A \cup C) \triangle (A_S \cup C_S) \subset (A \triangle A_S) \cup (C \triangle C_S)$, то

$$\nu^*((A \cup C) \triangle (A_S \cup C_S)) \leqslant \nu^*(A \triangle A_S) + \nu^*(C \triangle C_S) < 2\varepsilon.$$

[1] Счетно аддитивность меры ν используется только в этом пункте.

Аналогично,

$$\nu^*((A \cap C) \bigtriangleup (A_S \cap C_S)) \leqslant \nu^*(A \bigtriangleup A_S) + \nu^*(C \bigtriangleup C_S) < 2\varepsilon.$$

По неравенству треугольника

$$|\nu^*(A \cup C) - \nu^*(A_S \cup C_S)| < 2\varepsilon \text{ и } |\nu^*(A \cap C) - \nu^*(A_S \cap C_S)| < 2\varepsilon,$$

$$|\nu^* A - \nu^* A_S| < \varepsilon \text{ и } |\nu^* C - \nu^* C_S| < \varepsilon.$$

Кроме того, поскольку $\nu^* A_S = \nu A_S$ и $\nu^* C_S = \nu C_S$, а также

$$\nu(A_S \cup C_S) + \nu(A_S \cap C_S) = \nu A_S + \nu C_S,$$

то

$$|\nu^*(A \cup C) + \nu^*(A \cap C) - \nu^* A - \nu^* C| < 6\varepsilon,$$

откуда $\nu^*(A \cup C) + \nu^*(A \cap C) = \nu^* A + \nu^* C$.

Теперь докажем счетно аддитивность. Очевидно, что если μ — мера на кольце S и при $A, A_j \in S$ из того, что $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ следует, что $\mu A \leqslant \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu A_j$, то мера μ счетно аддитивна. При $\mu = \nu^*$ получаем требуемое.

5. Докажем, что $\mathfrak{a}$ — σ-алгебра. Для этого достаточно проверить, что если $A_j \in \mathfrak{a}$, то $\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{a}$. Поскольку $\forall\, j \quad A_j \subset \Omega \in S \subset \mathfrak{a}$ и

$$\forall\, n \quad \Omega = \Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \sqcup \Big(\Omega \setminus \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big),$$

то в силу аддитивности получаем, что

$$\nu^*\Omega = \nu^*\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + \nu^*\Big(\Omega \setminus \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \nu^* A_j,$$

откуда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu^* A_j < \infty$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n : \nu^*\Big(\bigsqcup_{j=n}^{\infty} A_j\Big) \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} \nu^* A_j < \varepsilon.$$

Т.к. $\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{a}$, то $\exists C \in S : \nu^*\Big(\Big(\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j\Big) \triangle C\Big) < \varepsilon$. По неравенству треугольника получаем, что

$$\rho\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j, C\Big) \leqslant \rho\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j, \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + \rho\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j, C\Big) < 2\varepsilon,$$

поэтому $\bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{a}$.

6. Докажем единственность. Пусть μ — другое продолжение меры ν с S на $\mathfrak{a}$, удовлетворяющее условиям теоремы. Введем «расстояние»[2] на $\mathfrak{a}$: $\rho_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Тогда $|\mu A - \mu B| < \mu(A \triangle B)$.

Пусть $A \in \mathfrak{a}$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C \in S : |\nu^* A - \nu^* C| < \rho(A, C) < \varepsilon$. Поскольку $\rho_\mu(A, C) \leqslant \rho(A, C)$, то

$$|\mu A - \mu C| < \rho_\mu(A, C) \leqslant \rho(A, C) < \varepsilon.$$

Т.к. $\mu C = \nu C$, то по неравенству треугольника $|\nu^* A - \mu A| < 2\varepsilon$, поэтому $\mu A = \nu^* A$.

Осталось доказать неравенство $\rho_\mu(A_1, A_2) \leqslant \rho_\nu(A_1, A_2)$. В самом деле,

$$\rho_\nu(A_1, A_2) = \inf_{\bigcup\limits_j C_j \supset A_1 \triangle A_2} \sum \nu C_j,$$

но $\rho_\nu(A_1, A_2) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu C_j$, поэтому $\mu(A_1 \triangle A_2) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu C_j$ и

$$\rho_\mu(A_1, A_2) = \mu(A_1 \triangle A_2) \leqslant \inf \sum_j \nu C_j = \nu^*(A_1 \triangle A_2) = \rho_\nu(A_1, A_2).$$

$\square$

[2]На самом деле, это никакое не расстояние.

Лекция 4.

4. Измеримые пространства и пространства с мерой.

Определение 4.1. Пара $(\Omega, \mathfrak{a})$ называется *измеримым пространством*, если $\mathfrak{a}$ — это σ-алгебра подмножеств Ω. Элементы $\mathfrak{a}$ называются *измеримыми множествами.*

Тройка $(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ называется *пространством с мерой*, если ν — это счетно аддитивная мера на σ-алгебре $\mathfrak{a}$.

Замечание. Далее *все* меры мы будем считать счетно аддитивными и неотрицательными.

Определение 4.2. Пусть $(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ — пространство с мерой. Мера ν называется *σ-конечной*, если $\exists\, \Omega_j : \Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j$, причем $\Omega_j \in \mathfrak{a}$ и $\nu\Omega_j < \infty$.

Определение 4.3. Мера ν на σ-алгебре $\mathfrak{a}$ называется *полной*, если выполнено следующее условие: $\forall\, A \in \mathfrak{a}$ если $\nu A = 0$, то всякое подмножество A само измеримо (и тогда его мера также равна 0).

Предложение 4.1. *Продолженная мера $\bar{\nu}$ в теореме Каратеодори полна.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{a}$ и $\bar{\nu}A = 0$, тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, B \in S$: $\rho_\nu(A, B) < \varepsilon$ и $\nu^* A = 0$. Проверим, что если $C \subset A$, то $C \in \mathfrak{a}$ и $\nu^* C = 0$. Заметим, что если C измеримо, то $\nu^* C = \bar{\nu} C = 0$, т.к.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \nu^* C = \nu^*(C \bigtriangleup \varnothing) = \rho(C, \varnothing) < \varepsilon.$$

□

Предложение 4.2. *Если $(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ — пространство с мерой, то существует такое пространство с мерой $(\Omega, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\nu})$, что $\mathfrak{a} \subset \bar{\mathfrak{a}}$ и $\bar{\nu}$ — продолжение ν на $\bar{\mathfrak{a}}$, причем $\bar{\nu}$ — полная мера.*

Доказательство. В самом деле,

$$A \in \bar{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow \exists\, C \in \mathfrak{a} : \nu^*(A \bigtriangleup C) = 0, \quad \nu C = \bar{\nu} A.$$

□

Определение 4.4. В таком случае $\bar{\nu}$ называется *пополнением* ν.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{b}, \mu)$ — пространство с полной мерой, причем $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$, μ — продолжение ν на $\mathfrak{b}$, тогда $\mathfrak{b} \supset \bar{\mathfrak{a}}$ и μ — это продолжение меры $\bar{\nu}$. Т.е. пополнение меры является *минимальным* продолжением.

Пусть Ω — метрическое пространство.

Определение 4.5. *σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ борелевских подмножеств метрического пространства* называется σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами (или, что то же самое, σ-алгебра, порожденная замкнутыми множествами).

Предложение 4.3. *σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^1$*

1) совпадает с σ-алгеброй, порожденной всеми интервалами $(\alpha;\beta)$;

2) совпадает с σ-алгеброй, порожденной всеми отрезками $[\alpha;\beta]$;

3) совпадает с σ-алгеброй, порожденной всеми полуинтервалами вида $(\alpha;\beta]$ или $[\alpha;\beta)$;

4) совпадает с σ-алгеброй, порожденной всеми лучами $(-\infty;\alpha)$ или $(\alpha;+\infty)$;

5) совпадает с σ-алгеброй, порожденной всеми лучами $(-\infty;\alpha]$ или $[\alpha;+\infty)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что σ-алгебра, порожденная одним из указанных пяти способов, содержит все открытые интервалы.

1) $(\alpha;+\infty) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\alpha + \frac{1}{n};+\infty\right)$;

2) $(-\infty;\beta) = \mathbb{R}^1 \setminus [\beta;+\infty)$;

3) $(\alpha;\beta) = (-\infty;\beta) \cap (\alpha;+\infty)$;

4) $V \subset \mathbb{R}^1$, V открыто.

$\forall\, x \in V \quad \exists\,(\alpha;\beta) \subset V, x \in (\alpha;\beta)$. Немного уменьшив этот интервал, можно считать, что $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, поэтому V есть объединение (счетных) интервалов, т.е. σ-алгебра, порожденная множествами вида $[\beta;+\infty)$, совпадает с σ-алгеброй борелевский подмножеств. $\square$

Пусть мера ν задана на кольце S. Пусть $\mathfrak{a}$ — это совокупность ν^*-измеримых подмножеств. Можно проверить, что $\mathfrak{a}$ — это δ-кольцо. Построим $\bar{\mathfrak{a}}$: $A \in \bar{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow \forall\, C \in \mathfrak{a} \quad C \cap A \in \mathfrak{a}$.

Определение 4.6. Введем следующую функцию: $\bar{\bar{\nu}} A = \sup\limits_{C \in \mathfrak{a}} \bar{\nu}(A \cap C)$. Правда, $\bar{\bar{\nu}}\colon S \to [0;+\infty]$, т.е. $\bar{\bar{\nu}}$ может равняться бесконечности.

Примеры.

$\Omega = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{P}$ — полукольцо промежутков. Тогда $\bar{\bar{\nu}}\mathbb{R}^1 = \bar{\bar{\nu}}(\alpha; +\infty) = +\infty$.

Введем следующие обозначения: $\mathfrak{a}_L$ — это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств, ν_L — мера Лебега.

Предложение 4.4. $\forall\, A \in \mathfrak{a}_L\ \nu_L A > 0.\ \exists\, B \subset A : B \notin \mathfrak{a}_L$.

Предложение 4.5. $\forall\, A \in \mathfrak{a}_L, \nu_L > 0\ \exists\, B \subset A : \nu^* B = \nu_L A$ *и* $\nu^*(A \setminus B) = \nu_L A$.

Лекция 5.

Рассмотрим пространство с мерой $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{a}, \nu)$.

Лемма 4.1. $\forall\, A \in \mathfrak{a}$, $\nu A > 0 \quad \exists\, a \neq b \in A : |a - b| \in \mathbb{Q}$.

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}^1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-n; n]$, то $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A \cap [-n; n]$ и

$$0 < \nu A \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap [-n; n]).$$

Значит, найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\nu(A \cap [-n; n]) > 0$. Положим $A_n = A \cap [-n; n]$.

Допустим, что в A_n нет точек с рациональным расстоянием. Тогда верно следующее утверждение: $\forall\, a \neq b \in \mathbb{Q} \quad (A_n + a) \cap (A_n + b) = \varnothing$. В самом деле, если $\exists\, c \in (A_n + a) \cap (A_n + b)$, то $\exists\, r_1, r_2 \in A_n : r_1 = c - a$ и $r_2 = c - b$, откуда $r_1 - r_2 = b - a \in \mathbb{Q}$ — противоречие.

Поскольку $\bigsqcup\limits_{r \in \mathbb{Q} \cap [0; n]} (A_n + r) \subset [-n; 2n]$, то

$$\infty = \sum \nu A_n = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0; n]} \nu(A_n + r) \leqslant \nu([-n; 2n]) = 3n$$

— противоречие. $\square$

Предложение 4.6. $\forall\, C \in \mathfrak{a}$, $\nu C > 0 \quad \exists\, D \subset C : D \notin \mathfrak{a}$.

