ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Общая тенденция второй половины XX века – все большая алгебраизация и геометризация физики. В основных курсах лекций на физическом факультете рассказывают математику еще XIX века. Более современные методы попадают сначала на факультативные спецкурсы. Они рассчитаны на тех, кто собирается заниматься научной работой; формально говоря, в дальнейшем на такие спецкурсы опираться не будут.

Интуитивно ясно, что сферу (надувной шарик) нельзя превратить в тор (поверхность бублика) непрерывной деформацией. Для точной формулировки и доказательства утверждений такого типа необходимо понятие близких точек. Возникает идея топологического пространства, которая пронизывает всю науку. Топологические пространства, непрерывные отображения и свойства, не меняющиеся при непрерывных отображениях, составляют предмет топологии.

Если в тексте ниже встречается утверждение, после которого вместо доказательства формулируется новая мысль, то подразумевается, что доказательство тривиально. В четырех случаях, наоборот, написано "без доказательства". Это означает, что соответствующие теоремы достаточно сложны, а объем лекций ограничен (**эти** доказательства, разумеется, в зачет не входят).

§0. Мощность множества

Прежде чем начать изложение топологических идей, напомним некоторые элементарные понятия теории множеств.

1. Счетные множества. Не определяя самого понятия "мощность", дадим следующее

Определение 1. Будем говорить, что множества A и B равномощны, и писать $A \sim B$, в том случае, если существует биекция $A \longleftrightarrow B$.

Определение 2. Множество A счетно, если $A \sim \mathbb{N}$.

Утверждение 1. *Если A счетно и $B \subset A$, то B конечно или счетно.*

Утверждение 2. *Пусть A_k – счетные множества и $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда A счетно.*

Примеры. 1) $2\mathbb{N}$ счетно; 2) $\mathbb{Z}$ счетно.

Утверждение 3. *Пусть A_1, ..., A_n – счетные множества, $B = A_1 \times ... \times A_n$. Тогда B счетно.*

Доказательство. Индукция по n. База $n = 1$ очевидна.

Переход $n \to n+1$. Будем считать, что

$$B = \{(a_1, ..., a_n, a_{n+1}); a_k \in A_k\}, \qquad A_{n+1} = \{a_{n+1}^{(1)}, a_{n+1}^{(2)}, ...\}.$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Множество $B_j = \{(a_1, ..., a_n, a_{n+1}^{(j)}); a_k \in A_k, k \leqslant n\}$ счетно по предположению индукции, т.к. $B_j \sim A_1 \times ... \times A_n$. Следовательно, $B = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$ счетно. $\square$

Теорема 1. *Пусть* $A \sim B_1 \subset B$ *и* $B \sim A_1 \subset A$. *Тогда* $A \sim B$.

Без доказательства.

Примеры. 1) $\mathbb{Q}$ счетно;

2) $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{Q}^n$ счетны;

3) множество многочленов с целыми коэффициентами счетно. Множество алгебраических чисел счетно.

2. Несчетные множества.

Теорема 2. *Отрезок* $[0, 1]$ *не счетен.*

Доказательство. Предположим, что отрезок может быть представлен в виде последовательности $[0, 1] = \{x_1, x_2, ...\}$. Разделим $[0, 1]$ на три равные части и обозначим через U_1 ту, которая не содержит точку x_1. Затем разделим U_1 на три части и обозначим через U_2 ту, которая не содержит x_2. Продолжая эту процедуру до бесконечности, получим последовательность вложенных промежутков U_k, длины которых равны соответственно 3^{-k}, и $x_k \notin U_k$. Существует точка $\xi \in \cap_{k=1}^{\infty} U_k$. Ясно, что ξ не совпадает ни с одной x_k. Мы пришли к противоречию. $\square$

Следствие. *Существуют трансцендентные числа.*

Определение 3. Множество A имеет мощность континуума, если $A \sim [0, 1]$.

Утверждение 4. *При любых вещественных* $a < b$ *будет* $[a, b] \sim [a, b) \sim (a, b] \sim (a, b) \sim [0, 1]$.

Теорема 3. *Пусть* $A_k \sim [0, 1]$ *и* $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. *Тогда* $A \sim [0, 1]$.

Доказательство. $A_k \sim (1/(k + 1), 1/k]$. $\square$

Примеры. 1) $\mathbb{R} \sim [0, 1]$.

2) Множество всех последовательностей из нулей и единиц $\sim [0, 1]$.

3) $[0, 1]^n \sim \mathbb{R}^n \sim [0, 1]$.

Упражнения.

1) Какова мощность множества прямых на плоскости?

2) Какова мощность множества непрерывных функций на отрезке?

3) Докажите теорему 1.

