Действительный анализ

Прислано Надеждой Лауфер (nadenkam@mail.ru)

IV семестр

Аннотация

Свои пожелания, дополнения и замечания просьба направлять по указанному email-адресу. К сожалению, текст далеко не всегда связен и понятен, поэтому большая просьба к читателям — принять посильное участие в его улучшении. Администрация портала `dmvn.mexmat.net` надеется, что в дальнейшем эти конспекты примут более завершённый вид. Не судите пока строго. Хочется верить, что это начало пути.

Лекция 1.

Определение. S — полукольцо множеств, если:

$\varnothing \in S$; S замкнуто относительно операции $\bigcap$; и если $A_1 \in A$, и $A_1, A \in S$, то $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in S$.

Определение. Кольцо — непустое семейство множеств, замкнутое относительно $\bigcap$. Обозначается R, Δ, $\bigcap$.

Задача 1. Замкнутость относительно $\setminus$, $\bigcap$.

Задача 2. Кольцо является полукольцом.

Задача 3. Какие пары операций на множествах дают определения, эквивалентные кольцу.

Все множества семейства — подмножества множества X.

Если X входит в класс, назовем его единицей.

Определение. Кольцо с единицей — алгебра множеств.

Определение. Если кольцо замкнуто относительно счётных объединений, назовем его δ - кольцом. δ - кольцо с единицей — δ - алгебра.

Определение. Кольцо, порожденное данным семейством — минимальное кольцо, содержащее данное семейство.

$R(S)$ — минимальное кольцо, порожденное S.

Теорема. $\forall A \in R(S)$

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

$\triangle$

$B = \bigcup_{i=1}^{k} C_i,\ C_i \in S.$

$A \bigcap B = \bigcup_{i,j} (B_j \bigcap C_i)$

$A \setminus B = \bigcup_j (B_j \setminus B) = \bigcup \_j \bigcap_i (B_j \setminus C_i),\ B_j \setminus C_i$ принадлежит рассматриваемому семейству.

$A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) \Rightarrow$ семейство замкнуто относительно Δ.

Мера

$m : \mathcal{A} \to [\,0; +\infty);\ \mathcal{A}$ — семейство множеств,

$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B)$

$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ (δ-аддитивность)

$m : S \to [\,0; +\infty),\ S$ — полукольцо

Теорема. Существует единственное продолжение меры $m : S \to [\,0; +\infty)$ на $R(S)$ m', причем если m δ-аддитивна, то $m' - \delta$-аддитивна на кольце.

$A \in R(S),\ A = \bigcup_{j=1}^{n} B_j,\ B_j \in S$

$m'(A) \doteq \sum_{j=1}^{n} m\, B_j$

Проверим, что m' не зависит от представления.

$A = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ — другое представление.

$A = \bigcup_{j,i} (B_j \bigcap C_i),\ B_j \bigcap C_i \in S$

$m'(A) = \sum_{j=1}^{n} m(B_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} m(B_j \bigcap C_i) = \sum_{i=1}^{k} m(C_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} m(C_i) = m'(A)$

Пусть есть второе продолжение m''

$m''(A) = \sum_{j=1}^{n} m''(B_j) = \sum_{j=1}^{n} m(B_j) = m'(A) \Rightarrow m''$ совпадает с m'.

Проверка аддитивности:

$A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$

$A = \bigcup_{i=1}^{m} B_i,\ Bi \in S$

$A_j = \bigcup_{k=1}^{k_j} B_{j,k}$

$m'(A) = \sum_i \sum_{j,k} m(B_{j,k} \bigcap B_i) = \sum_j \sum_{k,i} m(B_{j,k} \bigcap B_i) = \sum m'(A_j) \quad (*)$

Проверим δ-аддитивность.

$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\ A_j = \bigcup_{k=1}^{k_j} B_{j,k}$

Далее пишем (*), только там пользуемся δ-аддитивностью m.

Задача 4. На полукольце прямоугольников площадь — δ-аддитивная мера.

Теорема (полуаддитивность меры).

$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда $m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

(m — δ-аддитивна)

$\triangle$

$B_1 = A \bigcap\ A_1,\ B_2 = (A \bigcap A_2) \setminus B_1$

$B_i = (A \bigcap\ A_i) \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k$

$A = \bigcup_{i=1}^{\infty}$

$mA = \sum_{i=1}^{m}\ B_i \leqslant mA_i$ ($B_i \subset A_i$ в силу монотонности меры)

Внешняя мера

X - основное множество, S - полукольцо.

$E \subset \bigcup_i P_i,\ P_i \in S$

Тогда $\mu^*(E) = \inf\limits_{\bigcup\limits_i P_i \supset E} \sum_{j=1}^{\infty} mP_i$

Свойства внешней меры:

1) полуаддитивность

$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \Rightarrow \mu^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$

Доказательство: приближенно с точностью $\varepsilon/2^j\ \forall\ E_j$

$\mu^*(E_j) + \varepsilon/2^i > \sum_{i=1}^{\infty} mP_{j,i}$; $\bigcup_{j,i} Pj, i$ — покрытие .

$\mu^*(E_j) \leqslant \sum_{i,j} mP_{j,i} \leqslant \sum_j \mu^*(E_j) + \varepsilon$

Так как это верно $\forall\, \varepsilon$, то $\mu^*(E_j) \leqslant \sum_j \mu^*(E_j)$

Определение. Внутренняя мера $\mu_*(E) = mX - \mu^*(X \setminus E)$

Определение. Измеримое множество

(1) $\mu_*(E) = \mu^*(E)$

(2) $\mu^*(A) = \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A \setminus E)\ \forall\ A$

Лекция 2.

$$\mu^* E = \inf_{\bigcup_{k=1}^{\infty} \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} m\, P_k,\ P_k \in S.$$

Задача. Определить μ^* для покрытий $\bigcup_{k=1}^{\infty} \supset E$, эквивалентных исходному.

Если $A \in R(S)$, то $\mu^*(A) = m'(A)$

$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad m'(A) \leqslant \sum_k mP_k \Rightarrow m'(A) \leqslant \mu^*(A)$

Так как $A \in R(S)$, то $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in S.$

$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} mA_i \geqslant \mu^*(A)$, (т.к. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ — одно из покрытий A)

Далее будем считать, что есть функция λ, определенная на всех подмножествах X и обладающая свойствами внешней меры μ^*:

1) $\lambda(\varnothing) = 0$

2) $A \subset B \Rightarrow \lambda(A) \leqslant \lambda(B)$

3) $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Rightarrow \lambda(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$

$E \subset X$ называется λ-измеримым, если $\forall A \quad \lambda(A) = \lambda(A \bigcap E) + \lambda(A \setminus E)$

Теорема. Семейство множеств, измеримых по Каратеодори, образует δ-алгебру множеств, и внешняя мера λ является δ-аддитивной мерой на этой алгебре.

Задача. Для проверки того, что семейство является алгеброй, достаточно проверить его замкнутость относительно дополнения и $\bigcup$.

Замкнутость относительно дополнения видна из определения:

$\lambda(A) = \lambda\,(A \bigcap E) + \lambda(A \bigcap\,(X \setminus E))$, т.е. выполнение равенства для E влечет за собой выполнение равенства для $X \setminus E$

Проверка замкнутости относительно $\bigcup$:

$\lambda(A \bigcap\ (E_1 \bigcup E_2)) + \lambda(A \setminus (E_1 \bigcup E_2)) = \lambda(A \bigcap\ (E_1 \bigcup E_2) \bigcap E_1) + \lambda(A \bigcap\,(E_1 \bigcup E_2) \setminus E_1) + \lambda(A \setminus (E_1 \bigcup E_2)) = \lambda(A \bigcap E_1) + \lambda(A \setminus E_1) = \lambda(A).$

Индуктивно доказывается замкнутость относительно любого конечного количества объединений:

$\lambda(E_1 \bigcup E_2) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2)$

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad S_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$

$\lambda(A) = \lambda(A \bigcap S_n) + \lambda(A \setminus S_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda(A \bigcap E_i) + \lambda(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i) \Rightarrow \lambda(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A \bigcap E_i) + \lambda(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geqslant \lambda(A \bigcap E) + \lambda(A \setminus E) \geqslant \lambda(A)$, т.е. все неравенства можно заменить на равенства.

δ-аддитивность: возьмем в качества A само E. Получим:

$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \bigcup (E_2 \setminus E_1) \bigcup \ldots \bigcup \, (E_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1}) \bigcup \ldots =$
$E_1 \bigsqcup \, (E_2 \setminus E_1) \bigsqcup \ldots \bigsqcup (E_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} E_k) \bigsqcup \ldots \Rightarrow$ получается δ-алгебра.

Применяя определение Каратеодори к μ^*, будем называть получившийся класс множеств **множествами, измеримыми по Лебегу.**

Если $\lambda(E) = 0 \Rightarrow E$ — измеримо.

Определение. Мера называется полной, если при $\delta(E) = 0 \; \forall \; E_1 \subset E$ имеем $\delta(E_1) = 0$

Для множеств, имеримых по Лебегу, μ^* обозначается μ.

Определение. Наименьшая δ–алгебра множеств, содержащая все открытые множества, называется **борелевской** алгеброй. Каждое множество — борелевским множеством.

$\mathcal{F}$ — замкнутые множества, $\mathcal{Y}$ — открытые множества.

$\mathcal{F}_\sigma$ — объединение, $\mathcal{Y}_\delta$ — пересечение.

$\mathcal{F}_{\sigma\delta}, \mathcal{Y}_{\delta\sigma}$

λ определяем на подмножествах метрического пространства.

Мера λ называется **метрической**, если $\forall A, B \; \rho(A,B){>}0$ имеем:
$\lambda \; (A \bigsqcup B) = \; \lambda(A) \; + \; \lambda(B)$
$\rho(A,B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} \rho(x,y).$

Лемма. X — метрическое пространство, λ — метрическая мера, $E \;\in\; G$, G – открытое, $E_k = \{x \in E : \; \rho(x, x \setminus G) \geqslant 1/k\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \lambda E_k = \lambda E$

Очевидно, что $\lim_{k\to\infty} \lambda E_k \leqslant \lambda E$, т.к. E_k — последовательность расширяющихся множеств.

Обозначим $D_k = E_{k+1} \setminus E_k$.

$\rho(D_{k+1}, E_k)$

$x \in E_k, \; y \in D_{k+1}, \; z \in X \backslash G$

$\frac{1}{k} \leqslant \rho(x,z) \leqslant \rho(z,y) + \rho(y,x)$

$\rho(y,x) \geqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \varepsilon > \alpha > 0$

Тогда имеем: $\rho \, (D_{k+1}, E_k) > 0$

$\lambda(E) \leqslant \lambda(E_k) + \sum_{i=k}^{\infty} \lambda(D_i) \Rightarrow$

$\lambda(E) \leqslant \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k)$ (если ряд сходится)

$\rho(D_{k+1}, D_{k-1}) > 0$

$\sum_{i=k}^{\infty} \lambda(D_i) = \sum\limits_{i=2t} + \sum\limits_{i=2t+1}$

Хотя бы один ряд сходится к $+\infty$. Допустим, что $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(D_{2k}) = +\infty$

$\lambda(E_{2k+1}) \to k \to \infty + \infty$, но тогда $lim_{k\to\infty} = +\infty \;\Rightarrow\; lim_{k\to\infty} \lambda E_k \geqslant \lambda E$

Теорема. Если λ — внешняя метрическая мера, то класс борелевых множеств входит в δ–алгебру λ–измеримых множеств.