Доказательство. Введем на множестве C отношение эквивалентности: $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow |a_1 - a_2| \in \mathbb{Q}$. Тогда множество C разбивается на классы эквивалентности: $C = \bigcup\limits_{\alpha} C_\alpha$. Выберем в каждом C_α по одной точке и обозначим это множество точек через D, т.е. $\forall\,\alpha \quad D \cap C_\alpha = \{a_\alpha\}$.

Докажем, что множество D неизмеримо. Предположим противное: пусть $D \in \mathfrak{a}$. Ясно, что расстояние между любыми его точками иррационально, поэтому по лемме 4.1 $\nu D = 0$.

Поскольку $\forall\, a \neq b \in \mathbb{Q} \quad (D + a) \cap (D + b) = \varnothing$, то $C \subset \bigsqcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} (D + r)$, поэтому $\nu C \leqslant \sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} \nu(D + r) = 0$, т.к. $\forall\, r \in \mathbb{Q} \quad \nu(D + r) = \nu D = 0$. Но $\nu C > 0$ по условию — противоречие. $\square$

5. Измеримые функции.

Определение 5.1. Пусть $(\Omega_1, \mathfrak{a}_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{a}_2)$ — измеримые пространства. Функция $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ называется *измеримой*, если $\forall\, A \in \mathfrak{a}_2 \quad f^{-1}A \in \mathfrak{a}_1$.

Возьмем в качестве $(\Omega_2, \mathfrak{a}_2)$ пару $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B})$. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$ называется *измеримой*, если $\forall\, B \in \mathfrak{B} \quad f^{-1}B \in \mathfrak{a}$.

Замечание. В последнем определении множество $\mathfrak{B}$ нельзя заменить на $\mathfrak{a}_L$.

Предложение 5.1 (Критерий измеримости)**.** *Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$ измерима* $\Leftrightarrow \forall\, a \in \mathbb{R}^1 \quad \{x : f(x) < a\} \in \mathfrak{a}$.[3]

Доказательство. Пусть функция f измерима. Тогда $\{x : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty; a))$. Поскольку $\forall\, a \quad (-\infty; a) \in \mathfrak{B}$, то $\{x : f(x) < a\} \in \mathfrak{a}$.

Обратно, рассмотрим множество $\sigma = \{B \subset \mathbb{R}^1 : f^{-1}B \in \mathfrak{a}\}$. Легко видеть, что σ — это σ-алгебра: если $B_1, B_2 \in \sigma \Rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}B_1 \cup f^{-1}B_2 \in \mathfrak{a} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \sigma$; $f^{-1}(\mathbb{R}^1) = \Omega \in \mathfrak{a} \Rightarrow \mathbb{R}^1 \in \sigma$.

$\forall\, a \quad f^{-1}((-\infty; a)) \in \mathfrak{a} \Rightarrow \forall\, a \quad (-\infty; a) \in \sigma$. Поскольку $\sigma(\{(-\infty; a) : a \in \mathbb{R}^1\}) = \mathfrak{B} = \sigma(\mathbb{R}^1)$, то $\sigma \supset \mathfrak{B}$, а значит, $\forall\, B \in \mathfrak{B} \quad f^{-1}B \in \mathfrak{a}$. $\square$

[3] В условии этой теоремы можно заменить знак «$<$» на знаки «$\leqslant$», «$>$», «$\geqslant$», но НЕ на знак «$=$».

Определение 5.2. Если $\Omega = \mathbb{R}^1$, то удобно взять $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_L$. Тогда функция $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ называется *измеримой по Лебегу*, если $\forall\, a \in \mathbb{R}^1 \quad \{x \in \mathbb{R}^1 : f(x) < a\} \in \mathfrak{a}_L$.[4]

Пусть теперь $f\colon (\Omega, \mathfrak{a}) \to (\mathbb{R}^1, \mathfrak{B})$.

Предложение 5.2. *Пусть* $\forall\, \omega \in \Omega \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$*, где* f_n *— измеримые функции. Тогда функция* f *тоже измерима.*

Доказательство. Положим $\varphi_k(\omega) = \sup\limits_{n\geqslant k} f_n(\omega)$, тогда $f(\omega) = \inf\limits_k \varphi_k(\omega)$. Докажем, что $\forall\, a \in \mathbb{R}^1 \quad \{\omega \in \Omega : \varphi_k(\omega) < a\} \in \mathfrak{a}$. В самом деле,

$$\{\omega : \varphi_k(\omega) < a\} = \bigcap_{n\geqslant k}\{\omega : f_n(\omega) < a\} \in \mathfrak{a},$$

поэтому все φ_k измеримы. Поскольку $f(\omega) = \inf\limits_k \varphi_k(\omega)$ и $\{\omega : \inf\limits_k \varphi_k(\omega) > a\} = \bigcap\limits_k \{\omega : \varphi_k(\omega) > a\} \in \mathfrak{a}$, то $f(\omega)$ измерима. □

Лекция 6.

Определение 5.3. Пусть фиксировано измеримое пространство $(\Omega, \mathfrak{a})$. Функция на измеримом пространстве называется *простой*, если она принимает конечное число значений.

Если простая функция определена на пространстве с мерой, то $\nu\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq 0\} < \infty$.

Предложение 5.3. *Функция* f *является простой* $\Leftrightarrow$

$$\exists\, \Omega_j : \Omega = \bigsqcup_{j=1}^{n} \Omega_j \quad \text{и} \quad \forall\, \omega \quad f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_j \gamma_{\Omega_j}(\omega),$$

где

$$\gamma_{\Omega_j}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in \Omega_j; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

— индикаторная функция множества Ω_j.

[4] Множество $\mathfrak{a}_L$ нельзя заменить на $\mathfrak{B}$.

Доказательство. В самом деле, обратная ипмликация очевидна. Пусть теперь функция f проста и $a_1, \dots, a_n$ — различные ненулевые значения f. Тогда множества $\Omega_j = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = a_j\}$ удовлетворяют условию. $\square$

Замечание. Условие «$\Omega = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j$» можно заменить на условие «$\forall\, j \neq k \quad \Omega_j \cap \Omega_k = \varnothing$».

Очевидно, что если f_1 и f_2 — простые функции, то их линейная комбинация $\alpha f_1 + \beta f_2$ и произведение $f_1 f_2$ также будут простыми функциями.

Предложение 5.4. *Если функция* $f(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \gamma_{\Omega_j}(\omega)$, *причем* $\forall\, j \neq k \quad \Omega_j \cap \Omega_k = \varnothing$ *и* $a_j \neq a_k$, *то* f *измерима* $\Leftrightarrow$ *все* Ω_j *измеримы.*

Доказательство. Достаточно провести доказательство для простейшей функции $f(\omega) = \gamma_{\Omega_1}(\omega)$. Имеем: $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$, поэтому

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^1 \quad \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > a\} = \begin{cases} \Omega_1, & \text{если } a \geqslant 0; \\ \Omega, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

а значит, f измерима $\Leftrightarrow$ Ω_1 измеримо. $\square$

Теорема 5.1. *Для каждой измеримой функции* $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ *найдутся простые и измеримые функции* $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$, $n = 1, 2, \dots$, *такие, что* $\forall\, \omega \in \Omega \quad f_n(\omega) \to f(\omega)$ *при* $n \to \infty$. *Если при этом* $f \geqslant 0$, *то можно добиться того, что* $f_n \geqslant 0$ *и* $f_n \nearrow f$, *а если* f *ограничена, то* $f_n \rightrightarrows f$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что функции

$$f_n(x) = n \cdot \gamma_{\{\omega \mid f(\omega) \geqslant n\}}(x) + (-n) \cdot \gamma_{\{\omega \mid f(\omega) \leqslant -n\}}(x) + \\ + \frac{1}{2^n} \sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n} (k-1) \gamma_{\{\omega \mid \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(\omega) < \frac{k}{2^n}\}}(x)$$

удовлетворяют условию теоремы. $\square$

Предложение 5.5. *Если функции* f *и* g *измеримы, то их линейная комбинация* $\alpha f + \beta g$ *измерима.*

Доказательство. В самом деле, если функции h_1 и h_2 просты и измеримы, то и функция $h = h_1 + h_2$ тоже проста и измерима. Выберем теперь функции f_n и g_n, удовлетворяющие условиям теоремы 5.1, тогда $f_n \to f$ и $g_n \to g$, поэтому $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ при $n \to \infty$, что и требовалось. $\square$

6. Интегрируемые функции.

Определение 6.1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ — пространство с σ-конечной мерой и f — простая измеримая функция. Тогда $f(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \gamma_{\Omega_j}(\omega)$, причем $\forall\, j \quad \nu\Omega_j < \infty$ и $a_j \in \mathbb{R}^1$. *Интегралом Лебега функции f по пространству Ω* называется величина

$$\int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\,d\nu = \sum_{j=1}^{n} a_j \nu\Omega_j.$$

Определение 6.2. Пусть теперь функция $f \geqslant 0$ — измерима. Тогда найдутся такие простые измеримые функции f_n, что $f_n \nearrow f$. Положим

$$\int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n(\omega)\,\nu(d\omega).$$

Определение 6.3. Если f — произвольная измеримая функция, то верно равенство $f(\omega) = f_+(\omega) - f_-(\omega)$, где

$$f_+(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \text{если } f(\omega) \geqslant 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{и} \quad f_-(\omega) = \begin{cases} -f(\omega), & \text{если } f(\omega) \leqslant 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что функции $f_\pm$ измеримы. Положим

$$\int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f_+(\omega)\,\nu(d\omega) - \int\limits_{\Omega} f_-(\omega)\,\nu(d\omega),$$

если хотя бы один из интегралов конечен.

Если интеграл конечен, то функция f называется *интегрируемой*, а если равен ∞, то *квазиинтегрируемой*.

Определение 6.4. Если $A \in \mathfrak{a}$, то

$$\int\limits_A f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega \gamma_A(\omega) f(\omega)\,\nu(d\omega).$$

Лемма 6.1. *Пусть S — кольцо, (Ω, S, ν) – пространство с конечной мерой. Тогда мера ν счетно аддитивна* $\Leftrightarrow$

$$\forall\, A_1 \supset A_2 \supset \ldots \in S : \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \varnothing \Rightarrow \nu A_j \to 0 \quad \textit{при } j \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $S \ni B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где $B_j \in S$. Докажем, что $\nu B = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu B_j$. Положим $A_k = \bigsqcup\limits_{j=k}^{\infty} B_j$, тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$. Значит $\nu A_k \to 0$ при $k \to \infty$, и т.к.

$$\nu B = \sum_{j=1}^{k-1} \nu B_j + \nu A_k,$$

то

$$\sum_{j=1}^{k-1} \nu B_j \to \nu B \quad \text{при } k \to \infty.$$

Обратно, пусть мера ν счетно аддитивна. Тогда

$$\bigsqcup_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus A_{j+1}) = A \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1,$$

поэтому

$$\nu A_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j \setminus A_{j+1}) = \sum_{j=1}^{k-1} \nu(A_j \setminus A_{j+1}) + \sum_{j=k}^{\infty} \nu(A_j \setminus A_{j+1}),$$

а значит,

$$\sum_{j=k}^{\infty} \nu(A_j \setminus A_{j+1}) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Поскольку

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \bigsqcup_{j=k}^{\infty} (A_j \setminus A_{j+1}) = A_k,$$

то

$$\nu A_k = \sum_{j=k}^{\infty} \nu(A_j \setminus A_{j+1}) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

что и требовалось. □

Лекция 7.

Замечание. Далее, всюду, где мы будем писать $\int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega)$, мы будем предполагать функцию f измеримой.

Пусть фиксировано пространство с мерой $(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$. Сейчас мы будем рассматривать только те простые функции f, для которых $\nu\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq 0\} < \infty$.