4) Пусть $A \cup B \sim [0, 1]$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A и B имеет мощность континуума.

Глава I. Топологические пространства

В этой главе мы введем основные понятия: топологическое пространство, открытые и замкнутые множества, непрерывность, связность.

§1. Открытые множества

1. Пусть X – множество, τ – семейство его подмножеств.

Определение 1. (X,τ) называется топологическим пространством, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\emptyset, X \in \tau$;

2) $U_\alpha \in \tau \Longrightarrow (\cup_\alpha U_\alpha) \in \tau$;

3) $U_1, ..., U_n \in \tau \Longrightarrow (\cap_{k=1}^n U_k) \in \tau$.

Семейство τ называется топологией на пространстве X; множества $U \in \tau$ называются открытыми множествами.

Ясно, что свойство 3) можно ослабить.

Утверждение 1. *Предположим, что для множества X и семейства τ выполнены условия 1), 2) и*

3') $U, V \in \tau \Longrightarrow U \cap V \in \tau$.

Тогда (X,τ) – топологическое пространство.

Доказательство. Индукция по n. $\square$

Примеры. 1) Пусть X – произвольное множество, $\tau = \{\emptyset, X\}$. "Пространство слипшихся точек".

2) Пусть X – произвольное множество, τ – семейство всех его подмножеств. Дискретная топология.

3) Пусть X состоит из двух элементов $X = \{a; b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{b\}, X\}$.

4) Пусть X – любое бесконечное множество. Назовем открытыми пустое и те множества, дополнение которых конечно. Топология Зарисского.

5) Стандартная топология в $X = \mathbb{R}^n$:

$$U \in \tau \Longleftrightarrow \forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U.$$

2. Пусть (X,τ) – топологическое пространство.

Определение 2. Пусть $x \in M \subset X$. Точка x называется внутренней точкой множества M, а множество M называется окрестностью точки x, если существует множество $U \in \tau$, такое что $x \in U \subset M$. Множество всех внутренних точек множества M называется его внутренностью и обозначается $\operatorname{int} M$.

Теорема 1. *Следующие три условия эквивалентны: 1) $M \in \tau$; 2) $M = \operatorname{int} M$; 3) M является окрестностью любой своей точки.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longrightarrow$ 3) – очевидно.

3) $\Longrightarrow$ 1). Для любой точки $x \in M$ существует $U_x \in \tau$, такая что $x \in U_x \subset M$. Следовательно,

$$M = \bigcup_{x \in M} U_x \quad \Longrightarrow \quad M \in \tau. \quad \square$$

Утверждение 2. *Внутренность* $\operatorname{int} M$ *любого множества* M *открыта.*

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{int} M$. Существует открытое множество U, такое что $x \in U \subset M$. Ясно, что $U \subset \operatorname{int} M$. Следовательно, $\operatorname{int} M$ является окрестностью любой своей точки и, по теореме 1, открыто. □

Пример. $X = \mathbb{R}$, $\operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$.

Следующее утверждение показывает, что во всяком подмножестве топологического пространства, в свою очередь, может быть введена топология.

Утверждение 3. *Пусть* A – *подмножество* X. *Семейство*

$$\tau_A = \{V = U \cap A, \quad U \in \tau_X\}$$

является топологией на A.

Доказательство. 1) $\emptyset = \emptyset \cap A$, $A = X \cap A$.

2) Пусть $V_\alpha = U_\alpha \cap A$, $U_\alpha \in \tau_X$. Тогда

$$\bigcup_\alpha V_\alpha = \left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) \cap A \quad \Longrightarrow \quad \left(\bigcup_\alpha V_\alpha\right) \in \tau_A.$$

3) Пересечение – аналогично. □

Определение 3. τ_A называется индуцированной (или относительной) топологией на A.

Примеры. 1) Круг на плоскости.

2) Пусть $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$. Тогда τ_A дискретна.

Упражнения.

1) Пусть V_1, ..., V_n – окрестности точки x. Докажите, что пересечение $\cap_{k=1}^n V_k$ – также окрестность точки x.

2) Докажите, что $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$. Предъявите пример, когда $\operatorname{int}(A \cup B) \neq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

3) Докажите, что всякое открытое ограниченное множество на вещественной оси представимо в виде конечного или счетного объединения непересекающихся интервалов.

§2. Замкнутые множества

1. Пусть (X, τ) – топологическое пространство.

Определение 1. Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если $X \setminus F \in \tau$.

Утверждение 1. *1)* $\emptyset$ *и* X *замкнуты;*

2) пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;

3) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Замечание. Можно задать топологию на множестве, описав все замкнутые подмножества.