Достаточно доказать для замкнутых множеств.

E — замкнуто, A — произвольное множество, $G = X \setminus E$

$B_k = \{x \in A : \rho(x, E) \geqslant \frac{1}{k}\}$

$\lim_{k\to+\infty} \lambda B_k = \lambda(A \setminus E)$ (по лемме)

В силу метричности λ :

$\lambda(B_k \bigsqcup (A \bigcap E)) = \lambda(B_k) + \lambda(A \bigcap E), \quad \lambda(B_k \bigsqcup (A \bigcap E)) \leqslant \lambda(A)$

$\lambda(A) \geqslant \lambda(A \setminus E) + \lambda(A \bigcap E)$

$\lambda(A) \leqslant \lambda(A \setminus E) + \lambda(A \bigcap E)$ в силу полуаддитивности

$\Rightarrow \lambda(A) = \lambda(A \setminus E) + \lambda(A \bigcap E)$

Покажем, что в $\mathbb{R}^*$ μ^* является метрической, если $\rho(E_1, E_2) = \alpha > 0$. (В покрытии будем использовать k-мерные интервалы диаметром меньше $\alpha/2$. Тогда покрытие разделяется, и при переходе к inf получим аддитивность)

Если мера определена на δ-алгебре борелевских множеств, будем называть её борелевской.

Лекция 3.

m, m'

$\mu^*(E) = \inf\limits_{\bigcup P_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} m(P_k)$

$\mu^* = m'$ для элементов кольца

$E \subset R(S)$

Покажем, что E входит в класс измеримых множеств.

Обозначим $\mathcal{M}$ — класс измеримых множеств.

$\forall A\ \mu^*(A) = \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A \setminus E)$ (надо доказать)

$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_k \quad \sum_{k=1}^{\infty} mP_k < \mu^*(A) + \varepsilon$ (выбираем такое покрытие)

$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A \setminus E)$ в силу полуаддитивности

$\mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(P_k \bigcap E) + \mu^*(P_k \setminus E) = \sum_{k=1}^{\infty} (m'(P_k \bigcap E) + m'(P_k \setminus E)) = \sum_{k=1}^{\infty} mP_k \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$

$\mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A \setminus E) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$

В пределе при $\varepsilon \to 0 \quad \mu^*(A \bigcap E) + \mu^*(A \setminus E) \leqslant \mu^*(A)$

Значит, выполнено равенство Каратеодори.

Пример неизмеримого множества

$E = \{x_\alpha\}$, где x_α — рациональная точка на единичной окружности, повёрнутая на угол α.

Покажем, что E — неизмеримо. Построенная мера инвариантна относительно сдвига r_n, причем $\bigcup_{n=1}^{\infty} E + r_n = T$. Если E измеримо и имеет меру a, $\{E + r_n\}$ также имеет меру a. Т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} a = 1$, а это невозможно.

Непрерывность меры Лебега

$\{E_k\} \quad E_k \subset E_{k+1}$

Определение. Мера непрерывна, если $\lim_{k\to\infty} \mu E_k = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty})$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 \bigsqcup (E_2 \setminus E_1) \bigsqcup \ldots \bigsqcup (E_k \setminus E_{k-1})$

$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}) = \mu E_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \mu E_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu E_k - \mu E_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$

Свойство непрерывности $\Leftrightarrow$ δ-аддитивности.

Задача. Пусть есть δ-кольцо с единицей, X — единица, $\mu X < +\infty$; $\quad \{E_k\}, E_k \supset E_{k+1}$; тогда $\lim_{k\to\infty} \mu\,(E_k) = \mu\,(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k)$

(доказывается переходом к дополнению)

Задача. Пример, показывающий существенность условия $\mu E < +\infty$

Регулярность внешней меры

Внешняя мера λ **регулярна**, если $\forall\ A \subset X\ \exists B \in M$: B — измерима по Каратеодори и $A \subset B$ т.ч. $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Покажем, что мера, построенная конструкцией Лебега (мера μ^*), регулярна.

$\mu^*(A) + \frac{1}{i} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} mP_{i,k} \geqslant$

$(\forall\, i\ \exists \bigcup_k P_{i,k} \supset A \quad B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{i,k})$

$\geqslant\ \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_{i,k}) \geqslant \mu^*(B) \quad \forall i \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ \mu^* A \geqslant \mu B$

Очевидно, что $\mu^* A \leqslant \mu^* B \Rightarrow \mu^* A = \mu B$

В случае $\mathbb{R}^n \quad B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{i,k} \in \mathcal{Y}_\delta$

(если в качестве элементов полукольца — интервалы)

Для приближения с точностью до ε можно взять открытое множество $E \subset \bigcup_k P_k$

$\mu F_\varepsilon + \varepsilon \leqslant \mu E \leqslant \mu G_\varepsilon - \varepsilon$ для E — измеримого множества

И в $\mathbb{R}_n$ это — достаточное условие измеримости

Внутренняя мера $E \subset X : \mu_*(E) = mX - \mu^*(X \setminus E)$

Множество E **измеримо по Лебегу**, если $\mu^*(E) = \mu_*(E)$, то есть $mX = \mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E)$

Покажем, что это определение эквивалентно определению Каратеодори:

1) опр. Каратеодори $\Rightarrow$ опр. Лебега (очевидно)

2) опр. Каратеодори $\Leftarrow$ опр. Лебега:

$mX = \mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E)$

$A \in \mathcal{M}, \quad \mu^*(E) = \mu(A) \quad (\exists$ такое $E \subset A)$

$X \setminus E \subset B, \quad B \in \mathcal{M}, \quad \mu^*(X \setminus E) = \mu B$

$A \bigcup B = X$

$mX = \mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E) = \mu A + \mu B$

$\mu X = \mu A + \mu B - \mu(A \bigcap B) \Rightarrow \mu(A \bigcap B) = 0$

$A \setminus E \subset A \bigcap B \Rightarrow A \setminus E$ — измеримо

$E = A \setminus (A \setminus E)$ как разность измеримых множеств

F - монотонная неубывающая функция

В качестве кольца: $[\alpha; \beta)$

$m([\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$

$F(x) = \{m([0; x)), \quad x > 0$

$0, \quad x = 0$

$m([x; 0)), \quad x < 0))$

Теорема. Мера m, таким образом, δ-аддитивна на полукольце $[\alpha, \beta) \Leftrightarrow F$ непрерывна слева $(F(t-0) - F(t))$

Необх.

$\mu E_n = F(t) - F(t - \frac{1}{n}) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$\lim_{n \to \infty} \mu E_n = 0$ (т.е. $F(t)$ непрерывна слева по опр. Гейне)

Дост. $[\alpha;\beta) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n)$

$\sum_{n=1}^{k}(F(\beta_n) - F(\alpha_n)) \leqslant F(b) - F(a)$

$F(b) - F(b-\delta) < \varepsilon$ (в силу непрерывности слева)

$F(\alpha_n) - F(\alpha_n - \delta_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

Выберем конечное покрытие $[\alpha, b-\delta]$

$F(b-\delta) - F(a) \leqslant \sum_{n=1}^{N}(F(\beta_n) - F(\alpha_n - \beta_n)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(F(\beta_n) - F(\alpha_n - \beta_n))$

$F(b) - \varepsilon - F(a) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(F(\beta_n) - F(\alpha_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$

В пределе при $\varepsilon \to 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(F(\beta_n) - F(\alpha_n)) \geqslant F(b) - F(a)$

Полученная конструкцией Лебега в этом случае мера называется **мерой Лебега — Стильтьеса**.

Измеримые функции

$\sum_k y_k \mu E_k$

$E_k = \{x : y_{k-1} \leqslant f(x) \leqslant y_k\}$

Надо, чтобы E_k были измеримыми.

Определение. μ — δ-аддитивная мера, $\mathcal{M}$ — класс измеримых множеств; $f : X \to \mathbb{R}$ — измерима, если $\forall c\ E_c = \{x \in X, f(x) < C\} \in (M)$

Задача. Доказать, что будут измеримы множества, у которых $f(X) \leqslant C, f(X) > C, f(X) \geqslant C$ для $f(x)$ – измеримых.

Лекция 4.

f — измерима, если $\{x \in X : f(x) < C\}$ — измеримо. В качестве эквивалентного определения можно принять $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, но нельзя принять $=$.

$(X, (M))$

Лемма. f, g — измеримы $\Rightarrow \{f(x) < g(x)\}$ — измеримо.

Доказательство.

$Q = r_k, \quad \{f(x) < g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f(x) < r_k < g(x)\}$

$\{f(x) < r_k < g(x)\}$ — измеримо $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f(x) < r_k < g(x)\}$ — измеримо.

Лемма. f — измерима $\Rightarrow$ $f + a,\ af$ — измерима.

Теорема. g, f — измеримы $\Rightarrow g+f,\ gf,\ f/g$ — измеримы.

Доказательство. $\{f+g<C\}=\{f(x)<-g(x)+C\}$ — измеримо

$\{f^2(x)<C\}=\{-\sqrt{C}<f(x)<\sqrt{C}\}$ — измеримо

$fg=\frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}\Rightarrow fg$ — измеримо

$\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$ (считаем,что $g\neq 0$)

Надо доказать, что $\{\frac{1}{g(x)}<C\}$ — измеримо. Для этого необходимо рассмотреть множества $\{g(x)>0\}$ и $g(x)<0$ и случаи знака C. ⋄

Пусть есть последовательность $\{f_n\}$.

$\{\sup\limits_n f_n(x)>C\}=\bigcup\limits_n\{f_n(x)>C\}$, т.е $\sup\limits_n f_n(x)$ измерим.
$\{\inf\limits_n f_n(x)<C\}=\bigcup\limits_n\{f_n(x)<C\}$, т.е $\inf\limits_n f_n(x)$ измерим.
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\inf\limits_m(\sup\limits_{n\geqslant m}f_n(x))\Rightarrow\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$ — измерим.
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\sup\limits_m(\inf\limits_{n\geqslant m}f_n(x))\Rightarrow\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$ — измерим.
А тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ — измерим.

Множество, где $f_n(x)$ сходится, измеримо (т.к. на нем выполнено равенство верхнего и нижнего предела).

$(X,\mathcal{M},\mu)$, μ — полная δ–аддитивная мера. Если $\mu A=0$, E — измеримо, то $E\bigcup A$ и $E\backslash A$ — измеримы. Это верно и в другую сторону. Во всех утверждениях можно считать функцию п.в.

Определение. f — простая функция, если f принимает конечное число значений, т.е. $f(x)=a_k,\ x\in E_k,\ \bigsqcup_{k=1}^n E_k=E$.

Будут иметься в виду измеримые простые функции. Для простых функций в определении достаточно $\{x\in X: f(x)=C\}\in\mathcal{M}$, $\quad f(x)=\sum_{k=1}^n a_k\chi_{E_k}(x)$

Теорема. $\forall f$ — измеримой $\exists\,\{f_k(x)\}$, т.ч. $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)\ \forall x\in\ E$. Причем, если $f(x)\geqslant 0$, то $\{f_k(x)\}$ можно выбрать монотонно неубывающей.

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{l-1}{2^k}, & \dfrac{l-1}{2^k}\leqslant f(x)<\dfrac{l}{2^k}\\ k, & f(x)\geqslant k\end{cases}$$

Эта последовательность поточечно сходится к f, т.к. $\mid f(x)-f_k(x)\mid<\ 1/2^k$ $\exists\,\mathcal{K}>f(x):\forall x>\mathcal{K}_n$

$f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x)$

Если $f(x)$ — произвольного знака, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, где $f^+(x) = max\{f(x), 0\}$ — измерима, если f — измерима.