После того, как мы ввели понятие интеграла Лебега, необходимо доказать корректность этого определения.

Вначале докажем корректность определения интеграла Лебега для простых функций. А именно, пусть $f(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \gamma_{A_j}(\omega)$ — простая функция, причем $A_i \cap A_j = \varnothing$. Возьмем другое представление функции f: $f(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \gamma_{B_k}(\omega)$. Если $A_j \cap B_k \neq \varnothing$, то $a_j = b_k$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \nu A_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m} \nu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_k \nu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k \nu B_k.$$

Свойства.[5]

1. $\int\limits_{\Omega}(f(\omega) + g(\omega))\,\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega) + \int\limits_{\Omega} g(\omega)\,\nu(d\omega)$. Действительно, пусть $f(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \gamma_{A_j}(\omega)$ и $g(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \gamma_{B_k}(\omega)$. Тогда, поскольку $A_j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} A_j \cap B_k$ и $\gamma_{A_j}(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{A_j \cap B_k}(\omega)$, то

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \gamma_{A_j \cap B_k}(\omega) \quad \text{и} \quad g(\omega) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_k \gamma_{A_j \cap B_k}(\omega).$$

[5] В свойствах 1–3 функции f и g считаются неотрицательными и простыми.

Отсюда

$$\int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j \nu(A_j \cap B_k), \quad \int\limits_{\Omega} g(\omega)\,\nu(d\omega) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_k \nu(A_j \cap B_k),$$

поэтому

$$\int\limits_{\Omega} (f(\omega) + g(\omega))\,\nu(d\omega) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k)\nu(A_j \cap B_k) = \\ = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega) + \int\limits_{\Omega} g(\omega)\,\nu(d\omega).$$

2. $\int\limits_{\Omega} \alpha f(\omega)\,\nu(d\omega) = \alpha \int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega)$.

3. Если $\nu A = 0$, то $\int\limits_{A} f(\omega)\,\nu(d\omega) = 0$. Действительно, $\int\limits_{A} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\gamma_A(\omega)\,\nu(d\omega)$. Если $f(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \gamma_{A_j}(\omega)$, то тогда $f(\omega)\gamma_A(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \gamma_{A \cap A_j}(\omega)$ и $\int\limits_{A} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \nu(A \cap A_j) = 0$.

4. Если $f(\omega) \geqslant 0$, то $\int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant 0$. Отсюда следует, что если $g_1 \leqslant g_2$, то $\int\limits_{\Omega} g_1(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \int\limits_{\Omega} g_2(\omega)\,\nu(d\omega)$. Действительно. $g_2 = (g_2 - g_1) + g_1$, поэтому

$$\int\limits_{\Omega} g_2(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} (g_2 - g_1)(\omega)\,\nu(d\omega) + \int\limits_{\Omega} g_1(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant \int\limits_{\Omega} g_1(\omega)\,\nu(d\omega).$$

5. Если $\mathfrak{a} \ni B = B_1 \sqcup B_2$, то $\int\limits_{B} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{B_1} f(\omega)\,\nu(d\omega) + \int\limits_{B_2} f(\omega)\,\nu(d\omega)$. Действительно, это следует из того, что

$$\int\limits_{B} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\gamma_B(\omega)\,\nu(d\omega),$$

$$\int\limits_{B_1} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\gamma_{B_1}(\omega)\,\nu(d\omega),$$

$$\int\limits_{B_2} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\gamma_{B_2}(\omega)\,\nu(d\omega),$$

а также из того, что $\gamma_{B_1 \sqcup B_2} = \gamma_{B_1} + \gamma_{B_2}$.

6. Если $g_n(\omega) \nearrow \varphi(\omega)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\omega) \geqslant \varphi(\omega)$, где функция $\varphi \geqslant 0$ проста, а функции g_n являются простыми и измеримыми, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant$ $\geqslant \int\limits_\Omega \varphi(\omega)\,\nu(d\omega)$.

Доказательство. Пусть $\Omega_\varphi = \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) > 0\}$, тогда $\nu\Omega_\varphi < \infty$. Пусть $0 < \varepsilon < \min\limits_{\omega\in\Omega_\varphi}\{\varphi(\omega)\}$. Тогда положим

$$F_\varphi(\omega) = \begin{cases} \varphi(\omega) - \varepsilon, & \text{если } \omega \in \Omega_\varphi, \\ 0, & \text{если } \varphi(\omega) = 0. \end{cases}$$

Введем также обозначение $A_n^\varepsilon = \{\omega \in \Omega_\varphi \mid g_n(\omega) > F_\varphi(\omega)\}$. Тогда понятно, что $\Omega_\varphi \setminus A_n^\varepsilon = \{\omega \in \Omega_\varphi \mid g_n(\omega) \leqslant F_\varphi(\omega)\}$. Легко видеть, что $A_1^\varepsilon \subset A_2^\varepsilon \subset \ldots$, поэтому $(\Omega_\varphi \setminus A_1^\varepsilon) \supset (\Omega_\varphi \setminus A_2^\varepsilon) \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^\infty (\Omega_\varphi \setminus A_n^\varepsilon) = \varnothing$. Отсюда в силу счетной аддитивности и леммы 6.1 $\nu(\Omega_\varphi \setminus A_n^\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теперь выпишем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) &\geqslant \int\limits_{\Omega_\varphi} g_n(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_{A_n^\varepsilon} g_n(\omega)\,\nu(d\omega) + \int\limits_{\Omega_\varphi\setminus A_n^\varepsilon} g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant \\
&\geqslant \int\limits_{A_n^\varepsilon} F_\varphi(\omega)\,\nu(d\omega) + \int\limits_{\Omega_\varphi\setminus A_n^\varepsilon} g_n(\omega)\,\nu(d\omega) = \\
&= \int\limits_{\Omega_\varphi} F_\varphi(\omega)\,\nu(d\omega) - \int\limits_{\Omega_\varphi\setminus A_n^\varepsilon} F_\varphi(\omega)\,\nu(d\omega) + \int\limits_{\Omega_\varphi\setminus A_n^\varepsilon} g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant \\
&\geqslant \int\limits_{\Omega_\varphi} F_\varphi(\omega)\,\nu(d\omega) - \int\limits_{\Omega_\varphi\setminus A_n^\varepsilon} F_\varphi(\omega)\,\nu(d\omega) = \\
&= \int\limits_{\Omega_\varphi} \varphi(\omega)\,\nu(d\omega) - \varepsilon\nu\Omega_\varphi - \int\limits_{\Omega_\varphi\setminus A_n^\varepsilon} F_\varphi(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant \\
&\geqslant \int\limits_\Omega \varphi(\omega)\,\nu(d\omega) - \varepsilon\nu\Omega_\varphi - \nu(\Omega_\varphi \setminus A_n^\varepsilon)\cdot\max\varphi(\omega).
\end{aligned}$$

Но $\nu(\Omega_\varphi \setminus A_n^\varepsilon) \cdot \max \varphi(\omega) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant$ $\geqslant \int\limits_\Omega \varphi(\omega)\,\nu(d\omega) - \varepsilon\nu\Omega_\varphi$, откуда следует требуемое неравенство. $\square$

Теперь докажем корректность определения интеграла для произвольных неотрицательных измеримых функций. Пусть $f \geqslant 0$ — данная функция, $g_n^1(\omega) \nearrow f(\omega)$ и $g_n^2(\omega) \nearrow f(\omega)$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n^1(\omega)\,\nu(d\omega) =$ $= \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\Omega g_k^2(\omega)\,\nu(d\omega)$. Действительно, при каждом n по свойству 6 имеем: $\int\limits_\Omega g_n^1(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\Omega g_k^2(\omega)\,\nu(d\omega)$, откуда получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n^1(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant$ $\leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\Omega g_k^2(\omega)\,\nu(d\omega)$. Аналогично можно получить обратное неравенство, поэтому оба предела совпадают.

Отсюда легко получить корректность определения интеграла Лебега для произвольных измеримых функций.

Определение 6.5. Две измеримые функции f и g на пространстве с мерой называются *эквивалентными*, если $\nu\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\} = 0$.

Определение 6.6. Говорят, что какое-то свойство *имеет место почти всюду*, если оно верно всюду, кроме множества меры 0. Например, если $f = g$ почти всюду, то $\int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega g(\omega)\,\nu(d\omega)$.

Замечание. В дальнейшем мы обычно будем опускать слова «почти всюду», но принципиально от этого ничего не изменится.

Теорема 6.1 (Леви). *Пусть $g_n \geqslant 0$ и $g_n \nearrow f$ почти всюду. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega)$.*

Замечание. В условии теоремы можно считать, что $g_n \geqslant g$, где функция g интегрируема.

Доказательство. По теореме 5.1 $\forall\, g_i \quad \exists\, g_{ij} \nearrow g_i$ при $j \to \infty$, причем функции $g_{ij} \geqslant 0$ просты и измеримы. Пусть $\psi_n(\omega) = \max\{g_{ij}(\omega) \mid 1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Докажем. что $\psi_n(\omega) \nearrow f(\omega)$.

Ясно, что $\psi_n(\omega) \leqslant g_n(\omega) \leqslant g_k(\omega)$ при $k > n$. Отсюда получаем, что $\psi_n(\omega) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} g_k(\omega) = f(\omega)$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(\omega) \leqslant f(\omega)$.

Обратно, $\forall\, n \geqslant k \quad \psi_n(\omega) \geqslant g_{kn}(\omega)$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(\omega) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} g_{kn}(\omega) =$ $= g_k(\omega)$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(\omega) \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} g_k(\omega) = f(\omega)$.

Теперь, т.к. $\psi_n(\omega) \leqslant g_n(\omega)$, то $\int\limits_\Omega \psi_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega)$ и $\psi_n(\omega) \nearrow$ $\nearrow f(\omega)$, то по определению интеграла Лебега получаем $\int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \psi_n(\omega)\,\nu(d\omega)$. Но

$$\int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant \int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant \int\limits_\Omega \psi_n(\omega)\,\nu(d\omega),$$

откуда по теореме о двух милиционерах следует требуемое. $\square$

Лекция 8.

Прежде чем двигаться дальше, введем следующие важные обозначения:

1) $\bar{\mathcal{L}}_0(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ — множество почти всюду определенных измеримых функций;

2) $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ — множество классов почти всюду определенных измеримых функций;

3) $\bar{\mathcal{L}}_1(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ — множество почти всюду определенных интегрируемых функций;

4) $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ — множество классов почти всюду определенных интегрируемых функций.

Здесь необходимо дать несколько новых определений.

Определение 6.7. Пусть $A \in \mathfrak{a}$ и $\nu A > 0$. Рассмотрим пространство с мерой $(A, \mathfrak{a} \cap A = \{C \cap A \mid C \in \mathfrak{a}\}, \nu\,|_{\mathfrak{a}\cap A})$. Оно называется *подпространством с мерой* пространства с мерой $(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$.

Пусть теперь функция f определена почти всюду, $f\colon A \to \mathbb{R}^1$, где $A \in$ $\in \mathfrak{a}$ и $\nu(\Omega \setminus A) = 0$. Функция f называется *измеримой*, если она измерима на $(A, \mathfrak{a} \cap A, \nu\,|_{\mathfrak{a}\cap A})$.

Функции f и g называются *эквивалентными* (обозначение: $f \sim g$), если

$$\nu\{\omega \mid f(\omega) \text{ и } g(\omega) \text{ существуют и } f(\omega) \neq g(\omega)\} = 0.$$

Замечание. В дальнейшем мы будем писать просто $\mathcal{L}$, без указания аргументов. Кроме того, когда мы будем писать $f \in \mathcal{L}_1$, то чаще всего под этим мы будем подразумевать не класс эквивалентности, а конкретный представитель этого класса.

Теорема 6.2 (Фату–Лебег)**.** *1. Пусть* $\varphi \in \bar{\mathcal{L}}_1$ *и* $\varphi(\omega) \leqslant f_n(\omega)$*. Тогда* $\int\limits_\Omega \underline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \underline{\lim} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega)$*.*

2. Пусть $\psi \in \bar{\mathcal{L}}_1$ *и* $\psi(\omega) \geqslant f_n(\omega)$ *при всех* n*. Тогда* $\int\limits_\Omega \overline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant$ $\geqslant \overline{\lim} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega)$*.*

Доказательство. 1. Положим $g_n(\omega) = \inf\limits_{k\geqslant n} f_k(\omega)$. Тогда $\varphi(\omega) \leqslant g_1(\omega) \leqslant$ $\leqslant g_2(\omega) \leqslant \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\omega) = \underline{\lim} f_n(\omega)$, откуда по теореме Леви получаем, что $\int\limits_\Omega \underline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega)$.

Проверим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \underline{\lim} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega)$. $\forall\, n \leqslant k \quad g_n(\omega) \leqslant$ $\leqslant f_k(\omega)$, откуда $\int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \int\limits_\Omega f_k(\omega)\,\nu(d\omega)$. Значит, $\int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant$ $\leqslant \inf\limits_{k\geqslant n} \int\limits_\Omega f_k(\omega)\,\nu(d\omega)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} \int\limits_\Omega f_k(\omega)\,\nu(d\omega) = \underline{\lim} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega).$$

2. Положим $f_n^1(\omega) = -f_n(\omega)$ и $\varphi(\omega) = -\psi(\omega)$. Тогда утверждение легко следует из п.1. □

Теорема 6.3 (Лебег)**.** *Пусть* $f_n(\omega) \to f(\omega)$ *и* $|f_n(\omega)| \leqslant \varphi(\omega)$*, где* $\varphi \in \mathcal{L}_1$*. Тогда* $f \in \mathcal{L}_1$ *и* $\int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega)$*.*

Замечание. Условие теоремы можно ослабить, а именно достаточно потребовать только сходимость функций f_n по мере.

Доказательство. Очевидно, что $|f(\omega)| \leqslant \varphi(\omega)$, поэтому $f \in \mathcal{L}_1$. Поскольку $\underline{\lim} f_n(\omega) = \overline{\lim} f_n(\omega) = f(\omega)$, то

$$\int\limits_\Omega \underline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega \overline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega),$$

и по теореме Фату–Лебега

$$\overline{\lim} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \int\limits_\Omega \overline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega) =$$
$$= \int\limits_\Omega \underline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \underline{\lim} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega),$$

откуда и получаем требуемое. $\square$

Теорема 6.4 (Фату). *Пусть* $0 \leqslant f_n(\omega) \to f(\omega)$ *и* $\int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant C$, *где* $C > 0$. *Тогда* $f \in \mathcal{L}_1$ *и* $\int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant C$.

Доказательство. По теореме Фату–Лебега получаем $\int\limits_\Omega \underline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant$ $\leqslant \underline{\lim} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega)$, поэтому

$$\int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega \underline{\lim} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant \underline{\lim} \int\limits_\Omega f_n(\omega)\,\nu(d\omega) \leqslant C,$$

что и требовалось. $\square$

Замечание. В теореме Фату нельзя переходить к пределу так же, как и в теореме Лебега: например, можно взять $\Omega = [0; 1]$ и

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n - 4n^2|x - \frac{1}{2n}|, & \text{если } x \in [0; 1/n], \\ 0, & \text{если } x \in [1/n; 1]. \end{cases}$$

Кроме того, ограничение «$f_n \geqslant 0$» существенно: опять можно взять $\Omega = [0; 1]$ и «перевернуть» функции f_n, сдвинув их немного вверх.

Лекция 9.

Теорема 6.5 (неравенство Чебышева). *Пусть функция* $f(\omega) \geqslant 0$, *тогда* $\nu\{\omega \mid f(\omega) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega)$.

Доказательство. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_\Omega f(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant \int\limits_{\{\omega \mid f(\omega) \geqslant c\}} f(\omega)\,\nu(d\omega) \geqslant \int\limits_{\{\omega \mid f(\omega) \geqslant c\}} c\,\nu(d\omega) = c\nu\{\omega \mid f(\omega) \geqslant c\},$$

что и требовалось. $\square$

Следствие 6.1. *Пусть* $f_n(\omega) \geqslant 0$ *и* $\exists\, f(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$. *Тогда*

$$\exists \int\limits_{\Omega} f(\omega)\,\nu(d\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} f_n(\omega)\,\nu(d\omega).$$

В частности, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) < \infty$, *то сумма ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ *почти всюду конечна.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы Леви. Докажем второе утверждение. Для этого достаточно доказать, что если $g(\omega) \geqslant 0$ и $C_g = \int\limits_{\Omega} g(\omega)\,\nu(d\omega) < \infty$, то функция g конечна почти всюду. Поскольку $\{\omega \mid g(\omega) = \infty\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid g(\omega) \geqslant n\}$ и $\nu\{\omega \mid g(\omega) \geqslant n\} \leqslant \leqslant \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} g(\omega)\,\nu(d\omega) = \frac{C_g}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ (по неравенству Чебышева), то

$$\nu\{\omega \mid g(\omega) = \infty\} = \nu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid g(\omega) \geqslant n\}\Big) = 0,$$

что и требовалось. $\square$

Примеры.

Пусть $\Omega = [0;1]$ и $r_n \in \mathbb{Q} \cap [0;1]$ — n-е рациональное число из Ω. Возьмем функции $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - r_n|}}$ и рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$. Очевидно, что $\exists\, C > 0 : \int\limits_{\Omega} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) < C$, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2^n} f_n(\omega)\,\nu(d\omega) < C < \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$ сходится почти всюду.

7. Сходимость по мере.

Определение 7.1. Пусть фиксировано пространство с мерой $(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$ и функции f_n измеримы. Тогда f_n *сходится к функции* f *по мере*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \nu\{\omega \mid |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначение: $f_n \underset{\nu}{\to} f$.

Теорема 7.1. *Если* $f_n \underset{\nu}{\to} f$, *то* $\exists\, f_{n_k} : f_{n_k} \to f$ *почти всюду. Если мера* ν *конечна, то всякая почти всюду сходящаяся последовательность сходится по мере.*

Доказательство. Если $f_j(\omega) \to f(\omega)$, то

$$\forall\, n\, \exists\, k : \forall\, r > k \quad |f_r(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{n},$$

поэтому

$$A = \{\omega \mid f_j(\omega) \to f(\omega)\} = \bigcap_n \bigcup_k \bigcap_{r>k} \{\omega \mid |f_r(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{n}\}$$

и

$$B = \Omega \setminus A = \{\omega \mid f_j(\omega) \nrightarrow f(\omega)\} = \bigcup_n \bigcap_k \bigcup_{r \geqslant k} \{\omega \mid |f_r(\omega) - f(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\}.$$

Необходимо выбрать такие f_{r_j}, чтобы $\nu B = 0$. Но если $\nu B = 0$, то

$$\forall\, n \quad \nu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j \geqslant k} \{\omega \mid |f_{r_j}(\omega) - f(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\}\Big) = 0,$$

т.е.

$$\nu\Big(\bigcup_{j \geqslant k} \{\omega \mid |f_{r_j}(\omega) - f(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\}\Big) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Пусть теперь

$$\forall\, n \quad \nu\{\omega \mid |f_r(\omega) - f(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\} \to 0 \quad \text{при } r \to \infty.$$

Выберем ε_j так, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \infty$ (например, можно взять $\varepsilon_j = 2^{-j}$). Для каждого j выберем r_j так, чтобы $\nu\{\omega \mid |f_{r_j}(\omega) - f(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\} < \varepsilon_j$, тогда

$$\nu\Big(\bigcup_{j \geqslant k} \{\omega \mid |f_{r_j}(\omega) - f(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\}\Big) \leqslant \sum_{j \geqslant k} \nu\{\omega \mid |f_{r_j}(\omega) - f(\omega)| \geqslant \frac{1}{n}\} <$$

$$< \sum_{j \geqslant k} \varepsilon_j \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

т.к. ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j$ сходится. Поэтому если $\nu\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant k}\{\omega\mid |f_{r_j}(\omega)-f(\omega)|\geqslant\frac{1}{n}\}\Big)\to 0$, то $\nu\{\omega\mid |f_k(\omega)-f(\omega)|\geqslant\frac{1}{n}\}\to 0$ при $k\to\infty$, откуда следует сходимость по мере. □

Примеры.

1. Пусть $\Omega=\mathbb{R}^1$, а функции f_n таковы, что

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant n;\\ 1, & \text{если } x>n\end{cases}.$$

Тогда $f_n(x)\to 0$, но $\nu\{x\mid |f_n(x)-0|>\frac{1}{2}\}=\nu[n;\infty)=\infty$, поэтому сходимости по мере нет.

2. Пусть $\Omega=\mathbb{T}$ и $\varepsilon_j>0$, причем $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j=\infty$ и $\varepsilon_j\to 0$ (например, можно взять $\varepsilon_j=j^{-1}$). Положим

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in[\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1};\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n],\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Тогда $f_n(x)$ сходится по мере, но нигде не сходится.

Теорема 7.2. *Если функция f интегрируема по Риману на множестве $\Omega=[0;1]$, то она интегрируема и по Лебегу, причем значения интегралов совпадают.*

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$f_n^s=\sum_{j=1}^{2^n}\frac{s_j}{2^n},\quad f_n^i=\sum_{j=1}^{2^n}\frac{i_j}{2^n},$$

где

$$s_j=\sup_{t\in\left[\frac{j-1}{2^n};\frac{j}{2^n}\right)}f(t),\quad i_j=\inf_{t\in\left[\frac{j-1}{2^n};\frac{j}{2^n}\right)}f(t).$$

Положим также

$$\bar{f}_n(t)=\sum_{j=1}^{2^n}s_j\gamma_{\left[\frac{j-1}{2^n};\frac{j}{2^n}\right)}(t),\quad \underline{f}_n(t)=\sum_{j=1}^{2^n}i_j\gamma_{\left[\frac{j-1}{2^n};\frac{j}{2^n}\right)}(t).$$

Легко видеть, что

$$\sup_{t\in[0;1]} f(t) \geqslant \bar{f}_1 \geqslant \bar{f}_2 \geqslant \ldots \geqslant f \geqslant \ldots \geqslant \underline{f}_2 \geqslant \underline{f}_1 \geqslant \inf_{t\in[0;1]} f(t).$$

Значит, $\exists \lim\limits_{j\to\infty} \bar{f}_j = \bar{f}$ и $\exists \lim\limits_{j\to\infty} \underline{f}_j = \underline{f}$, причем $\sup\limits_{t\in[0;1]} f(t) \geqslant \bar{f} \geqslant f \geqslant \underline{f} \geqslant$ $\geqslant \inf\limits_{t\in[0;1]} f(t)$. Поэтому по теореме Лебега можно перейти к пределу под интегралами $\int\limits_{[0;1]} \bar{f}_n(t)\,dt = f_n^s$ и $\int\limits_{[0;1]} \underline{f}_n(t)\,dt = f_n^i$:

$$(R)\int\limits_{[0;1]} f(t)\,dt = \int\limits_{[0;1]} \bar{f}_n(t)\,dt \to \int\limits_{[0;1]} f(t)\,dt \leftarrow \int\limits_{[0;1]} \underline{f}_n(t)\,dt = (R)\int\limits_{[0;1]} f(t)\,dt,$$

откуда

$$\int\limits_{[0;1]} \bar{f}_n(t)\,dt = (R)\int\limits_{[0;1]} f(t)\,dt = \int\limits_{[0;1]} \underline{f}_n(t)\,dt.$$

Поскольку $\bar{f}(t) - \underline{f}(t) \geqslant 0$ почти всюду и $\int\limits_{[0;1]} (\bar{f}(t) - \underline{f}(t))\,dt = 0$, то $\bar{f} =$ $= \underline{f}$ почти всюду. Значит, $f = \bar{f} = \underline{f}$ почти всюду. Поэтому функция f измерима (как предел простых измеримых функций), $f \in \bar{\mathcal{L}}_1$ и

$$\int\limits_{[0;1]} f(t)\,dt = \int\limits_{[0;1]} \bar{f}(t)\,dt = \int\limits_{[0;1]} \underline{f}(t)\,dt = (R)\int\limits_{[0;1]} f(t)\,dt,$$

что и требовалось. □

Лекция 10.