Для f^+ и f^- применяем предыдущую часть теоремы, и берем затем разность этих последовательностей.

Определение. $f_k \xrightarrow{\mu} f$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\{|f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Теорема. $\lim_{k\to\infty} f_k(x) \overset{\text{п.в.}}{=} f(x) \ \Rightarrow\ f_k \xrightarrow{\mu} f$

Доказательство.

$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k(\varepsilon),\ A_k(\varepsilon) = \{x : |f_k - f| \geqslant \varepsilon\}$

$B(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon) \Rightarrow$ если $x \in B(\varepsilon)$, то получ. расход. $\Rightarrow \mu(B(\varepsilon)) = 0$

B_n убывает с ростом $n \Rightarrow$ монотонная последовательность.

По свойству непрерывности меры $\mu(B_n(\varepsilon)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(B(\varepsilon)) = 0$

$\mu(A_n(\varepsilon)) \leqslant \mu(B_n(\varepsilon)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Задача. Построить пример последовательности, сходящейся по мере, но не сходящейся п.в.

Задача. (теорема Риса) $f_k \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow$ можно выделить сходящуюся п.в. подпоследовательность.

Теорема. (Егорова)

$f_n(x) \to f(x)$ п.в. на E

$\forall \delta > 0 \quad E_\delta\ :\ \mu(E_\delta) < \delta \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \backslash E_\delta$(при условии $\mu E < \infty$)

Доказательство. Рассмотрим множества $B(\varepsilon)$, построенные в предыдущей теореме, только в этот раз $\varepsilon_k \to 0$

$\mu(B_n(\varepsilon_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0; \quad \mu(B_n(\varepsilon_k)) < \dfrac{\delta}{2^k}; \quad \mu E_\delta \leqslant \sum\limits_k \dfrac{\delta}{2^k} = \delta$

$E_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k}(\varepsilon_k)$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_k,\ n > n_k$

Теорема. (Лузина о С-свойстве) Если функция измерима на отрезке $E \Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists$ замкнут. $F_\delta : f \mid_{F_\delta}$ – непрерывна, $\mu(E \setminus F_\delta) < \delta$

$(\mu\{g(x) \neq f(x)\} < \delta, g(x)$ – непрерывна)

Доказательство. Следует из теоремы Егорова и теоремы о приближении $f_k(x) \to f, \{f_k(x)\}$ — последовательность простых функций.

$\forall\, f_k\ \exists\, F_k$ — измерим., откр., $\mu(E\backslash F_\delta) < \delta/2^{k+1}$ и f_k непрерывна на F_k относительно F_k.

$\mu(E\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) < \delta/2$.

Выбросив множество меры $\delta/2$, получим на оставшемся замкнутом множестве $f_k(x) \rightrightarrows f(x)$, и $f(x)$ получится непрерывной на замкнутом множестве.

Задача. Доказать в обратную сторону.

Интеграл Лебега

$(X, (M), \mu)$, μ полагаем полной.

Определяем интеграл Лебега на измеримом множестве E для $f(x) \geqslant 0$

Определение.

$$(L)\int\limits_E f d\mu = \sup_{E=\bigcup_{k=1}^n E_k} \left(\sum_{k=1}^n \inf_{x\in E_k} f(x)\mu E_k \right)$$

Задача. Если f — простая, принимающая значения a_k на E_k, тогда $(L)\int\limits_E f d\mu = \sum\limits_k a_k \mu E_k$

Лекция 5.

$(X, (M), \mu)$

μ — δ–конечна, если $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $\mu X_i < +\infty$

$(L)\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{E=\bigcup_j E_j} \left(\sum\limits_j (\inf\limits_{x\in E_j} f(x))\mu E_j \right)$, для меры и $f(x)$ разрешено принимать значение $+\infty$.

Если интеграл принимает значение ∞, мы не будем говорить, что функция интегрируема.

Определение. Суммируемая функция — интегрируемая по Лебегу с конечным значением интеграла.

Утверждение Если $f(x)$ измерима и $f(x) \geqslant 0$ (на измеримом множестве) и суммируема, то тогда $f(x)$ конечна и суммируема, то тогда $f(x)$ конечна п.в.

$\{x \in E : f(x) = +\infty\} = E \setminus (\bigcup_{N=1}^{\infty} \{f(x) < N\}) \quad \Rightarrow$

$\{x \in E : f(x) = +\infty\}$ — измеримо $\Rightarrow$

$\mu\,\{x \in E : f(x) = +\infty\} = 0$

$E_1 \subset E, E_1$ — измеримо, $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow$

$\int_{E_1} f d\mu \leqslant \int_E f d\mu$

$f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$

$f(x) = a_j,\ x \in E_j$ ($f(x)$ – простая функция)

Тогда $(L) \int_E f d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu E_j$

Это можно считать определением интеграла для простой неотрицательной функции.

f, g — простые функции

$f(x) = a_j, \quad x \in E_j$

$g(x) = b_i, \quad x \in E_i$

Тогда:

1. $\int_E (f+g) d\mu = \sum_i \sum_j (a_j + b_i)\, \mu(E_j \bigcap E_i') = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$
2. $\int_E (cf) d\mu = c \int_E f d\mu$
3. $E = E_1 \bigcup E_2 \quad \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu = \int_E f d\mu$

Теорема (о вычислении интеграла Лебега через простые функции)

$f(x) \geqslant$ на E - измер., $f_k(x) \nearrow f(x), \{f_k(x)\}$ — последовательность простых измеримых функций.

Тогда $(L) \int_E f d\mu = lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu$

♦

$f_k(x) \leqslant f(x)$

$(L) \int_E f_k d\mu \leqslant (L) \int_E f d\mu \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} (L) \int_E f_k d\mu \leqslant (L) \int_E f d\mu$

Докажем неравенство в другую сторону

$\inf\limits_{x\in E_j} f(x) = a_j, E = \bigcup_{j=1}^n E_j$

$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) \geqslant a_j \quad \forall x \in E_j$

Возьмем $\varepsilon > 0$

$A_{jk} = \{x \in E_j : f_k(x) > a_j - \varepsilon\}$

$E_j = \bigcup\limits_k A_{jk}$ (так как $lim_{k\to\infty} f_k \geqslant a_j$)

$A_{jk} \subset A_{j(k+1)}$ (так как f_k — монотонная), то есть это монотонно растущая последовательность $\Rightarrow$ (по непрерывности меры) $\mu A_{jk} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu E_j$

$\int_{E_j} f_k d\mu \geqslant \int_{A_{jk}} f_k d\mu > (a_j - \varepsilon) \mu A_{jk}$

$\lim_{k\to\infty} \int_{E_j} f_k d\mu \geqslant a_j \mu E_j$

Получаем $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k d\mu \geqslant \sum_j a_j \mu E_j$, так как разбиение произвольно, то $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k d\mu \geqslant \sup\limits_{\bigcup_{j=1}^n E_j=E} \sum_j a_j\mu E_j = (L)\int_E f d\mu$

$\lozenge$

Предельным переходом получаем для $f, g \geqslant 0$

1. $\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

2. $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$

3. $\int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu = \int_{E_1 \bigcup E_2} f d\mu f d\mu, \quad E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$

Значение интеграла не зависит от значения $f(x)$ на множестве меры 0.

Определим интеграл Лебега для функций любого знака $f = f^+ + f^-$

$f^+ = max\{f(x); 0\}, \quad f^- = max\{f(x); 0\}$

Если f — изм. $\Rightarrow f^+, f^-$ — измер.

$(L)\int_E f d\mu =$ (по определению)$(L)\int_E f^+ d\mu - (L)\int_E f^- d\mu$

Говорим, что интеграл существует, если хотя бы один из этих двух интегралов (от f^+ и f^-) конечен.

f называют интегрируемой, если оба интеграла, входящие в определение, конечны.

Свойства интеграла Лебега.

1. $\mu E = 0 \Leftrightarrow \int_E f d\mu = 0$

2. $f \sim g$ (f и g совпадают п.в.) $\Rightarrow$ существует$(L)\int_E f d\mu$

$\Leftrightarrow$ существует $(L)\int_E g d\mu$ и $(L)\int_E f d\mu = (L)\int_E g d\mu$

3. $f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$

4. $f(x)-$ интегрируемая $\Rightarrow f(x)$ конечна п.в. $(f(x) \in L(E))$

5. $E_1 \subset E, \int_E f d\mu$ существует $\Rightarrow \int_{E_1} f d\mu$ существует (f суммир. на $E \Rightarrow$ f суммир. на E_1)

6. f измерима на E, $f \in L(X) \Leftrightarrow |f| \in L(E)$

$|f| = f^+ + f^-$

$|\int_E f d\mu| \leqslant \int_E f^+ + \int_E f^- d\mu = \int_E |f| d\mu$

7. $f, g-$ измеримы на E $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ п.в. $\Rightarrow \int_E |f| d\mu \leqslant \int_E |g| d\mu$

8. $\int_E (cf) d\mu = c\int_E f d\mu$

9. $\int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu = \int_{E_1 \bigcup E2} f d\mu$ $(E_1 \bigcap E_2 = \varnothing)$

10. $\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

Если f и g суммир. $\Rightarrow f+g$ суммируемы

$|f+g| \leqslant |f| + |g|$

11. $f(x) \geqslant 0$ на E, $m \leqslant g(x) \leqslant M$ п.в. на E, тогда $m\int_E f d\mu \leqslant M\int_E f d\mu$

Предельный переход под знаком интеграла

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),\ f_k(x) \geqslant 0$

Тогда $(L)\int_E f\mu = \sum_{k=1}^{\infty}(L)\int_E f_k d\mu$

$\blacklozenge \sum_{k=1}^{N} f_k(x) \leqslant f(x)$

$\sum_{k=1}^{N}(L)\int f_k(x)d\mu \leqslant (L)\int_E f d\mu$

$\sum_{k=1}^{\infty}(L)\int f_k d\mu \leqslant (L)\int_E f d\mu$

Докажем неравенство в другую сторону:

$f_{k_j} \nearrow_{j\to\infty} f_k,\ f_{k_j}$ — простые функции

$(*)\ S_j = \sum_{k=1}^{j} f_{k_j} \leqslant \sum_{k=1}^{j} f_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f_k = f$

$lim_{j\to\infty} S_j(x) \leqslant f(x)$

Фиксируем n. Пусть $j > n$

$S_j \geqslant \sum_{k=1}^{n} f_{k_j}; lim_{j\to\infty} S_j(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $\forall$ фиксированных n

$\lim_{j\to\infty} S_j(x) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$

Значит, $\lim_{j\to\infty} S_j(x) = f(x)$

Тогда $(L)\int f d\mu = \lim_{j\to\infty}\int_E S_j d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k d\mu$

$\int_E S_j d\mu < \sum_{k=1}^{j}\int_E f_k d\mu$ $\blacklozenge$

Следствие. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),\ f_k \geqslant 0$, и сходится $\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k d\mu \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится п.в.

Верно, т.к. если $\int_E f d\mu$ конечен, то f конечен п.в.

Задача. Пусть $\mathbf{R} = \{r_n\}$, доказать, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\sqrt{x-r_k}}$ сходится п.в.

Лекция 6.