Определение 7.2. Пусть $(E, \mathfrak{a}, \nu)$ — пространство с полной мерой. Тогда функции[6] f_1 и f_2 *равны почти всюду*, если множество точек, где они не равны, есть подмножество измеримого множества меры 0.

Например, если f — $\mathfrak{a}$-измеримая функция, то $\exists \bar{f}$ — $\bar{\mathfrak{a}}$-измеримая функция, совпадающая с f почти всюду.

[6]Не обязательно измеримые!

Теорема 7.3. *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[0;1]$ в несобственном смысле (с особенностью в точке 0) и абсолютно. Тогда $f \in \bar{\mathcal{L}}_1$ и $\exists \int\limits_{[0;1]} f(t)\,dt = (R)\int\limits_0^1 f(t)\,dt$.*

Доказательство. По определению несобственного интеграла Римана,

$$(R)\int\limits_0^1 f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\,(R)\int\limits_\varepsilon^1 f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{[\varepsilon;1]} f(t)\,dt.$$

Пусть

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t \geqslant \frac{1}{n};\\ 0, & \text{при } t < \frac{1}{n},\end{cases}$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ при $t \neq 0$ и $|f_1(t)| \leqslant |f_2(t)| \leqslant \ldots$. Отсюда

$$\int\limits_{[0;1]} |f_n(t)|\,dt = \int\limits_{[1/n;1]} |f(t)|\,dt = (R)\int\limits_{1/n}^1 |f(t)|\,dt \leqslant (R)\int\limits_0^1 |f(t)|\,dt < \infty,$$

поэтому по теореме Леви

$$\int\limits_{[0;1]} |f(t)|\,dt = \inf_{[0;1]}\int |f(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty}\,(R)\int\limits_{1/n}^1 |f(t)|\,dt = (R)\int\limits_0^1 |f(t)|\,dt < \infty.$$

По теореме Лебега получаем

$$\exists \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0;1]} f_n(t)\,dt = \int\limits_{[0;1]} f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\,(R)\int\limits_0^1 f_n(t)\,dt = (R)\int\limits_0^1 f(t)\,dt,$$

что и требовалось. □

Замечание. Условие абсолютной сходимости нельзя отбросить: рассмотрим, например, функцию $g(x) = (-1)^n\frac{2^n}{n}$ при $x \in [2^{-n}; 2^{1-n})$. Тогда $g \in \mathcal{R}[0;1]$ и $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} < \infty$, но $g \notin \bar{\mathcal{L}}_1$.

8. Формула замены переменных.

Определение 8.1. Пусть $(\Omega_1, \mathfrak{a}_1, \nu_1)$ — пространство с мерой, $(\Omega_2, \mathfrak{a}_2)$ — измеримое пространство и $f\colon (\Omega_1, \mathfrak{a}_1, \nu_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{a}_2)$ — измеримое отображение, т.е. $\forall A \in \mathfrak{a}_2 \quad f^{-1}A \in \mathfrak{a}_1$. Тогда *образ меры ν_1 относительно f* есть мера ν_2 на измеримом пространстве $(\Omega_2, \mathfrak{a}_2)$, обозначаемая $f_*\nu_1$ или $\nu_1 f^{-1}$ и определяемая по формуле $(f_*\nu_1)A = \nu_1(f^{-1}A)$.

Предложение 8.1. *Образ счетно аддитивной меры счетно аддитивен.*

Доказательство. Пусть $A_j \in \mathfrak{a}_2$, тогда

$$(\nu_1 f^{-1})\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \nu_1\Big(f^{-1}\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \nu_1\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}A_j\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \nu_1(f^{-1}A_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(\nu_1 f^{-1})A_j,$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 8.1. *Пусть $G\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_1} G(f(\omega_1))\, \nu_1(d\omega_1) = \int\limits_{\Omega_2} G(\omega_2)(\nu_1 f^{-1})(d\omega_2).$$

Доказательство. Легко видеть, что достаточно проверить утверждение теоремы для индикаторной функции $G(\omega_2) = \gamma_A(\omega_2)$, где $A \in \mathfrak{a}_2$. Тогда по определению образа меры

$$\int\limits_{\Omega_2} \gamma_A(\omega_2)\, (\nu_1 f^{-1})(d\omega_2) = (\nu_1 f^{-1})(A) = \nu_1(f^{-1}A) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} \gamma_{f^{-1}A}(\omega_1)\, \nu_1(d\omega_1) = \int\limits_{\Omega_1} \gamma_A(f(\omega_1))\, \nu_1(d\omega_1),$$

что и требовалось. $\square$

Лекция 11.

9. Абсолютная непрерывность.

Определение 9.1. Рассмотрим меры ν и μ на σ-алгебре $\mathfrak{a}$. Мера ν называется *абсолютно непрерывной относительно меры* μ, если $\forall\, A \in \mathfrak{a} \quad \mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$. Обозначение: $\nu \ll \mu$.

Если $\nu \ll \mu$ и $\nu \ll \nu$, то меры ν и μ называются *эквивалентными*. Обозначение: $\nu \sim \mu$.

Предложение 9.1 (критерий абсолютной непрерывности)**.** $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall\, A \in \mathfrak{a} \quad \mu A < \delta \Rightarrow \nu A < \varepsilon$.

Замечание. В этом критерии существенна неотрицательность меры!

Доказательство. Достаточность очевидна: если $\mu A = 0$, то $\forall\, \delta \quad \mu A < \delta$ поэтому $\forall\, \varepsilon \quad \nu A < \varepsilon$, а значит, $\nu A = 0$.

Докажем необходимость. Для этого предположим противное: $\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, A_\delta \in \mathfrak{a} : \mu A < \delta$ и $\nu A \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем такую последовательность $\{\delta_n\}$, чтобы $\delta_n > 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$. Тогда для каждого δ_n найдется такое $A_n = A_{\delta_n} \in \mathfrak{a}$, что $\mu A_n < \delta_n$ и $\nu A_n \geqslant \varepsilon_0$. Положим $C_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, тогда $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ и в силу счетной аддитивности меры μ имеем:

$$\mu C_k \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \mu A_n < \sum_{n=k}^{\infty} \delta_n \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

поэтому $\mu C_k \to 0$ при $k \to \infty$, а значит, $\mu \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k = 0$, откуда $\nu \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k = 0$. Но $\forall\, k \quad \nu C_k \geqslant \varepsilon_0$, поэтому $\nu \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k \geqslant \varepsilon_0$ — противоречие. □

Определение 9.2. Пусть $(\Omega, \mathfrak{a}, \mu)$ — пространство с мерой, $f \in \mathcal{L}_1$. Функция ν называется *произведением функции f и меры μ*, если $\nu A = \int\limits_A f(x)\, \mu(dx)$.

Предложение 9.2. *Функция ν является счетно аддитивной мерой.*

Доказательство. Из свойств интеграла Лебега следует, что функция ν является мерой. Проверим счетно аддитивность. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, тогда $\gamma_A(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_{A_k}(\omega)$ и $f(x)\gamma_A(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_{A_k}(x) f(x)$. Отсюда

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} \gamma_{A_k}(x) f(x) \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \gamma_{A_k}(x) |f(x)| \leqslant |f(x)| \in \mathcal{L}_1,$$

и по теореме Лебега

$$\nu A = \int\limits_A f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_\Omega \gamma_A(x) f(x)\,\mu(dx) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_\Omega \gamma_{A_k}(\omega) f(\omega)\,\mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \nu A_k,$$

что и требовалось. □

Отсюда следует, что $\nu \ll \mu$: если $\mu A = 0$, то $\nu A = \int\limits_A f(x)\,\mu(dx) = 0$.

Теорема 9.1 (свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега)**.** $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall\, A \in \mathfrak{a} \quad \mu A < \delta \Rightarrow \Big| \int\limits_A f(x)\,\mu(dx) \Big| < \varepsilon$.

Доказательство. $\Big| \int\limits_A f(x)\,\mu(dx) \Big| \leqslant \int\limits_A |f(x)|\,\mu(dx)$. Рассмотрим *вариацию меры* ν: $\|\nu\| A = \int\limits_A |f(x)|\,\mu(dx)$, тогда по критерию абсолютной непрерывности получаем

$$\Big| \int\limits_A f(x)\,\mu(dx) \Big| \leqslant \int\limits_A |f(x)|\,\mu(dx) < \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Предложение 9.3. *Пусть* $f \geqslant 0$, *тогда* $g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{a}, \nu) \Leftrightarrow g - f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{a}, \mu)$ *и тогда* $\int\limits_\Omega g(\omega)\,\nu(d\omega) = \int\limits_\Omega g(\omega) f(\omega)\,\mu(d\omega)$.

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для случая, когда $g = \gamma_C$ — индикатор некоторого множества C. Но тогда по определению произведения функции и меры

$$\int\limits_{\Omega} g(\omega)\,\nu(d\omega) = \nu C = \int\limits_{C} f(\omega)\,\mu(d\omega) = \int\limits_{\Omega} g(\omega) f(\omega) \mu(d\omega),$$

что и требовалось. □

Рассмотрим теперь важный пример. Пусть $F\colon [a;b] \to [c;d]$ — произвольная монотонно возрастающая непрерывная функция, такая, что $F(a) = c$ и $F(b) = d$. Тогда на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских множеств отрезка $[a;b]$ есть мера ν_F, такая, что $\nu_F(\alpha;\beta) = F(\beta) - F(\alpha)$. Можно рассмотреть образ меры ν_F на отрезке $[c;d]$, а именно меру $F_*\nu_F = \nu_F F^{-1}$. Это — стандартная мера Лебега на $[c;d]$:

$$(\nu_F F^{-1})(\gamma;\delta) = \nu_F(F^{-1}(\gamma;\delta)) = F(F^{-1}(\delta)) - F(F^{-1}(\gamma)) = \delta - \gamma.$$

Пусть теперь $g \in \mathcal{L}_1([c;d], \mathfrak{a}, \nu_L)$, тогда

$$\int\limits_{[c;d]} g(x)\,\nu_L(dx) = \int\limits_{[c;d]} g(x)(\nu_F F^{-1})(dx) = \int\limits_{[a;b]} g(F(x))\,\nu_F(dx).$$

Но $\nu_F(\alpha;\beta) = \int\limits_{[\alpha;\beta]} F'(x)\,dx$, поэтому $\nu_F(A) = \int\limits_{A} F'(x)\,dx$, и поскольку $\nu_F = F'\nu_L$, то

$$\int\limits_{[c;d]} g(x)\,\nu_L(dx) = \int\limits_{[a;b]} g(F(x))F'(x)\,dx$$

— стандартная формула замены переменной.

10. Пространство $\mathcal{L}_p$.

Определение 10.1. *Пространство* $\bar{\mathcal{L}}_p$ — это пространство всех измеримых функций f, таких, что $|f|^p \in \mathcal{L}_1$. При этом $1 \leqslant p < \infty$.

Предложение 10.1. *Пространство* $\bar{\mathcal{L}}_p$ *является линейным.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $f, g \in \bar{\mathcal{L}}_p$, то $|f+g|^p \in$ $\in \mathcal{L}_1$. Для этого докажем следующее неравенство:

$$|f+g|^p \leqslant C_p(|f|^p + |g|^p),$$

где C_p — некоторая константа.

Рассмотрим функцию $\psi(t) = \frac{(1+t)^p}{1+t^p}$. Эта функция непрерывна на луче $[0;\infty)$, $\psi(0) = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 1$. Отсюда следует, что функция $\psi(t)$ ограничена: $\exists\, C_p : |\psi(t)| \leqslant C_p$. Подставим $t = \frac{a}{b}$: $(a+b)^p \leqslant C_p(a^p + b^p)$, откуда $|f+g|^p \leqslant (|f| + |g|)^p \leqslant C_p(|f|^p + |g|^p)$, что и требовалось. $\square$

Определение 10.2. *Пространство* $\mathcal{L}_p = \bar{\mathcal{L}}_p / \bar{\mathcal{L}}_p^0$, где $\bar{\mathcal{L}}_p^0 = \{f \in \bar{\mathcal{L}}_p \mid \int\limits_\Omega |f(\omega)|^p \, \nu(d\omega) = 0\}$.

Величина $\|f\|_p = \big(\int\limits_\Omega |f(\omega)|^p \, \nu(d\omega)\big)^{1/p}$ является *нормой* в $\mathcal{L}_p$.

Теорема 10.1 (неравенство Гельдера)**.** $\int\limits_\Omega |f(\omega)||g(\omega)| \, \nu(d\omega) \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$, *где* $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством Гельдера в виде $ab \leqslant$ $\leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, доказанному в курсе математического анализа. Подставим в него $a = \frac{|f|}{\|f\|_p}$ и $b = \frac{|g|}{\|g\|_q}$. Имеем: $\frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}$, откуда

$$\int\limits_\Omega \frac{|f| \cdot |g|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \, \nu(dx) \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \, \nu(dx) + \frac{1}{q} \int\limits_\Omega \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \, \nu(dx) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 10.2 (неравенство Минковского)**.** $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, *где* $f, g \in \mathcal{L}_p$.

Доказательство. Пусть $q = \frac{p}{p-1}$. Воспользуемся неравенством Гельдера, тогда

$$\int\limits_\Omega |f+g|^p \, \nu(dx) \leqslant \int\limits_\Omega (|f| + |g|)^p \, \nu(dx) = \int\limits_\Omega (|f| + |g|)^{p-1} |f| \, \nu(dx) +$$

$$+ \int\limits_\Omega (|f| + |g|)^{p-1} |g| \, \nu(dx) \leqslant \|f\|_p \|(|f| + |g|)^{p/q}\|_q + \|g\|_p \|(|f| + |g|)^{p/q}\|_q.$$

Поскольку
$$\|(|f|+|g|)^{p/q}\|_q = \Big(\int\limits_\Omega (|f|+|g|)^p\,\nu(dx)\Big)^{1/q} = \|(|f|+|g|)\|_p^{p/q},$$
то, поделив обе части предыдущего неравенства на $\|(|f|+|g|)\|_p^{p/q}$, получаем
$$\|f+g\|_p^{p-1/q} = \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p,$$
что и требовалось. □

Следствие 10.1. *Величина* $\|f\|_p = \big(\int\limits_\Omega |f(\omega)|^p\,\nu(d\omega)\big)^{1/p}$ *является нормой в* $\mathcal{L}_p$. □

Лекция 12.

Теорема 10.3. *Пространство* $\mathcal{L}_p$ *полно.*

Доказательство. Пусть $\varphi_n \in \mathcal{L}_p$ — фундаментальная последовательность, т.е. $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 : \forall\, k,m > n_0 \quad \|\varphi_k - \varphi_m\|_p < \varepsilon$. Необходимо доказать, что $\exists\,\varphi \in \mathcal{L}_p : \|\varphi_n - \varphi\|_p \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы будем считать, что $\nu\Omega < \infty$. Тогда если $\psi \in \mathcal{L}_p$, то $\psi \in \mathcal{L}_1$:
$$\int\limits_\Omega |\psi(\omega)|\,\nu(d\omega) \leqslant \int\limits_\Omega |\psi(\omega)|\cdot \mathbf{1}\,\nu(d\omega) \leqslant C\|\psi\|_p < \infty$$
согласно неравенству Гельдера[7] (здесь $\mathbf{1}$ — это единичная функция, а $C = \|\mathbf{1}\|_q$).

Выберем последовательность $\{\varepsilon_n\}$, такую, что $\varepsilon_n > 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$. Тогда $\forall\,\varepsilon_j \quad \exists\, n_j = n(\varepsilon_j) : \forall\, k,m \geqslant n_j \quad \|\varphi_k - \varphi_m\|_p < \varepsilon_j$.

Рассмотрим ряд $\varphi_{n_1} + (\varphi_{n_2} - \varphi_{n_1}) + (\varphi_{n_3} - \varphi_{n_2}) + (\varphi_{n_4} - \varphi_{n_3}) + \ldots$. Поскольку $\|\varphi_{n_{j+1}} - \varphi_{n_j}\|_p < \varepsilon_j$, то
$$\int\limits_\Omega |\varphi_{n_1}|\,d\nu + \int\limits_\Omega |\varphi_{n_2} - \varphi_{n_1}|\,d\nu + \ldots \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n + \int\limits_\Omega |\varphi_{n_1}|\,d\nu < \infty,$$

[7] Здесь и далее считается, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

и по теореме Леви

$$\int\limits_{\Omega}\Big(|\varphi_{n_1}+\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_{n_{j+1}}-\varphi_{n_j}||\Big)\,d\nu<\infty,$$

откуда получаем, что ряд $\varphi_{n_1}+(\varphi_{n_2}-\varphi_{n_1})+\ldots$ сходится абсолютно почти всюду. Значит, $\varphi_{n_1}+\sum\limits_{j=1}^{k}(\varphi_{n_{j+1}}-\varphi_{n_j})=\varphi_{n_{k+1}}$ и $\varphi_{n_k}(\omega)\to\varphi(\omega)$ почти всюду при $k\to\infty$. Докажем, что $\varphi\in\mathcal{L}_p$ и $\|\varphi-\varphi_{n_j}\|_p\to 0$ при $j\to\infty$.

Поскольку

$$\|\varphi_{n_{j+k}}-\varphi_{n_j}\|_p^p=\int\limits_{\Omega}|\varphi_{n_{j+k}}-\varphi_{n_j}|^p\,d\nu<\varepsilon_j^p,$$

то по теореме Фату $\|\varphi_{n_j}-\varphi\|_p^p=\int\limits_{\Omega}|\varphi_{n_j}-\varphi|^p\,d\nu<\varepsilon_j^p$, откуда $\|\varphi-\varphi_{n_j}\|_p<$ $<\varepsilon_j$. Значит, $\varphi-\varphi_{n_j}\in\mathcal{L}_p$ и в силу линейности $\varphi\in\mathcal{L}_p$. Кроме того, $\varepsilon_j\to 0$ при $j\to\infty$, откуда следует, что $\|\varphi-\varphi_{n_j}\|_p\to 0$ при $j\to\infty$.

Из неравенства треугольника немедленно следует, что $\varphi_n\to\varphi$ в пространстве $\mathcal{L}_p$, что и требовалось. □

Замечание. Приведенное доказательство справедливо при $p>1$, однако легко видеть, что при $p=1$ теорема также верна.

Пусть теперь $\varphi\in\mathcal{L}_p$ и $\psi\in\mathcal{L}_q$. Тогда в силу неравенства Гельдера

$$\Big|\int\limits_{\Omega}\varphi\psi\,d\nu\Big|\leqslant\int\limits_{\Omega}|\varphi\psi|\,d\nu\leqslant\|\varphi\|_p\cdot\|\psi\|_q.$$

Отсюда следует, что линейный функционал $F_\psi\colon\varphi\mapsto\int\limits_{\Omega}\varphi\psi\,d\nu$ на пространстве $\mathcal{L}_p$ непрерывен в 0: в самом деле, если $\|\varphi_n\|_p\to 0$, то $|F_\psi(\varphi_n)|\leqslant$ $\leqslant\|\varphi_n\|_p\cdot\|\psi\|_q\to 0$. В силу линейности этот функционал непрерывен на всем пространстве $\mathcal{L}_p$.

Теорема 10.4 (Рис)**.** *Пусть F — непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathcal{L}_p$. Тогда $\exists\,\psi_F\in\mathcal{L}_q:\forall\,\varphi\in\mathcal{L}_p\quad F(\varphi)=\int\limits_{\Omega}\varphi\psi_F\,d\nu$.*[8]

[8] Доказательство этой теоремы будет дано в курсе функционального анализа независимо от теоремы Радона-Никодима.

Теорема 10.5 (Радон-Никодим)**.** *Пусть* $(\Omega, \mathfrak{a})$ *— измеримое пространство,* ν *и* μ *— меры на* $\mathfrak{a}$*, причем* $\mu \ll \nu$*. Тогда* $\exists\, \psi \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{a}, \nu) : \mu = \psi \cdot \nu$.

Доказательство. Рассмотрим меру $\eta = \mu + \nu$ (т.е. $\forall\, A \in \mathfrak{a} \quad \eta A = \mu A + + \nu A$) и линейный функционал F на пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{a}, \eta)$, такой, что $F(\varphi) = \int\limits_\Omega \varphi(\omega)\, \mu(d\omega)$. По неравенству Гельдера при $p = q = 2$

$$\|\varphi\|_1 = \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\, \eta(d\omega) \leqslant \|\varphi\|_2 \cdot \|\mathbf{1}\|_2,$$

откуда $|\varphi| \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{a}, \eta)$. Поскольку

$$\infty > \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\, \eta(d\omega) = \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\, \mu(d\omega) + \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\, \nu(d\omega),$$

то $\int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\, \mu(d\omega) < \infty$ и

$$\int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\, \eta(d\omega) \geqslant \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\, \mu(d\omega) \geqslant \Big| \int\limits_\Omega \varphi(\omega)\, \mu(d\omega) \Big| = |F(\varphi)|,$$

а значит, $|F(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_2 \cdot \|\mathbf{1}\|_2$, откуда следует, что функционал F непрерывен на пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{a}, \eta)$. Поэтому по теореме Риса получаем, что $\exists\, g \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{a}, \eta) : \forall\, \varphi \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{a}, \eta) \quad F(\varphi) = \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)|\, \mu(d\omega) = = \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)| g(\omega)\, \eta(d\omega) = \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)| g(\omega)\, \mu(d\omega) + \int\limits_\Omega |\varphi(\omega)| g(\omega)\, \nu(d\omega)$.

Проверим, что $\eta A_0 = \eta\{\omega \mid g(\omega) \geqslant 1\} = 0$. Пусть $\varphi = \gamma_{A_0}$ — индикатор множества A_0. Тогда

$$\int\limits_\Omega \gamma_{A_0}(\omega)\, \mu(d\omega) = \mu A_0 = \int\limits_{A_0} g(\omega)\, \mu(d\omega) + \int\limits_{A_0} g(\omega)\, \nu(d\omega) \geqslant \mu A_0 + \nu A_0,$$

откуда следует, что $\nu A_0 = 0$. Поскольку $\mu \ll \nu$, то $\mu A_0 = 0$, а значит, и $\eta A_0 = 0$.