$\delta-$ аддитивность интеграла Лебега

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,\ E_k$

f, инт. для f имеет смысл

Тогда $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f d\mu$

Задача. Из правой части не следует, что интеграл слева существует

Доказательство. Сначала докажем для неотрицательныхъ функций $f \geqslant 0,\ f = \sum_{k=1}^{\infty} f\dot{\chi}_{E_k}$

Так как этот ряд можно почленно интегрировать, получаем требуемое равенство. Если $f(x)$ любого знака, то $f = f^{+} + f^{-}$, далее примен. доказанную часть теоремы для f^{+} и f^{-} (примен., так как предполагается, что интегрирование слева имеет смысл)

$f_k \nearrow f$ п.в., $f_k \geqslant 0$, измерим. (на измеримом множестве E) $\Rightarrow$ $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$

Доказательство. Ясно, что $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu \leqslant \int_E f d\mu$

Если $\exists k :\ \int_E f_k d\mu = +\infty$, то будет равенство. Оставшуюся часть доказательства можно провести в предположении: $\int_E f_k d\mu$ конечен $\Rightarrow f_k$ кон. п.в.

Пусть f_k кон. вне $F_k,\ \mu F_k = 0$

F_0 — множество, на котором не имеет места монотонная сходимость

На $E\ (\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k)\ f_k \nearrow f$ и все f_k конечны

Значит, $f = f_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1} - f_k)\ E\ (\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k)$

$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_E (f_{k+1} - f_k) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (\int_E f_{k+1} d\mu - \int_E f_k d\mu) + \int_E f_1 d\mu$

$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$

Теорема Б. Леви.

$f_k(x) \nearrow f(x)$ п.в. $f_k \in L(E) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$

$\lozenge$ Переходим к $f_k - f_1 \nearrow f - f_1$

$lim_{k\to\infty} (\int_E f_k - \int_E f_1) = \int_E f d\mu - \int_E f_1 d\mu$ $\blacklozenge$

Следствие. Если в условиях теоремы Б. Леви$\int_E f_k d\mu \leqslant C \Rightarrow f$ кон. п.в. и интегрируема.

Если $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu = +\infty \Rightarrow\ f$ неинтегрируема.

Теорема Фату. $f_k \to f$ п.в. на $E,\ f_k(x) \geqslant 0$. Тогда $\int_E f d\mu \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu$

Задача. Показать, что этих условий недостаточно для выполнения равенства

Доказательство. $\varphi_k(x) = \inf_{n\geqslant k} f_n(x)$. Это монотонно $\nearrow$ последовательность.

$\varphi_k(x) \nearrow f(x)$ $\varphi_k(x) \leqslant f_k(x)$

$\int_E f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k d\mu$

Теорема Лебега.

$f_k(x) \longrightarrow f(x)$ $|f_k(x)| \leqslant \varphi(x) \in L(E)$ $\Rightarrow \int_E f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu$

$\Diamond$ $|f_k(x)| \leqslant \varphi(x) \Rightarrow (x) f(x)$ — интегрируема.

Сначала докажем для $f_k(x) \geqslant 0$

$\int_E f d\mu \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu \leqslant \int_E \varphi d\mu$ по теореме Фату.

$\varphi - f_k \geqslant 0$

$\int_E \varphi d\mu - \int_E f d\mu \leqslant \underline{\lim}_{k\to} \int_E (\varphi - f_k) d\mu \leqslant \int_E \varphi d\mu - \overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_K d\mu \Rightarrow$
$\int_E f d\mu \geqslant \overline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu \Rightarrow \int_E f d\mu = \lim_{k\to\infty} f_k d\mu$

$-\varphi(x) \leqslant f_k(x) \leqslant \varphi(x)$

$0 \leqslant f_k(x) + \varphi(x) \leqslant 2\varphi(x)$

Доказанная часть применима к этой последовательности: $\lim_{k\to\infty}(\int_E f_k d\mu + \int_E \varphi d\mu) = \int_E (f+\varphi) d\mu$ ⧫

Задача. Показать, что в теореме Леви условие интегрируемости нельзя заменить на условие существенной интегрируемости

Задача. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}} = 1$ (обосновать предельный переход под знаком интеграла)

Задача. $\mu E < \infty, f(x) \geqslant C$. Доказать, что верна теорема Лебега.

Определение. Срезка $f(x)$

$$f^N(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant N \\ N, & \text{f}(x) > N \\ -N, & \text{f}(x) < -N \end{cases}$$

$\int_E f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_E f^N d\mu$, так как $|f^N| \leqslant f \in L(E)$

Если $f \geqslant 0$, то кон. $\lim_{N\to\infty} \int_E f^N d\mu$ — условие существования $\int_E f d\mu$. Это следует из теоремы Леви.

Теорема. Если f — интегрируема на E, то $\int_E |f - f^N| d\mu \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

$\Diamond$ $f - f^N = f^+ - (f^N)^+ - (f^- - (f^N)^-)$

Применим утверждение для положительной и отрицательной части функции и получим требуемое утверждение. ⧫

Лемма. $E \subset [a,b]$, E измерима. $\Rightarrow$

$(\mathcal{M}) \int_a^b \chi_E dx = \mu(E) = (L) \int_{[a,b]} \chi_E d\mu$

$\Diamond$ Пусть E — открытое множество, $E = G = \bigcup_n (\alpha_n, \beta_n)$

$\chi_G(x) = \lim_{k\to\infty} (\bigcup_{n=1}^k (\alpha_n, \beta_n))$

По теореме Б. Леви предельным переходом получаем требуемую формулу. Переходом к дополнению получим такое утверждение для замкнутых множеств. $\blacklozenge$

E — измерим., $\{F_k\}$ — замкнут.

$F_k \subset F_{k+1} \subset \ldots \subset E$

$\mu(E \ \bigcup_k F_k) = 0$ (так как для измеримого множества возможно приближение с любой точностью)

$\chi_E = \chi_A + \chi_{\bigcup_k F_k}$ $(A = E \ \bigcup_k F_k)$

$\chi_E = \chi_A + \lim_{k\to\infty} \chi_{F_k}$, $\chi_{F_k} \nearrow \chi$

Применим теорему Б. Леви (или теорему о неотрицательных функциях). Интеграл Мак–Шейна и Лебега совпадают для χ_A и $\chi_{\bigcup_k F_k} \Rightarrow$ они совпадают для χ_E

Теорема. На отрезке прямой интеграл Мак-Шейна совпадает с интегралом Лебега.

$\Diamond$ Докажем сперва для неотрицательных функций. $f_k \nearrow f, f_k$ — простые

Интегралы f_k совпадают. Применим теорему Леви и получим совпадение пределов.

Если f — произвольного знака, то $f = f^+ + f^-$. Если f интегрируема по Лебегу $\Rightarrow$ f^+, f^- интегрируемы по Лебегу. $\Rightarrow$ f^+, f^- интегрируемы по Мак–Шейну $\Rightarrow$ f интегрируема по Мак–Шейну $\Rightarrow$ $|f|$ интегрируема по Мак-Шейну $\Rightarrow$ f^+, f^- интегрируемы по Мак–Шейну$\Rightarrow$ f^+, f^- интегрируемы по Лебегу $\Rightarrow$ f интегрируема по Лебегу. $\blacklozenge$

Теорема. Если некоторые интегралы сходятся абсолютно на отрезке $\Rightarrow$ функция интегрируема по Лебегу.

Задача. Привести пример того, что обратное неверно.

Задача. Обобщить утверждение теоремы для всей прямой.

Лекция 7.

Определение. $f \in N[a,b]$ интегрируема по Ньютону, если существует $F(x) : F'(x) = f(x)$

$(N)\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$

Интеграл Лебега не покрывает интеграл Ньютона.

Теорема. Неопределенный интеграл Лебега дифф. п.в. $F(x) = (L)\int_a^x f d\mu \Rightarrow F'(x) = f(x)$ (п.в.)

$f \in L[a,b]$

$L(X, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство Лебега, состоящее из классов эквивалентных функций.

$f \sim g \Leftrightarrow \mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0$

$\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$

$\rho(f,g) = \in_x |f - g| d\mu$ — метрика $\Rightarrow L(X, \mathcal{M}, \mu)$

$\chi \in \mathcal{L}$

$\int_x |f - f^N| d\mu \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, то есть каждая измеримая функция может быть с любой точностью приближена ограниченной функцией (по метрике).

$\forall \varepsilon > 0\, \forall f \in \mathcal{L}\ \exists |g_\varepsilon(x)| < A :\ \rho(f, g_\varepsilon) < \varepsilon$

Если верна теорема Лузина, то ограниченную функцию можно приближать непрерывными, ограниченными той же константой. То есть $\exists \varphi$ непрерывная, $\mu\{g_\varepsilon \neq \varphi\} < \varepsilon/A$, $|\varphi(x)| < A$

Докажем для отрезка: $\int_a^b |g_\varepsilon(x) - \varphi(x)| d\mu < 2A\varepsilon/A = 2\varepsilon$

$\forall f \in \mathcal{L} \quad \exists \varphi\ \rho(f, \varphi) < 3\varepsilon$

Определение. $f_n \xrightarrow{L} f \Leftrightarrow \rho(f_n, f) \xrightarrow{n\to\infty}$ (сходимость в метрике)

Теорема. (неравенство Чебышева)

$f \in L(E) \Rightarrow \mu\{x \in E :\ |f(x)| \geqslant C\} \leqslant \frac{1}{c}(L)\int_E |f| d\mu$

$E_c = x \in E : |f(x) \geqslant C|$

$c\mu E_c = \int_{E_c} c d\mu \leqslant \int_{E_0} |f| d\mu \leqslant \int_E |f| d\mu$

Утверждение. $f_n \in L(E), \int_E |f - f_n| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \mu\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_E |f - f_n| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Задача. Связь сходимости в метрике с другими видами сходимости

Задача. $\mu\{x \in E : |f(x) \geqslant C|\} = \underset{\sim}{O}(\frac{1}{c}), c \to \infty$

Если $f(x)$ суммируема на E, то $\mu\{x \in E : |f(x) \geqslant C|\} = \underset{\sim}{O}\ (\frac{1}{c}), c \to \infty$

Пример измеримой несуммируемой функции, для которой это выполнено.

$L(X, \mathcal{M}, \mu)$ — нормированное пространство с нормой $\|f\| = \int_E |f| d\mu$, при условии, что элементы пространства — классы эквивалентности (иначе нет условия $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 0 в нашем пространстве соответствует классу эквивалентности)

Можно рассматривать L^p — пространство функций, интегрируемых p раз по Лебегу.

$f \in L(E) \Rightarrow f \in L(E')\ \forall E' \subset E, E' \in \mathcal{M}$

$\varphi(E) = \int_{E_1} f d\mu$ — неопределенный интеграл Лебега

φ — аддитивная функция

Определение. $(X, \mathcal{M})$, $\mathcal{M} - \delta$-алгебра

φ — аддитивная функция множества, если

$\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ и является δ–аддитивной : $\varphi(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_k)$

$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k \subset_{E_{k+1}} \subset \ldots$

$\varphi(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(E_k)$ — доказывается так же, как непрерывность меры.

$A_1 = E_1,\ A_2 = E_2\ E_1,\ \ldots,\ A_k = E_k\ E_{k-1}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$\varphi(\bigcup_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)$

$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k \supset E_{k+1} \supset \ldots$

$\varphi(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(E_k)$

Док. переходом к дополнению (не нужно оговаривать конечность меры)

$\varphi \geqslant 0 \quad E_k$ — последовательность множеств.

$\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k = \bigcup_k \bigcap_{n \geqslant k} E_n$

$\varphi(\underline{\lim}_{k\to\infty}) \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \varphi(E_k) \leqslant \overline{\lim}_{k\to\infty} \varphi(E_k) \leqslant \varphi(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k)$

$A_k = \bigcap_{n \geqslant k} E_n \nearrow_{k\to\infty}$

$\varphi(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to} \varphi(A_k) \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty}(\varphi(E_k))$

Вторая часть доазательства аналогично переходом к $\searrow$ последовательности или переходом к дополнению.