Проверим теперь, что $\eta A_1 = \eta\{\omega \mid g(\omega) < 0\}$. Аналогично,

$$0 \leqslant \int\limits_\Omega \gamma_{A_1}(\omega)\, \mu(d\omega) = \mu A_1 = \int\limits_{A_1} g(\omega)\, \eta(d\omega) \leqslant 0,$$

откуда $\eta A_1 = 0$.

Таким образом,

$$F(\varphi) = \int\limits_{\Omega\setminus A_0} \varphi(\omega)\,\mu(d\omega) = \int\limits_{\Omega\setminus A_0} \varphi(\omega)g(\omega)\,\eta(d\omega) =$$
$$= \int\limits_{\Omega\setminus A_0} \varphi(\omega)g(\omega)\,\mu(d\omega) + \int\limits_{\Omega\setminus A_0} \varphi(\omega)g(\omega)\,\nu(d\omega).$$

По теореме Леви получаем, что это равенство верно при всех $\varphi \geqslant 0$. Отсюда $\int\limits_{\Omega\setminus A_0} (\mathbf{1} - g(\omega))\varphi(\omega)\,\mu(d\omega) = \int\limits_{\Omega\setminus A_0} \varphi(\omega)g(\omega)\,\nu(d\omega)$.

Пусть $A \in \mathfrak{a}$. Положим $\varphi = \frac{\gamma_A}{\mathbf{1}-g}$ и $\psi = \frac{g}{\mathbf{1}-g} \geqslant 0$, тогда $\int\limits_{\Omega}\gamma_A(\omega)\,\mu(d\omega) = \int\limits_{\Omega}\gamma_A(\omega)\psi(\omega)\,\nu(d\omega)$, т.е. $\mu A = \int\limits_{A}\psi(\omega)\,\nu(d\omega)$.

Осталось доказать, что $\psi \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{a}, \nu)$. Для этого положим $A = \Omega$. Получаем, что $\infty > \mu\Omega = \int\limits_{\Omega}\psi(\omega)\,\nu(d\omega)$, откуда все и следует. □

11. Теоремы Фубини, Хана-Жордана и Лебега.

Пусть $(\Omega_1, \mathfrak{a}_1, \nu_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{a}_2, \nu_2)$ — пространства с мерой.

Определение 11.1. *Произведением измеримых пространств* называется измеримое пространство $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2)$, где $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_j \in \Omega_j; j = 1, 2\}$ и $\mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2$ — σ-алгебра, определяемая следующим образом. Возьмем полукольцо $\mathcal{P} = \{A_1 \times A_2 \mid A_j \in \mathfrak{a}_j; j = 1, 2\}$ (элементы которого называются *прямоугольниками*), тогда $\mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2 = \sigma(\mathcal{P})$.

Произведение пространств с мерой — это произведение измеримых пространств, на котором задана мера $\nu_1 \otimes \nu_2$ (называющаяся *произведением мер ν_1 и ν_2*), определяемая следующим образом. Если $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$, то $(\nu_1 \otimes \nu_2)(A_1 \times A_2) = \nu_1 A_1 \cdot \nu_2 A_2$.

Предложение 11.1. *Произведение мер $\nu_1 \otimes \nu_2$ счетно аддитивно.*

Доказательство. Пусть $A_1 \times A_2 = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_1^k \times A_2^k$ и $f_{A_1 A_2}(\omega_1) = \nu_2 A_2 \cdot \cdot \gamma_{A_1}(\omega_1)$, тогда в силу счетной аддитивности меры ν_2 имеем: $f_{A_1 A_2}(\omega_1) = = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{A_1^k A_2^k}(\omega_1)$. Поэтому по теореме Леви получаем, что

$$(\nu_1 \otimes \nu_2)(A_1 \times A_2) = \int\limits_{\Omega_1} f_{A_1 A_2}(\omega_1)\, \nu_1(d\omega_1) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_1} f_{A_1^k A_2^k}(\omega_1)\, \nu_1(d\omega_1) = \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_1 \otimes \nu_2)(A_1^k \times A_2^k),$$

что и требовалось. □

Отсюда следует, что полученную счетно аддитивную функцию можно продолжить на всю σ-алгебру $\mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2$. Полученная мера и называется *произведением мер ν_1 и ν_2*.

Замечание. Если меры ν_1 и ν_2 полны, то мера $\nu_1 \otimes \nu_2$ может не быть полной, поэтому иногда бывает удобно рассматривать пополнение произведения пространств с мерой: $(\Omega_1 \times \Omega_2, \overline{\mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2}, \overline{\nu_1 \otimes \nu_2})$.

Замечание. Если функция f измерима на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2, \nu_1 \otimes \nu_2)$, то $\forall\, \omega_1 \in \Omega_1$ функция $\omega \mapsto f(\omega_1, \omega)$ измерима на $(\Omega_2, \mathfrak{a}_2, \nu_2)$. В случае, когда рассматриваются пополненное пространство, необходимо заменить выражение «$\forall\, \omega_1 \in \Omega_1$» на «для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$».

Лекция 13.

Теорема 11.1 (Фубини). *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2, \nu_1 \otimes \nu_2)$, тогда для ν_1-почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$ функция $\omega \mapsto f(\omega_1, \omega)$ интегрируема на $(\Omega_2, \mathfrak{a}_2, \nu_2)$, причем функция $\omega_1 \mapsto \int\limits_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \nu_2(d\omega_2)$ является ν_1-интегрируемой на Ω_1 и*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, (\nu_1 \otimes \nu_2)(d\omega_1 \times d\omega_2) = \int\limits_{\Omega_1} \Big(\int\limits_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \nu_2(d\omega_2) \Big)\, \nu_1(d\omega_1).$$

Доказательство. Как обычно, достаточно доказать теорему для индикаторов: пусть $f = \gamma_A$, где $A \in \mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2$. Пусть

$$g(\omega_2) = \begin{cases} \nu_1 A_1, & \text{если } \omega_2 \in A_2; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

тогда, если $A = A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{a}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{a}_2$, то

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} \gamma_A(\omega_1, \omega_2)\, (\nu_1 \otimes \nu_2)(d\omega_1 \times d\omega_2) = (\nu_1 \otimes \nu_2)(A_1 \times A_2) =$$
$$= \int\limits_{\Omega_2} \Big(\int\limits_{\Omega_1} \gamma_A(\omega_1, \omega_2)\, \nu_1(d\omega_1) \Big)\, \nu_2(d\omega_2) = \int\limits_{\Omega_2} g(\omega_2)\, \nu_2(d\omega_2) = \nu_1 A_1 \cdot \nu_2 A_2.$$

Назовем множество *допустимым*, если для его индикатора верна теорема Фубини. Обозначим множество всех допустимых множеств через $\mathcal{Q}$. Нам необходимо доказать, что $\mathcal{Q} = \mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2$. Укажем некоторые свойства множества $\mathcal{Q}$.

Свойства.

1. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{Q}$ (очевидно).
2. $\forall\, B_j \in \mathcal{Q} : B_1 \subset B_2 \ldots \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{Q}$ (следует из теоремы Леви).
3. $B_1 \subset B_2 \in \mathcal{Q} \Rightarrow B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{Q}$ (следует из линейности).
4. $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ (см. предыдущее равенство).

Определение 11.2. Совокупность множеств, удовлетворяющая свойствам 1, 2, 3 называется *D-системой множеств.*

Докажем, что $D(\mathcal{P}) = \mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2$ (легко видеть, что этого будет достаточно для завершения доказательства). Это утверждение эквивалентно тому, что $D(\mathcal{P})$ — это σ-алгебра. Для этого нужно доказать, что если $B_1, B_2 \in \mathcal{Q}$, то $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{Q}$.

Пусть $\mathcal{Q}_1 = \{A \in D(\mathcal{P}) \mid \forall\, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in D(\mathcal{P})\}$ и $\mathcal{Q}_2 = \{A \in D(\mathcal{P}) \mid \forall\, B \in D(\mathcal{P}) \quad A \cap B \in D(\mathcal{P})\}$. Легко видеть, что $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ — D-системы, причем $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$. Но $\mathcal{Q}_1 \subset D(\mathcal{P})$, поэтому $\mathcal{Q}_1 = D(\mathcal{P})$ и $\mathcal{Q}_2 = D(\mathcal{P})$. Отсюда получаем, что $D(\mathcal{P})$ — это σ-алгебра и $D(\mathcal{P}) = \mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{a}_2$. $\square$

Лекция 14.

Теорема 11.2 (Хан-Жордан). *Пусть* $(\Omega, \mathfrak{a})$ *— измеримое пространство,* ν *— возможно знакопеременная*[9] *мера.*

1. $\exists\, \Omega_+, \Omega_- : \Omega_+ \sqcup \Omega_- = \Omega$, *причем* $\forall\, A \subset \Omega_+ : A \in \mathfrak{a} \quad \nu A \geqslant 0$ *и* $\forall\, A \subset \Omega_- : A \in \mathfrak{a} \quad \nu A \leqslant 0$.

2. $\nu = \nu^+ - \nu^-$, *где меры* ν^+ *и* ν^- *неотрицательны.*

Определение 11.3. Разложение пространства Ω, указанное в п.1, называется *разложением Хана.*

Определение 11.4. Мера ν^+ называется *положительной*, а мера ν^- — *отрицательной* вариацией меры ν. Величина $\|\nu\| = \nu^+ + \nu^-$ называется *вариацией меры* ν[10].

Доказательство. Вначале докажем п.2, исходя из п.1. Положим $\nu^+ A = \nu(A \cap \Omega_+)$ и $\nu^- A = -\nu(A \cap \Omega_-)$. Как легко видеть, что ν^+ и ν^-, определенные таким образом, дают искомое разложение.

Замечание. Разложение меры в п.2 не является единственным. Однако, если $\nu = \mu^+ - \mu^-$, то $\mu^+ A \geqslant \nu^+ A$ и $\mu^- A \geqslant \nu^- A$.

Докажем теперь п.1. Назовем множество $C \in \mathfrak{a}$ *отрицательным*, если $\forall\, A \in \mathfrak{a} \quad \nu(A \cap C) \leqslant 0$, и *положительным*, если $\forall\, A \in \mathfrak{a} \quad \nu(A \cap C) \geqslant 0$.

Пусть $\alpha = \inf\{\nu C \mid C\text{— отрицательно}\}$ и $\{C_n\}$ — последовательность измеримых множеств, таких, что $\nu C_n \searrow \alpha$. Положим $A_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Очевидно, что A_0 отрицательно. Докажем, что множество $\Omega_+ = \Omega \setminus A_0$ является положительным (тогда можно взять $\Omega_- = A_0$).

Предположим противное: пусть найдется такое $\bar{A} \in \Omega_+$, что $\nu \bar{A} < 0$. Выберем последовательность $\{\varepsilon_j\}$, такую, что $\varepsilon_j > 0$ и $\varepsilon_j \searrow 0$. Тогда множество $\bar{A}$ не может быть отрицательным, иначе его можно присоединить к A_0, и тогда получится, что $\nu A_0 < \alpha$. Поэтому $\exists\, A_1 \subset \bar{A} : \nu A_1 > \varepsilon_{j_1}$. Рассмотрим множество $\bar{A} \setminus A_1$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что $\exists\, A_2 \subset \bar{A} \setminus A_1 : \nu A_2 > \varepsilon_{j_2}$.

[9] Обратите внимание!

[10] Иногда *вариацией* называется величина $\|\nu\|\Omega$. В таком случае отображение $\nu \mapsto \|\nu\|\Omega$ является нормой.

В результате мы получим последовательность попарно непересекающихся множеств $\{A_k\}$, где $\nu A_k > \varepsilon_{j_k}$. Кроме того, $\nu\Big(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu A_k < < \infty$, поэтому $\nu A_k \to 0$ и $\varepsilon_{j_k} \to 0$.

Имеем: $\nu\Big(\bar{A} \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\Big) < 0$. Докажем, что множество $\bar{A} \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ отрицательно. Действительно, если бы это было не так, то нашлось бы множество $D \subset \bar{A} \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, такое, что $\nu D = \varepsilon > 0$, а значит, нашлось бы такое k, что $\varepsilon_{j_k} < \varepsilon$ — противоречие с выбором A_k (тогда надо было выбрать D).

Значит, множество $\bar{A}\setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ отрицательно, и его можно присоединить к A_0, в результате чего получится, что $\nu A_0 < \alpha$ — противоречие.

Таким образом, можно выбрать $\Omega_- = A_0$ и $\Omega_+ = \Omega \setminus A_0$. □

Пусть f — интегрируемая функция, $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$ и $\mu = f \cdot \lambda$, где λ — стандартная мера Лебега.

Теорема 11.3 (Лебег)**.** *Функция $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$ дифференцируема почти всюду по t и $F'(t) = f(t)$.*

Доказательство. Для доказательства нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 11.1. *Если $\{I_\alpha\}$ — семейство интервалов, $G = \bigcup\limits_{\alpha} I_\alpha$ и $\lambda G < \infty$, то можно выбрать подсемейство попарно непересекающихся интервалов $\{I_{\alpha_k}\}$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda I_{\alpha_k} \geqslant \frac{1}{4}\lambda G$.*

Доказательство. Вначале докажем, что существует такой компакт $K \subset \subset G$, что $\lambda K \geqslant \frac{3}{4}\lambda G$. Поскольку $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} ((-n; n) \cap G)$, то можно считать, что множество G ограничено. Положим $K_\alpha = \{x \in G \mid \rho(x, \mathbb{R}^1 \setminus G) \geqslant \alpha\}$. Тогда все K_α — компакты, и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_{1/n} = G$. Значит, $\exists\, K = K_{n_0} : \lambda K \geqslant \geqslant \frac{3}{4}\lambda G$.

Из любого покрытия компакта K можно выбрать конечное подпокрытие $J_1, \ldots, J_n$. Пусть I_{α_1} — это то из множеств $\{J_k\}$, у которого мера

Лебега максимальна, I_{α_2} — множество с наибольшей мерой Лебега из тех, что не пересекаются с I_{α_1}, и т.д.

Докажем, что подпокрытие $\{I_{\alpha_k}\}$ — искомое. Заменим множества I_{α_i} интервалами $\hat{I}_{\alpha_i}$ с той же серединой, но втрое большей длиной. Тогда $\bigcup\limits_r \hat{I}_{\alpha_r} \supset K$, поэтому

$$\lambda K \leqslant \sum_r \lambda \hat{I}_{\alpha_r} = 3 \sum_r \lambda I_{\alpha_r},$$

откуда $\frac{1}{4}\lambda G \leqslant \sum\limits_r \lambda I_{\alpha_r}$, что и требовалось. $\square$

Лемма 11.2. *Если* $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ *и* $\mu A = 0$, *то* $F'(t) = 0$ *для почти всех* $t \in A$.

Доказательство. Пусть $\delta, \varepsilon > 0$. Т.к. $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$, то $\exists\, G_\delta \supset A : \mu G_\delta < \delta$. Положим $I_h = (x-h; x+h)$ и $A_\varepsilon = \{x \in A \mid \limsup\limits_{h\to 0} \frac{\mu I_h}{h} > \varepsilon\}$. Тогда $\forall\, x \in A_\varepsilon \quad \exists\, h : I_h \subset G_\delta$ и $\mu I_h > \varepsilon h = \varepsilon \frac{\lambda I_h}{2}$, т.е. $2\mu I_h > \varepsilon \lambda I_h$. По лемме 11.1 объединение $V = \bigcup\limits_h I_h$ содержит A_ε и содержится в G_δ, причем

$$\lambda A_\varepsilon \leqslant \lambda V \leqslant 4 \sum_k \lambda I_{h_k} < \frac{8}{\varepsilon} \sum_k \mu I_{h_k} \leqslant \frac{8}{\varepsilon} \mu G_\delta < \frac{8\delta}{\varepsilon}.$$

Отсюда получаем, что $\lambda A_\varepsilon = 0$, а значит, для почти всех ε функция $F(t)$ дифференцируема, причем $F'(x) = \limsup\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = 0$, что и требовалось. $\square$

Теперь докажем теорему Лебега. Пусть $\hat{F}(t) = \limsup\limits_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}$ и $\check{F}(t) = \liminf\limits_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}$. Согласно лемме 11.2, $\hat{F}(t) = 0$ для почти всех $t \in \{x \mid f(x) = 0\}$.

Для каждого $r \in \mathbb{R}^1$ положим $F_r(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} (f(\tau) - r)_+ \, d\tau$, тогда $\hat{F}_r(t) = 0$ почти всюду на множестве $\{x \mid f(x) \leqslant r\}$.

Т.к. $f \leqslant (f-r)_+ + r$, то $\hat{F}(t) \leqslant r$ на множестве $\{x \mid f(x) \leqslant r\}$. Но

$$\lambda\{x \mid f(x) < \hat{F}(x)\} = \lambda \bigcup_r \{x \mid f(x) \leqslant r < \hat{F}(x)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_r \lambda\{\{x \mid f(x) \leqslant r\} \cap \{x \mid r < \hat{F}(x)\}\} = 0,$$

откуда $\hat{F}(t) \leqslant f(t)$ почти всюду. Аналогично, $\check{F}(t) \geqslant f(t)$ почти всюду. Таким образом, $\check{F}(t) \geqslant f(t) \geqslant \hat{F}(t) \geqslant \check{F}(t)$, а значит, почти всюду $\exists\, F'(t) = f(t)$, что и требовалось. $\square$

12. Интеграл Лебега-Стильтьеса.

Пусть $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1))$ — измеримое пространство.

Определение 12.1. Функция F *имеет ограниченную вариацию*, если $\exists\, \nu\colon \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1) \to \mathbb{R}^1 : \forall\, t \quad F(t) = \nu(-\infty; t]$. Тогда $\nu(a; b] = F(b) - F(a)$ — это *мера Лебега-Стильтьеса.* Функция F называется *абсолютно непрерывной*, если $\exists\, f \in \mathcal{L}_1 : \forall\, t \quad F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$.

Замечание. Абсолютно непрерывная функция всегда имеет ограниченную вариацию: положим $\nu A = \int\limits_A f(x)\, dx$ и $F(t) = \nu(-\infty; t]$.

Из теоремы Лебега следует, что если мы знаем производную $F'(t)$ абсолютно непрерывной функции $F(t)$, то сама функция $F(t)$ однозначно восстанавливается: $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} F'(\tau)\, d\tau$.

Определение 12.2. Пусть $f, g\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. *Интегралом Стильтьеса* называется величина $\int\limits_a^b g(x)\, df(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} g(\xi_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k))$, где $\{(x_k, \xi_k)\}$ — отмеченное разбиение отрезка $[a; b]$.

Теорема 12.1 (без доказательства)**.** *Пусть f — функция ограниченной вариации (т.е. $f(t) = \nu_f(-\infty; t]$), а g — ограниченная функция. Тогда интеграл Стильтьеса $\int\limits_a^b g(t)\, df(t)$ существует тогда и только тогда, когда значение меры ν_f на множестве точек разрыва функции g равно 0. В этом случае $\int\limits_a^b g(t)\, df(t) = \int\limits_a^b g(t)\, \nu_f(dt)$.* $\square$

Теорема 12.2 (без доказательства). *Интегралы* $\int\limits_a^b f(t)\,dg(t)$ *и* $\int\limits_a^b g(t)\,df(t)$ *существуют или не существуют одновременно, причем если они существуют, то верна формула интегрирования по частям:*

$$\int\limits_a^b g(t)\,df(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f(t)\,dg(t).$$

□

Теорема 12.3. *Пусть f и g — функции ограниченной вариации, а также $\mu_f(a;b] = f(b) - f(a)$ и $\nu_g(a;b] = g(b) - g(a)$. Тогда верна формула интегрирования по частям:*

$$\int\limits_{(a;b]} f(t)\,\nu_g(dt) = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int\limits_{(a;b]} g(t-0)\,\mu_f(dt).$$

Доказательство. Теорема верна в силу следующей цепочки равенств:

$$\int\limits_{(a;b]} f(t)\,\nu_g(dt) = \int\limits_{(a;b]} (f(a) + \mu_f(a;t])\,\nu_g(dt) = f(a)g(t)|_a^b + \int\limits_{(a;b]} \mu_f(a;t]\,\nu_g(dt) =$$

$$= f(a)(g(b) - g(a)) + \int\limits_a^b\int\limits_a^b \gamma_E(t_1,t_2)\,(\nu_g \otimes \mu_f)(dt_1 \times dt_2) =^{11}$$

$$= f(a)(g(b) - g(a)) - \int\limits_{(a;b]} g(t-0)\,\mu_f(dt) + g(t)f(t)|_a^b =$$

$$= g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int\limits_{(a;b]} g(t-0)\,\mu_f(dt),$$

что и требовалось. □

[11] Здесь E — это треугольник на координатной плоскости t_1Ot_2 с вершинами в точках $(a;a)$, $(b;b)$ и $(b;a)$.

Замечание. Если функции f и g абсолютно непрерывны, то формула интегрирования по частям записывается в следующем виде:

$$\int\limits_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g'(t)f(t)\,dt.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что функция fg также абсолютно непрерывна.

Приложение.
Экзаменационные вопросы.

1. Продолжение конечно аддитивной меры с полукольца на порожденное кольцо.
2. Доказательство неравенства $|\nu^* A - \nu^* B| \leqslant \nu^*(A \triangle B)$.
3. Совпадение ν^* и ν на области определения меры ν.
4. Доказательство того, что множество ν-измеримых подмножеств является σ-алгеброй.
5. Доказательство того, что внешняя мера ν^* счетно аддитивна на σ-алгебре ν-измеримых подмножеств.
6. Доказательство единственности продолжения счетно аддитивной меры с алгебры на порожденную σ-алгебру.
7. Счетная аддитивность меры Лебега (на полукольце полуинтервалов вещественной прямой).
8. Два определения измеримости вещественной функции на измеримом пространстве и их эквивалентность.
9. Доказательство того, что всякая измеримая функция является пределом последовательности простых функций.
10. Доказательство измеримости функции, являющейся пределом сходящейся последовательности измеримых функций.
11. Доказательство существования неизмеримого по Лебегу подмножества вещественной прямой.
12. Связь между сходимостью почти всюду и сходимостью по мере.
13. Критерий счетно аддитивной конечной меры на кольце множеств.
14. Определение интеграла Лебега для измеримых функций.
15. Неравенство Чебышева.
16. Теорема Беппо Леви.
17. Теорема Фату-Лебега.
18. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
19. Теорема Фату.
20. Доказательство того, что интегрируемая по Риману функция интегрируема по Лебегу и интегралы совпадают.
21. Связь между интегралом Лебега и несобственным интегралом Римана.
22. Замена переменной в интеграле Лебега.
23. Равносильность двух определений абсолютной непрерывности одной меры относительно другой.

24. Счетная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
25. Теорема Радона-Никодима.
26. Теорема Хана-Жордана.
27. Неравенство Гельдера.
28. Неравенство Минковского.
29. Полнота пространства $\mathcal{L}_p$ при $p \geqslant 1$.
30. Счетная аддитивность произведения двух счетно аддитивных мер.
31. Теорема Фубини.
32. Дифференцирование интеграла Лебега с переменным верхним пределом.
33. Восстановление абсолютно непрерывной функции по ее производной.
34. Связь между интегралами Римана-Стильтьеса и Лебега-Стильтьеса (без доказательства).