$(X, \mathcal{M}), \varphi$ — аддитивная функция.

Определение. $\bar{\mathrm{V}}(E, \varphi)$ — верхняя вариация относительно φ

$\bar{\mathrm{V}} = \sup_{A \subset E} \varphi(A), A \in \mathcal{M}$

$\underline{\mathrm{V}} = -\inf_{A \subset E} \varphi(A), A \in \mathcal{M}$ — нижняя вариация

Полная вариация: $V = \bar{\mathrm{V}}(E) + \underline{\mathrm{V}}(E)$

Из определения следует, что $\varphi(\varnothing) = 0$

$\underline{\mathrm{V}}$ (E, q) $= \bar{\mathrm{V}}(E, -\varphi)$

$\varphi(E) = \int_E f d\mu$, тогда $\bar{\mathrm{V}}E = \int_E f^+ d\mu$, $\underline{\mathrm{V}}(E) = \int_E f^- d\mu$

$V(E) = \int_E |f| d\mu$

Покажем, что $\underline{\mathrm{V}}$, $\bar{\mathrm{V}}$, V — аддитивные функции множества

1. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}$, $E_k \in \mathcal{M}$

$H_k = E_k \ (\bigcup_{n=1}^{k-1} E_n) \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$

$A \subset E \ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \bigcap H_k) \ A \bigcap H_k \subset E_k \Rightarrow$

$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A \bigcap H_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathrm{V}} E_k$, переходя к sup по A, получаем: $\underline{\mathrm{V}}(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathrm{V}} \ (E_k)$ — полуаддитивность.

То же верноля $\bar{\mathrm{V}}(E) \Rightarrow$ верно для $V(E)$

2. Проверим конечность $\underline{\mathrm{V}}$, $\bar{\mathrm{V}}$, V. Достаточно доказать для V:

Предположим, что $\exists E : \ V(E) = +\infty$

$E = E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_k \supset \ldots, |\varphi(E_k)| \geqslant k - 1$

$V(E_k) = +\infty$

Строим: для E_1 это выполнено.

Так как $V(E_k) = +\infty \Rightarrow \exists \, A \subset E_k : |\varphi(E_k)| \geqslant |\varphi(E_k)| + k$

$|\varphi(A \ E_k)| \geqslant |\varphi(A)| - |\varphi(E_k)| \geqslant k$

$V(E_k) \leqslant V(A) + V(E_k \ A) \Rightarrow V(A) \ V(E_k \ A) = \infty$

В качестве E_k возьмем то из них, на котором вариация — ∞

Так как это $\searrow$ последовательность, $\varphi(\bigcap_k E_k) = \lim_{k \to \infty} \varphi(E_k) = \infty \Rightarrow$ противоречие с конечностью φ

3. Докажем противоположное неравенство:

Полагаем $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

докажем: $\bar{\mathrm{V}}(E) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathrm{V}}(E_k)$ - ε

Устремим ε к нулю, получим:

$\bar{\mathrm{V}}(E) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathrm{V}}(E_k)$

Разложение Жордана.

$\varphi(E) = \bar{\mathrm{V}}(E) - \underline{\mathrm{V}}(E)$

Доказательство.

$A \subset E \quad \varphi(E) = \varphi(A) + \varphi(E \setminus A)$

$\varphi(A) = \varphi(E) - \varphi(E \setminus A)$

Переходим к sup и получаем

$\bar{\mathrm{V}}\ (E) = \varphi(E) - \inf_{A \subset E} \varphi(E \setminus A) = \varphi(E) + \underline{\mathrm{V}}\ (E)$

Лекция 8.

$(X, \mathcal{A}, \mathcal{M})$

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция.

φ абсолютно непрерывна относительно μ, если $\forall E \in \mathcal{A}\ \mu E = 0$ имеем $\varphi(E) = 0$

Определение. φ сингулярна относительно μ, если $\exists z \in \mathcal{A},\ \mu z = 0$, т. что $\varphi(A) = 0$, если $A \bigcap z = \varnothing$ (или $\forall A \varphi(A) = \varphi(A \bigcap z)$)

Задача.

1. φ абсолютно непрерывна и сингулярна $\Rightarrow \varphi \equiv 0$

2. линейная комбинация абсолютно непрерывных (сингулярных) функций абсолютно непрерывна (сингулярна)

3. φ — абсолютно непрерывна (сингулярна) $\Leftrightarrow V$, $\bar{\mathrm{V}}$, $\underline{\mathrm{V}}$ — абсолютно непрерывны (сингулярны)

4. φ_k — последовательность абсолютно непрерывных (сингулярных) аддитивных функций, φ — её предел (т.е. $\varphi(A) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow \varphi$ — абсолютно непрерывна (сингулярна)

$\varphi(E) = \int_E f d\mu$ — абсолютно непрерывная функция

Далее рассматриваем все на E, $\mu E < \infty$

Утверждение. φ — абсолютно непрерывна относительно $\mu \Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0\ \forall A :\ \mu A < \delta \Rightarrow\Rightarrow |\varphi(A)| < \varepsilon$

Необходимость. $\mu A = 0, \mu A < \delta\ \forall \delta > 0$, тогда $\varphi(A) < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$

Достаточность. Предположим φ — абсолютно непрерывна и утверждение не выполнено. Сначала докажем для $\varphi \geqslant 0$.

$\exists \varepsilon :\ \delta_k = \frac{1}{2^k}, \mu A_k < \frac{1}{2^k}, \varphi(A_k) \geqslant \varepsilon$

$\overline{\lim}(A_k) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k \geqslant m} A_k$

$\mu \overline{\lim} A_k = \mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k \geqslant m} A_k) \leqslant \mu(\bigcup_{k \geqslant m} A_k) \leqslant \sum_{k \geqslant m} \mu A_k < \sum_{k \geqslant m} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} \Rightarrow 0$

То есть $\mu A = 0$ (так как не зависит от m)

$\varphi(\overline{\lim}(A_k)) \geqslant \overline{\lim}_{k \to \infty} \varphi(A_k) \geqslant \varepsilon$ (было доказано для $\varphi \geqslant 0$)

То есть получаем противоречие ($\mu A = 0$ $\varphi(A) \geqslant \varepsilon$)

Теперь докажем для φ произвольной.

Если φ абсолютно непрерывна $\Rightarrow V$ абсолютно непрерывна.

$|\varphi(A)| \leqslant V(A) < \varepsilon \Rightarrow$ выполнено утверждение

Задача. φ сингулярна относительно μ на $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists A \subset F$: $\mu A < \varepsilon$

$V(E \setminus A, \varphi) < \varepsilon$

Теорема Хана. $\mu E < \infty$, φ — аддитивная мера. Тогда $\exists P \subset E$ $\forall$

$A \subset P$ $\varphi(A) \geqslant 0$, $\forall A \subset E \setminus P \varphi(A) \leqslant 0$

Доказательство.

$\underline{\mathrm{V}}(P) = 0$ равносильно первой части утверждения

$\bar{\mathrm{V}}(E \setminus P) = 0 \Leftrightarrow \exists P \subset E$ $\forall A \subset E \setminus P$ $\varphi(A) \leqslant 0$

Докажем утверждение для вариации

Замечание: если $\underline{\mathrm{V}}(P) = 0$, $\bar{\mathrm{V}}(E \setminus P) = 0$, то $\bar{\mathrm{V}}(E) = \bar{\mathrm{V}}(P)$

$E \supset A_k : \varphi(A_k) > \bar{\mathrm{V}}(E) - 1/2^k \Rightarrow$ ($\exists$ такое A_k по определению $\bar{\mathrm{V}}$)

$\bar{\mathrm{V}}(A_k) > \bar{\mathrm{V}}(E) - 1/2^k \Rightarrow \bar{\mathrm{V}}(E \setminus A_k) < 1/2^k$

$\varphi(A_k)$ $\bar{\mathrm{V}}(A_k)-$ $\underline{\mathrm{V}}(E) - 1/2^k$

$\bar{\mathrm{V}}(A_k)$ - $\underline{\mathrm{V}}(A_k) > \bar{\mathrm{V}}(E) - 1/2^k$

$\bar{\mathrm{V}}(A_k) < \bar{\mathrm{V}}(E)$ - $\underline{\mathrm{V}}(A_k)$

$\underline{\mathrm{V}}(A_k) < 1/2^k$

$p = \underline{\lim} A_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k \geqslant m} A_k$

$\underline{\mathrm{V}}(P) \geqslant \underline{\lim}_{k \to \infty}$ $\underline{\mathrm{V}}(A_k = 0)$

$\bar{\mathrm{V}}$ $(E \setminus \underline{\lim} A_k) = \bar{\mathrm{V}}$ $(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k \geqslant m} (E \setminus A_k)) \leqslant \bar{\mathrm{V}}$ $(\bigcup_{k \geqslant m} (E \setminus A_k))$

$\leqslant \sum_{k=m}^{\infty} \bar{\mathrm{V}}$ $(E \setminus A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2^{m-1}} \to 0$

$V(E \setminus A_k) < 1/2^k$

$\bar{\mathrm{V}}(E \setminus P) = 0$

Теорема. (об обобщенном разложении Хана)

$\varphi(A) \geqslant 0, \mu$ — мера, тогда $\forall a > 0$ $E = Z\bigcup(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k), \mu Z = 0, E_k :$ $\forall\, A \in E_k$ выполнено

$a(k-1)\mu A \leqslant \varphi(A) \leqslant ak\mu A$

Достаточно доказать при $a = 1$ (иначе от φ переходим к φ/a)

Рассмотрим φ — μ – функция множества.

$\exists P = E^+ :\ \forall A\ \subset E^+ : \varphi(A) \geqslant \mu(A)$ Пусть $E \setminus P = E^- :\ \forall A\ \subset E^- : \varphi(A) \leqslant \mu(A)$

Пусть $E^- = E_1$

$\varphi - 2\mu$. Применяем к ней предыдущую теорему.

$E^+ \to E^{++} \quad \varphi(A) \geqslant 2\mu(A)$

$\searrow E^{+-} \quad \mu A \leqslant \varphi(A) \leqslant 2\mu A$

$$E^{\overbrace{+ + \ldots +}_{k-1}} \to E^{\overbrace{+ + \ldots +}_{k}} \qquad \varphi(A) \geqslant k\mu(A)$$

$$\searrow E^{\overbrace{+ + \ldots + -}_{k}} \qquad (k-1)\mu A \leqslant \varphi(A) \leqslant k\mu(A)$$

$$Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} E^{\overbrace{+ + \ldots +}_{k}}$$

$\mu(z) \leqslant \dfrac{\varphi(Z)}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \mu Z = 0$

Теорема. (о разложении Лебега) φ — аддитивная функция на E, μ – δ–конечна. Тогда существует однозначное представление $\varphi :\ \lambda + \delta$, где α — абсолютно непрерывна, δ–сингулярна. Причем $\alpha(A) = \int_A f d\mu$, f определено однозначно $\delta(A) = \varphi(A \bigcap Z)$, где Z — фиксирована, μZ. Если $\varphi \geqslant 0$, то $f\ \geqslant 0$

$\Diamond$ Сначала рассмотрим случай $\mu < \infty$

Применим обобщенную теорему Хана для последовательности $a_m = 1/2^m$

$E = Z^m \bigcup(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^m)$

$\dfrac{k-1}{2^m}\mu A \leqslant \varphi(A) \leqslant \dfrac{k}{2^m}\mu A,\ A \subset E_k^m$

$[a, b] \quad b < c \quad [c, d]$

$a\mu A \leqslant \varphi(A) \leqslant b\mu A, c\mu A \leqslant \varphi(A) \leqslant d\mu A \Rightarrow \mu A = 0$ Имеем $E_k^m \subset E_{2k-2}^{m+1} \bigcup E_{2k-1}^{m+1} \bigcup E_{2k}^{m+1} \bigcup E_{2k+1}^{m+1} \bigcup Y^m$

$Z = (\bigcup Z^m)\bigcup(\bigcup Y^m), \mu Z = 0$

$$f_m(x) = \begin{cases} (k-1)/2^m, & \text{x} \in E_k^m \setminus Z \\ z, & \text{x} \in Z \end{cases}$$

$|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leqslant 1/2^m, \quad f_m \rightrightarrows f$

$A \subset E,\ A$ — произвольное

$A \bigcap E_k^m$

$\varphi(A) = \varphi(A \bigcap Z) + \sum_k \varphi(A \bigcap (E_k^m \setminus Z))\ \boxed{\leqslant}$

$\varphi(A \bigcap Z) + \sum \varphi(A \bigcap E_k^m) \geqslant \int_A f_m d\mu + \varphi(A \bigcap Z)$

$\boxed{\leqslant}\ \int_A f_m d\mu + 1/2^m \mu(A)$

$\varphi(A) = \varphi(A \bigcap Z) + \int_A f d\mu,\ \int_A f_m d\mu = \sigma, \int_A f d\mu = \alpha$

$\varphi = \sigma_1 + \alpha_1 = \sigma_2 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \sigma_2 - \sigma_1 \equiv 0$

(функция одновременно абсолютно непрерывна и сингулярна)

Лекция 9.

Теорема верна и в случае, когда $\mu(E) \quad \delta$ конечна

$E = \bigcup_i E_i,\ \mu E_i < \infty$

Применим первую часть теоремы к E_i.

$A \subset E, \varphi(A) = \sum_i \varphi(A \bigcap E_i) = \sum_i \int_{A \bigcap E_i} f_i d\mu + \varphi(Z \bigcap A),\ Z = \bigcup_i Z_i,\ f_i$ — суммируема, φ — неотрицательная.

Если φ — любого знака $\Rightarrow$ пользуемся разложением Жордана и применяем предыдущую часть теоремы

$\varphi = \bar{\text{V}} - \underline{\text{V}}$

$\varphi(A) = \alpha(A) + \sigma(A)$

$\sigma(A \bigcap Z) = \varphi(A \bigcap Z) \Rightarrow \sigma(A) = \varphi(A \bigcap Z)$

f опр. однозначно

$\int_A f_1 d\mu = \int_A f_2 d\mu \Rightarrow \int_A (f_1 - f2) d\mu = 0 \Rightarrow$

$(A^+ = \{x :\ f_1 - f_2 \geqslant 0\}, \quad A^- = \{x :\ f_1 - f_2 \leqslant 0\}$ + используем неравенство Чебышева)

Теорема Радона-Никодима.

Каждый заряд φ представим однозначным образом как $\int_A f d\mu = \varphi(A),\ f$ — суммируемая функция.

Заряд — абсолютно непрерывная δ–аддитивная функция. На прямой f — производная φ. В общем случае f называют производной Радона-Никодима от $\varphi :\ f d\mu = d\varphi$

Абсолютная непрерывность $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \mu A < \delta \Rightarrow |\int_A f d\mu| < \varepsilon$

Задача. Построить $\varphi(A)^A = \int_A f d\mu$ и доказать непрерывность построения δ по ε и f.

Рассмотрим случай прямой и меры Лебега:

Определение. $F \in VB$ (ограниченной вариации), если конечна $V_a^b F = sup_p \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \quad P:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$F = V_a^x(F) - (V_a^x(F) - F(x))$

$V_a^x(F)\ |\triangle F(I)| \leqslant V_I(F)$

$$\frac{(\bar{\text{V}} + \underline{\text{V}} + (\bar{\text{V}} \text{ - } \underline{\text{V}}))}{2}$$

$$F = \frac{V_a^x(F) + F(x)}{2} - \frac{V_A^x(F) - F(x)}{2}$$

Абсолютно - непр. функция точки (AC)

$F \in AC(E)$, если $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0:\ \forall \{(\alpha_i, \beta_i)\}, \alpha_i, \beta_i \in E,\ (\alpha_i, \beta_i) \bigcap (\alpha_j, \beta_j) = \varnothing, i \neq j$

$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta \Rightarrow \sum_i |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \varepsilon$

Опр. для конечного набора интервалов и для счетного равносим. (если 1 интервал $\Rightarrow$ равномерн. непрерывность)

$F \in AC \Rightarrow F$ равномерно непрерывна на $E \Rightarrow$ непрерывна в каждой точке E (по множеству)

Задача. f непрерывна на $[a, b]$, $E \subset [a, b]$ $f \in AC(E) \Rightarrow f \in AC(\overline{E})$

$AC \subset VB$

$\varepsilon = 1$. Нашли δ_1 из определения AC. Разбили на конечное число отрезков длины $< \delta$.

На каждом отрезке функция ограниченной вариации, значит, ограниченной вариации и на $[a, b]$.

Теорема $F \in AC([a, b]) \Rightarrow V_a^x(F) \in AC([a, b]) \quad \{\alpha_i, \beta_i\}_i \quad \sum_i |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \delta \quad V_{\alpha_i}^{\beta_i}(F) < \frac{\varepsilon}{2^i}$

Находим разбиение p_i внутри (α_i, β_i).

$V_{\alpha_i}^{\beta_i}(F) - \frac{\varepsilon}{2^i} < \sum p_i$

$\sum_i V_{\alpha_i}^{\beta_i} - \varepsilon < \sum_i \sum p_i < \varepsilon$

$\sum_i V_{\alpha_i}^{\beta_i} < 2\varepsilon \Rightarrow V_a^x \in AC([a, b])$

Следствие. $F \in AC \Rightarrow \varphi_F$ абсолютно непрерывна

Задача Линейная комбинация функций из AC — функция из AC

F — разность монотонных функций из AC. Значит, док. для монотонн. F

$\mu E = 0$, E покр. (α_i, β_i) $\quad \sum(\beta_i - \alpha_i) < \delta$

$\varphi(E) \leqslant \varphi(\bigcup_i(\alpha_i, \beta_i)) \leqslant \sum_i \varphi([\alpha_i, \beta_i]) = \sum_i F(\beta_i) - F(\alpha_i) < \varepsilon \Rightarrow \varphi(E) = 0$

Теорема. $F(x) = \int_a^x f d\mu \Leftrightarrow F(x) \in AC$

Необходимость. $F'(x) = f(x)$ п.в., если есть предст. $F(x) = \int_a^x f d\mu$ (в обратную сторону докажем позднее)

$F(x) - F(a) = \int_a^x f d\mu \Rightarrow F(x) \in AC$

Достаточность. $F \to \varphi_F$ $\quad \varphi$ абсолютно непрерывна $\Rightarrow \varphi([0,x]) = F(x) - F(a) = \int_a^x f d\mu$

Определение. $F \in ACG[a,b]$, если $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty}$ и $F \in AC(E_i)$ и F непрерывна на $[a,b]$

Задача. $F'(x)$ существует на $[a,b] \Rightarrow F \in ACG[a,b]$

Задача. $F'(x)$ существует на $[a,b] \not\Rightarrow F \in AC, F \in VB$ (привести соответствующие примеры)

$f \in L[a,b] \Leftrightarrow \exists F \in AC: \quad F'(x) = f(x)$

f на $[a,b]$ — интегрируемая в смысле Дантуа–Хинчина.$\Leftrightarrow \exists F \in ACG[a,b] : F'(x) = f(x)$ п.в.

Задача (*)

1. $f \in \mathcal{H}[a,b] \Rightarrow f$ интегрируема по Дантуа–Хинчину

2. Показать, что этот класс шире класса интегрируемых по К -х функций.

Определение. Интеграл Дантуа–Хинчина $(D)\int_a^b f d\mu \stackrel{def}{=} F(b) - F(a)$

Надо доказать корректность определения, т.е. если $F'(x) = 0$ п.в. $\Rightarrow F(x) \equiv C$

N–свойство Лузина. F (действ.) опр. на E–изм обладает N–свойством, если $\mu E = 0 \Rightarrow \mu(F(E_1)) = 0, E_1 \subset E$

Теорема $F \in AC(E) \Rightarrow F$ обладает N–свойством, $E \subset [a,b]$

Достаточно доказать теорему для замкнутого множества $\mu A = 0$

$A \subset \bigcup_i (\alpha_i, \beta_i) \quad \sum_i [\beta_i - \alpha_i] < \delta$

$F([\alpha_i, \beta_i] \bigcap A) \subset [\inf\limits_{x \in [\alpha_i, \beta_i] \bigcap E} F(x), \sup\limits_{x \in [\alpha_i, \beta_i] \bigcap E} F(x)] = |F(x_i) - F(y_i)|$, $x_i, y_i \in [\alpha_i, \beta_i]$

$\mu(F(A)) \subset \sum_i |F(x_i) - F(y_i)| < \varepsilon \Rightarrow \mu(F(A)) = 0$

Лекция 10.

Определение. F — действительная функция, опр. в окрестности точки x

$\overline{\lim}_{n \to \infty} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \overline{D}F(x)$

$\underline{\lim}_{n \to \infty} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \underline{D}F(x)$

Производные числа Дини — это правый и левый верхний и нижние пределы $(F(x+h) - F(x))/h$

$D^+F(x) = \overline{\lim}_{n \to +0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$D_+F(x) = \underline{\lim}_{n \to +0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$D^-F(x) = \overline{\lim}_{n \to -0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$D_-F(x) = \underline{\lim}_{n \to -0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

Задача. Пример непрерывной $F : D^+F = D^-F = +\infty,\ D_+F(X) = D_-F(x) = -\infty$ на множестве положительной меры (изобразить график)

Теорема. $F \in ACG([a, b]), D_+F(x) \geqslant C$ п.в. $\Rightarrow F\ [a, b]$

Доказательство.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Введем функцию $g(x) = F(x) + \varepsilon x$

$D_+g(x) = D_+F(x) + \varepsilon > 0$

Задача. Линейная комбинация ACG–функций — ACG–функция.

Значит, (факт из задачи) $g \in ACG([a, b]) \Rightarrow g$ обладает N–свойством.

Пусть E–множество, где не выполнено условие $D :\ g(x) > 0$

$\mu E = 0$ (т.к. условие выполнено п.в.) $\Rightarrow g\ N$

Предположим, что g не является монотонно возрастающей $\exists x_1, x_2 \in [a, b],\ x_1 < x_2,\ g(x_1) > g(x_2)$

$\exists y_0 \notin g(E)\ \mu g(E) = 0$

$\{x : g(x) = y_0\}$ — замкнут., т.к.

g — непрерывная $\Rightarrow \exists x_0$ — самая прав.,

$\dfrac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \leqslant 0$

$D_+g(x_0) \leqslant 0$ — противоречие

То есть, если $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

$F(x_1) + \varepsilon x_1 \leqslant F(x_2) + \varepsilon x_2$

$F(x_1) \leqslant F(x_2)$ (в пределе при $\varepsilon \to 0$)

Замечание. Можно восп. D^+

Следствие. $F \in ACG([a, b])$

$F'(x) = 0$ п.в. $\Rightarrow F(x) = const$

Значит, интеграл Дантуа–Хинчина с помощью формулы $(D) \int_a^b f = F(b) - F(a)$ определен однозначно.

Если $G'(x) = f(x) \Rightarrow (F(x) - G(x))' = 0$ п.в. $\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ $(F(x) - G(x) = const$ п.в.)

Доказать, что если $F \in VB$, то F' кон. существует п.в. Достаточно показать это для монотонно возрастающих функций.

Теорема. f не убывает на $[a, b] \Rightarrow f'$ сущ. п.в. $f' \in L[a, b]$ и $\int_a^b f' d\mu \leqslant f(b - 0) - f(a + 0)$

$\{I\}$ — семейство, покр. E в смысле Витали

$\exists \{I_i\}$ — конечное число, I_i: (если E — огранич.)

Нужно доказать совпадение производных чисел Дини. Покажем, что совпадают $D^+f(x)$ и $D_-f(x)$, то есть $\mu^*(A \bigcap (\bigcup_i I_i)) > \mu^*(E) - \varepsilon$

$D^+f(x)$ $D_-f(x)$ $\mu\{x : D^+f(x) > D^-f(x)\} = 0$

$A = A_{rs} = \{x : D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}$

Докажем, что $\mu A = 0$.

Предположим, что $\mu^* A > 0$. Найдем G — откр..

$G \supset A,\ \mu G < \mu^* A + \varepsilon$

$\dfrac{-f(x) + f(x - h)}{-h} < S$ по некоторой подпоследовательности h

$[x - h, x]$ для таких h обр. покрытие Витали

$[x - h, x] \subset G - -// - -// - -$

Выберем конечное число отрезков $[x_k - h_k, x_k]$

$\dfrac{-f(x_k) + f(x_k - h_k)}{-h_k} < S$ $\mu^*(A \bigcap (\bigcup_k [x_k - h_k, x_k])) > \mu^*(A) - \varepsilon$

$f(x_k) - f(x_k - h_k) < sh_k$

$\sum_k (f(x_k) - f(x_k - h_k)) < s \sum_k h_k \leqslant s\mu G \leqslant s(\mu^* A + \varepsilon)$

Используем второе неравенство: $B = A \bigcap (\bigcup_k [x_k - h_k, x_k])$

$\dfrac{f(x + k) - f(x)}{k} > r$ $\exists$ подпоследовательность h_k

$[x, x+k] \subset \bigcup_k [x_k - h_k, x_k]$

Берем эти отрезки. Ои покрывают B в смысле Витали. Выберем $[x_i', x_i' + k_i]$ — конечное число отрезков, для которых выполнено: $\dfrac{f(x_i' + k_i) - f(x_i')}{k_i} > r$

$f(x_i' + k_i) - f(x_i') > k_i r$

$\sum_i (f(x_i' + k_i) - f(x_i')) > r \sum_i k_i \boxed{>}$

$\mu * (B \bigcap (\bigcup [x_i', x_i' + k_i])) > \mu^*(B) - \varepsilon > \mu^*(A) - 2\varepsilon$

$\boxed{>} r(\mu^* A - 2\varepsilon)$

$\sum_k (f(x_k) - f(x_k - n_k)) > \sum_i (f(x_i + k_i) - f(x_i))$, так как f — монотонная

$s\mu^*(A) + s\varepsilon > r\mu^*(A) + 2r\varepsilon$

$s\mu^*(A) \geqslant r\mu^*(A) \quad s \geqslant r$ — противоречие.

$\Rightarrow \mu^* A = 0$

Это верно для любой пары производных чисел (доказывается аналогично) $\Rightarrow$ все производные числа Дини совпадают п.в.

Докажем неравенство теоремы: $f_k(x) = \dfrac{f(x + 1/k) - f(x)}{1/k} \xrightarrow[k\to\infty]{f'(x)}$

$f(x)$ продолж. справа от в конст. $f(b-0)$

$f(x) = f(b-0)\ \forall x \geqslant b$

$f_k(x) \geqslant 0$

По теореме Фату $\int_a^b f' d\mu \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_a^b f_k d\mu = \lim_{k\to\infty} k(\int_b^{b+1/k} f dx - \int_a^{a+1/k} f dx) = f(b-0) - f(a-0)$

Равенство $\int_a^b f' d\mu = f(b) - f(a)$ выполняется тогда и только тогда, когда f — абсолютно непрерывна.

$f \in AC,\ f'(x) = g(x)$ п.в. (сущ. п.в. , т.к. $f \in AC$) $\int_a^b f' d\mu = f(b) - f(a) \Leftrightarrow g$ интегрируема по Лебегу (можно взять за эквивалентное определение)

Лекция 11.

Сравнение интеграла Римана–Стилтьеса с интегралом Лебега–Стильтьеса

$(RS) \int_a^b f dg$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_i < \ldots < x_n = b$

P — разбиение отрезка

$M_i = sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ m_i = inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

g берем непрерывной слева.

Верхняя сумма Дарбу. $U(f,g,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i g(\triangle_i)$

Нижняя сумма Дарбу. $L(f,g,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i g(\triangle_i)$

Если $\inf U = \sup L$, то $\exists$ интеграл Римана–Стильтьеса, равный этой величине.

Если $\exists \int_a^b f dg$, то можно взять последовательность разбиений $P_k, P_k \subset P_{k+1}$ и получить интеграл как $\sigma(P_k) \to 0$ предел при $k \to \infty$ сумм Дарбу.

Теорема. В случае существования интеграла Римана–Стильтьеса $(LS)\int_a^b f d\mu_g$

Доказательство.

$U_k(x) = M_i,\ x \in [x_{i-1}, x_i)$

$L_k(x) = m_i,\ x \in [x_{i-1}, x_i)$

$U(f,g,P_k) = (LS)\int_a^b U_k d\mu_g \to (RS)\int_a^b fdf$

$L(f,g,P_k) = (LS)\int_a^b L_k d\mu_g \nearrow$

$U_k \searrow U$

$L_k \nearrow L$

$U_k(x) \geqslant U(x) \geqslant (x) \geqslant f(x) \geqslant L(x) \geqslant L_k(x)$

По теореме Б. Леви можно переходить к пределу под знаком интеграла Лебега.

$(LS)\int_a^b U d\mu_g = (LS)\int_a^b L d\mu_g$

$(LS)\int_a^b (U-L) d\mu_g = 0 \Rightarrow U - L = 0\ \mu_g \Rightarrow U(x) = f(x) = L(x)$

$(LS)\int_a^b f d\mu_g = (LS)\int_a^b U d\mu_g = (LS)\int_a^b \mu_g = (RS)\int_a^b f dg$

Теорема будет верна для $g \in VB$ (педст. в виде разности двух монотонных функций)

Задача (*). Интеграл не зависит от представления g (но будем ист. представление $\bar{\mathrm{V}}$ - $\underline{\mathrm{V}}$)

Теорема Фубини

$(X, S, \mu_x) \quad (Y, T, \mu_y)$

$X \times Y$

$A \in S, B \in T \quad C = A \times B$

$\mu(C) \stackrel{def}{=} \mu_x A \times \mu_y B$

Задача $C = A \times B, A \in S, B \in T, \{C\}$ образует полукольцо.

Мера определена на полукольце $\to$ определим её на минимальном кольце $\to$ с помощью конструкции Лебега определим μ^* $\to$ с помощью определения Каратеодори определим класс измеримых множеств.

Получим меру, называемую производной мер μ_x и μ_y на$X \times Y,\ \mu = \mu_x \times \mu_y$

Проверим σ–аддитивность меры на полукольце $C = \bigcup_{k=1}^{\infty},\quad C_k = A_k \times B_k$

$\mu C = \mu_x A \times \mu_y B = \int_x \chi_A(x) \mu_y B d\mu_x = \int_x \sum_k \chi_{A_k} \mu_y B_k d\mu_x = \sum_k \mu_x A_k \mu_y B_k$

$f(x,y)$ определена на $X \times Y$ — измерим., неотриц.

Тогда $\int_{X \times Y} f(x,y) d\mu = \int_X (\int_Y f(x,y) d\mu_y) d\mu_x$, если имеет смысл левая часть.

Считаем: $f(x,y)$ измерима при фиксированном x на Y для п.в. y

Тогда $F(x) = \int_Y f(x,y) d\mu_y$ имеет смысл и предполагается измеримой.

Сначала докажем теорему для характеристической функции $\chi_A(x,y)$ измеримого множества относительно $\mu = \mu_x \times \mu_y$.

Сначала рассмотрим $A = A' \times A"$.

Для такой χ_A — очевидно. ($\chi_{\text{элемента кольца}} = \sum \chi_{\text{элемента полукольца}}$)

Лемма. $\forall$ измеримого A $\exists B_{n_k}$ — последовательность элементов кольца, $B_{n_k} \uparrow B_n,\ B_{n_k} \downarrow B,\ n \to \infty$ и $\mu B = \mu A,\ BsupsetA$

Доказательство.

$\mu A = \inf_{\bigcup P_i \supset A} \sum_{i=1}^{\infty} \mu P_i$

$\mu A + 1/n > \sum_{i=1}^{\infty} \mu P_i \geqslant \mu(\bigcup_i P_i)$

Хотим, чтобы $B_n \supset B_{n+1}$

$(\bigcup_i P_i) \bigcap (\bigcup_k P'_k) = \bigcup_{i,k} (P_i \bigcap P'_k)$

Пользуясь этим, получим $\mu A + 1/n > \mu(B_n)$

$\lim_{n \to \infty} \mu B_n = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n) = \mu B = \mu A$

$B_{n_k} = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$

Итак, для $\chi_{B_{n_k}}$ теорема Фубини верна.

$A_x = \{y : (x,y) \in A\}$

$\int_{X \times Y} \chi_{B_n}(x,y) d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_{X \times Y} \chi_{B_{n_k}}(x,y) d\mu = \lim_{k \to \infty}$

$\int_X (\underbrace{\int_Y \chi_{B_{n_k}}(x,y)d\mu_y}_{\text{монот. посл. функций}}) d\mu_x =$ (Применяем теорему Б. Леви) $= \int_X (\lim_{k\to\infty} \int_Y \chi_{B_{n_k}}(x,y)\mu_y)d\mu_x$

$\int_{X\times Y} \chi_{B_n}(x,y)d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \mu_y(B_{n_k}) f\mu_x = \int_X \mu_y(B_n)_x d\mu_x = \int_X (\int_Y \chi_{B_n}(x,y)d\mu_y)d\mu_x$

Докажем для χ_{B_n}. Аналогичен переход $\chi_{B_n} \to \chi_B$

$A = B \setminus (B \setminus A)$

$\chi_A = \chi_B - \chi_{B\setminus A}, \quad \mu(B\setminus A) = 0$

Докажем теорему Фубини для любого измеримого множества меры 0.

$C \subset B', \mu C = \mu B' = 0$ (аналогично B' - изм. оболочка)

Для B' теорема доказана.

$\int_{X\times Y} \chi_C(x,y)d\mu = \int_{X\times Y} \chi_{B'} d\mu = \int_X (\int_Y \chi_{B'} d\mu_y)d\mu_x = 0 \Rightarrow \int_Y \chi_{B'} d\mu_y = 0$ x

$\mu_y B'_x = 0 \Rightarrow \mu C_x = 0$

$\int_{X\times Y} \chi_C(x,y)d\mu = 0$

$\int_X (\int_Y \chi_C(x,y)d\mu_y)d\mu_x = 0$

Лекция 12.

$X \times Y$ $\mu_x \times \mu_y$ $f(x,y) \geqslant 0$

$\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu = \int_X (\int_Y f(x,y)d\mu_y)d\mu_x$

Уже доказано для χ_A, A измеримо.

Меры μ_x и μ_y предполагаются полными. Так как доказано для характреристических функций $\Rightarrow$ доказано для простых функций.

$f_n(x,y) \nearrow f(x,y)$, f_n — простые функции

$\int_{X\times Y} f_n(x,y)d\mu = \int_X (\int_Y f_n(x,y)d\mu_y)d\mu_x$

Выбрасываем множество меры 0 для каждого n, где $f_n(x,y)$ неизм. по y и берем их объединение. Затем применяем теорему Леви.

Для неотрицательных функций торема Фубини доказана.

Теорема Фубини: f — измеримая функция, f интегрируема по Лебегу на $X\times Y$ (интеграл конечен). Тогда $\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu = \int_X (\int_Y f(x,y)d\mu_y)d\mu_x$

$f(x,y)$ изм. для п.в. x, и интеграл по y конечен для п.в. x

$\int_X f(x,y)d\mu_y$ интегрируема по x

(в предположении конечности левой части формулы)

$f = f^+ f^-$

Пример существенности условия конечности левой части формулы.

$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$

Эта функция не интегрируема по Лебегу как функция двух переменных.

Пространство $L_p(X, (M), \mu)$

$1 \leqslant p \leqslant +\infty$

$\|f_p\| = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} < +\infty$

Уже рассматривали $L_1 = L$

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ — это все функции, равные 0 п.в. (эквивалентны нулевой функции)

Элементы L_p — классы эквивалентности функций.

Проверим свойства нормы: $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ — очевидно.

Если $1 < p < +\infty$, то сопр. показатель q п определению — число, удовлетворяющее свойству $1/p + 1/q = 1$

$q = p/(p-1)$

Докажем **неравенство Гёльдера.**

$f \in L_p, g \in L_1$, тогда $\int_X |fg| d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

$ab \leqslant \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b y^{q-1}dy$

$ab \leqslant q^p/p + b^q/q$

Применим это к доказательству неравенства Гёльдера.

$a = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$

$\int_X \dfrac{|f(x)| \cdot |g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \dfrac{1}{p} \int_X \dfrac{|f(x)|^p}{\|f\|_p} d\mu + \dfrac{1}{q} \int_X \dfrac{|g(x)|^q}{\|g\|_q} d\mu$

Упрощаем и получаем неравенство Гёльдера.

Доказательство неравенства Минковского.

$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p,\ p \geqslant 1$

$|f+g|^p \leqslant \int_X |f+g|^{p-1}|f| d\mu + \int_X |f+g|^{p-1}|g| d\mu \leqslant$

$\leqslant (\int_X |f+g|^{(p-1)\cdot \dfrac{p}{p-1}})^{1-1/p} \cdot (\int_X |f|^p)^{1/p} + (\int_X |f+g|^p)^{1-1/p} \cdot (\int_X |g|^p)^{1/p}$

Если $\int_X |f+g| d\mu = 0$, то это очевидно.

$|f(x) + g(x)|^p \leqslant 2^p \max |f(x)^p, |g(x)^p|| \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$

Тогда, сокращая на $\int_X |f+g|^p d\mu$, получаем неравенство Минковского (оно же неравенство треугольника для $\|\cdot\|$)

$f_n \xrightarrow{L_p} f$

Связь разных сходимостей.

$\mu x \in X : |(f_n - f)(x)| > \varepsilon \leqslant \dfrac{\int_X |f_n - f| d\mu}{\varepsilon^p} = \dfrac{\|f_n - f\|p^p}{\varepsilon}$

Значит, сходимость в $L_p \Rightarrow$ сходимость по мере (обратное неверно)

Задача. Выяснить связь сходимости в L_p с другими сходимостями

Теорема. L_p — полное пространство

Докажем, что L_p — полное пространство (в предположении, что $\mu - \delta$–конечна)

Пусть f_n удовлетворяет условию Коши. Покажем, что $f_n \to f$ поточечно п.в.

Найдем $n_k : \|f_{n_k} - f_n\|_p < 1/2^k \forall n \geqslant n_k$

Определим подпоследовательности $f_{n_k}; n_k < n_{k+1} < \dots$

Возьмем множество, на котором μ конечна.

$(X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \mu E_k < \infty)$. Возьмем E_k)

Тогда $\int |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| d\mu \leqslant \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| \cdot c \leqslant c \cdot \dfrac{1}{2^k}$

(Неравенство Гёльдера)

Ряд из интегралов сходится $\Rightarrow$

$|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ сходится п.в.

Тогда ряд $f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ сходится абсолютно.

Его частичные суммы — f_{n_k}.

Значит, $f_{n_k}(x) \to \int_X |f_{n_k} - f_{n_l}| d\mu \xrightarrow[l \to \infty]{l > k} \int_X |f_{n_k} - f|^p d\mu \leqslant \varepsilon$ (по теореме Фату)

$\|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < 1/2^k,\ n_k < n \leqslant n_{k+1}$

Тогда $\|f_n - f\|_p \leqslant \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\| < 2\varepsilon$

Лекция 13.

$f\ X\ E_k$ влечет удовлетворение условия Коши на X

$L_p, 1 < p < \infty$

Можно определить L_∞

Существенный супремум $ess\sup_x |f(x)| = \inf\{C : \mu|f(x)| > C = 0\} = \|f\|$ в L_∞.

Элементы L_∞ — классы эквивалентных функций.

$f \sim g \Leftrightarrow f = g$

Задача Проверить свойство нормы.

Пространство L_o — пространство всех измеримых функций

$L_0(x):\ \rho(f,g)=\int_X \dfrac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mu \quad \mu X<\infty$

Задача 1. Проверить $\rho(f,g)_{L_0}$ — метрика.

Задача 2. Сходимость относительно $\rho(f,g)$ $\Leftrightarrow$ сходимость по мере

В L_2 можно ввести скалярное произведение $(f,g)=\int_X f\bar(g)d\mu$ (для комплексных функций)

L_2 — полное пространство со скалярным произведением. (то есть гильбертово пространство)

$(f,g)\leqslant \|f\|\cdot\|g\|$

Определение. Метрическое протранство называется сепарабельным, если в нем найдется счетное всюду плотное множество.

Докажем, что $L_p([a,b])$ сепарабельно. В качестве счетного множества берем множество всех многоленов с рациональными коэффициентами. Покажем, что оно всюду плотно вL_p. Для L_1 ясно (применим теорему о приближении непрерывной функцией функции интеграла по Лебегу, затем применим теорему Вейерштрасса о приближении многочленами, затем приблизим полиномом с рациональными коэффицитнтами)

Для $L_p:\ f\geqslant 0 \quad f_n$ — простые. По теореме Б.Леви $\|f_n-f\|_p\to 0$

Простые функции — линейные комбинации характеристических функций. Приближение полиномами хар. функций изм. множеств. Измеримое пространство приближается открытым множеством. Открытое множество — счетное объединение интервалов. Приближение характеристической функцией конечного числа интервалов (выбр. счетное число интервалов суммарной длины $<\varepsilon$). Значит, надо приближать характеристической функцией инт. с точностью до *varepsilon*. Затем применить теорему Вейерштрасса.

Свойства гильбертова пространства.

f и g ортогональны, если $(f,g)=0$

$\|f\|=\sqrt{(f,f)}$

Можно рассматривать ортонормированные системы (О.Н.С.)

X — гильбертово пространство, f — его элемент.

$\{e_n\}$ — O

Коэффициенты Фурье $\hat{f}_n = (f, e_n)$

Теорема. $f \in X, X$ — гильбертово пространство. Тогда $\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2$ — минимально, если $\alpha_k = \hat{f}_k$

Доказательство.

$(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k) = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \hat{f}_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_k|^2, min$ получается при $\alpha_k = \hat{f}_k$

Получаем равенство:

$\|f - \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_k|^2$, т.к. левая часть $\geqslant 0$, то

$\|f\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_k|^2$

Переходим к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство Бесселя:

$\|f\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$

Если ряд Фурье сходится к функции, то

$\|f\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$ — равенство Парсеваля.

Равенство Парсеваля $\Leftrightarrow$ сходимости ряда Фурье к своей функции f

Теорема (Мермера). Коэффициенты Фурье по ограниченной (поточечно) ортонормированной системе в L_1 стремятся к нулю. (при $n \to \infty$)

$L_2(x)$ $\mu X < \infty$

$\{e_n\}$ $|e_n(x)| \leqslant M \quad \forall x \in X \; \forall n$

$\hat{f}_k = \int f e_k d\mu$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \int_X |f_N - f| d\mu < \varepsilon$ (f_N — срезка)

$f_N \in L_2(x) \Rightarrow$ для f_N выполнено неравенство Бесселя, т.е. коэффициенты Фурье $\to 0$.

$|\hat{f}_k| = |\int_I f e_k d\mu| \leqslant |\int_X (f - f_N) e_k d\mu| + |\int_X f_N e_k d\mu| \leqslant \int_X |f - f_N| d\mu + |\hat{f_N}^k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad k \geqslant n_o$

О.Н.С. не ограничена в совокупности в $L_2([0,1])$

$\chi_0 = 1$

$$\chi_1 = \begin{cases} 1, & \chi \in [0, 1/2) \\ -1, & \chi \in (1/2, 0] \end{cases}$$

$$\chi_2 = \begin{cases} \sqrt{2}, & \chi \in [0, 1/4) \\ -\sqrt{2}, & \chi \in (1/4, 1/2) \\ --//-- & \end{cases}$$

$$\chi_3 = \begin{cases} --//-- \quad \sqrt{2}, & \chi \in (1/2, 3/4) \\ -\sqrt{2}, & \chi \in (3/4, 1] \end{cases}$$

Далее определим функции от $2^k, \ldots, 2^{k+1} - 1$

$$\chi_{2^k} = \begin{cases} 2^(k/2), & \chi \in [0, 1/2^{k+1}) \\ -2^{k/2}, & \chi \in (1/2^{k+1}, 1/2^k) \\ --//-- & \end{cases}$$

Далее сдвигаем. В точках разрыва — как среднее арифметическое пределов или по непрерывности справа.

Теорема Риса–Фишера.

$\{e_k\}$

$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \quad (\{c_k\} \in L_2) \Rightarrow \exists f \in X : c_k = \hat{f}_k$ по системе $\{e_k\}$

И можно выбрать f так, чтобы выполнялось равенство Парсеваля.

Доказательство. $T_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$

T_n удовлетворяет условию Коши: $\|T_n - T_m\|^2 - \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

Значит, $T_n \to f$

$(f, e_k) = (f - T_n, e_k) + (T_n, e_k) =$ (по неравенству Коши–Бун.)$(f - T_n, e_k) + c_k$

$(f - T_n, e_k) \to 0 \ n \to \infty$

$(f, e_k) = c_k$

Т.к. $T_n \to f$, выполнено равенство Парсеваля (т.к. T_n — частные суммы ряда Фурье)

$\{e_n\}$ полная, если $(f, e_n) = 0 \forall n \ f = 0$

Задача. Полнота эквивалентна равенству Парсеваля $\forall f$

Признаки сходимости ряда Фурье.

Признак Дини: $\dfrac{f(x+t) + f(x-t) - 2S}{t} \in L(o, \delta)$ в т. x

ряд Фурье по тригонометрической сумме сходится к S (наиболее часто встречается $S = f(x)$)

$S = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$