Определение 2. Пусть $M \subset X$. Замыканием множества M называется пересечение всех замкнутых множеств F, содержащих M,

$$\overline{M} = \bigcap_{F \supset M} F.$$

Утверждение 2. *$\overline{M}$ является наименьшим замкнутым множеством, содержащим M.*

Доказательство. Ясно, что $\overline{M}$ замкнуто и что $M \subset \overline{M}$. Далее, если F_0 – замкнутое множество, содержащее M, то $\overline{M} \subset F_0$. $\square$

Утверждение 3. *Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда $M = \overline{M}$.*

Еще одно описание замыкания множества доставляет следующая

Теорема 1. $\overline{M} = \{x \in X :$ *любая окрестность x пересекается с M*$\}$.

Доказательство. Выпишем серию эквивалентных утверждений.

$$\begin{aligned} x \in \overline{M} &\iff \\ \text{если } x \notin F = \overline{F}, \quad \text{то } M \not\subset F &\iff \\ \text{если } x \in U \in \tau, \quad \text{то } U \cap M \neq \emptyset &\iff \\ \text{любая окрестность } x \text{ пересекается с } M. \quad \square \end{aligned}$$

Определение 3. Множество M (всюду) плотно в X, если $\overline{M} = X$.

Определение 4. Пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное плотное множество.

Поясним, что многие факты проще доказываются в сепарабельных пространствах (а некоторые только для них и верны).

Примеры. 1) $\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}^2$ – сепарабельно.

2) Прямая с дискретной топологией не сепарабельна.

3) Пусть X – бесконечное множество с топологией Зарисского (см. §I.1.1, пример 4). Любое бесконечное подмножество M плотно в X. Следовательно, X сепарабельно.

2. Граница множества. Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $M \subset X$.

Определение 5. Точка x называется граничной точкой множества M, если любая ее окрестность V пересекается с M и с его дополнением,

$$V \cap M \neq \emptyset, \quad V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset.$$

Множество всех граничных точек M называется границей и обозначается ∂M.

Замечание. Ясно, что 1) $\partial\emptyset = \partial X = \emptyset$; 2) $\partial(X \setminus M) = \partial M$.

Утверждение 4. *1) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$;*

2) ∂M замкнуто.

Доказательство. 1) По теореме 1 точка x принадлежит пересечению $\overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$ тогда и только тогда, когда любая окрестность x пересекается с M и с $X \setminus M$;

2) очевидно из 1). $\square$

Примеры. 1) Пусть $X = \mathbb{R}$, $M = [a, b)$. Тогда $\operatorname{int} M = (a, b)$, $\overline{M} = [a, b]$, $\partial M = \{a, b\}$. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

2) $X = \mathbb{R}^n$, $\partial B_1(0) = S^{n-1}$.

Упражнение. Докажите, что $\operatorname{int} M = M \setminus \partial M$; $\overline{M} = M \cup \partial M$.

§3. Непрерывные отображения

Пусть X, Y – топологические пространства, $f : X \to Y$.

Определение 1. Пусть $x_0 \in X$, $f(x_0) = y_0 \in Y$. Отображение f непрерывно в точке x_0, если для любой окрестности V точки y_0 существует такая окрестность U точки x_0, что $f(U) \subset V$. Отображение f называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$. Множество всех непрерывных отображений обозначается $C(X, Y)$.

Теорема 1. *Отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества открыт,*

$$f \in C(X, Y) \Longleftrightarrow f^{-1}(G) \in \tau_X \ \forall G \in \tau_Y.$$

Доказательство. $\Longrightarrow$) Пусть $G \in \tau_Y$, $x \in f^{-1}(G)$. Тогда

$$\exists\, U_x : f(U_x) \subset G \quad \Longrightarrow \quad U_x \subset f^{-1}(G) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(G) \in \tau_X.$$

$\Longleftarrow$) Очевидно. $\square$

Композиция непрерывных отображений непрерывна.

Утверждение 1. *Пусть X, Y, Z – топологические пространства,*

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z, \quad h = g \circ f.$$

1) Если f непрерывно в точке x_0, $f(x_0) = y_0$, g непрерывно в точке y_0, то h непрерывно в точке x_0.

2) Если $f \in C(X, Y)$, $g \in C(Y, Z)$, то $h \in C(X, Z)$.

Определение 2. Топологические пространства X, Y называются гомеоморфными, если существует биективное отображение $f : X \to Y$, такое что $f \in C(X, Y)$, $f^{-1} \in C(Y, X)$. Отображение f называется гомеоморфизмом.

Насчет образов при непрерывном отображении ничего сказать нельзя.

Примеры. 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$.

2) $X = (-1, 1)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x/2)$ – гомеоморфизм, $f^{-1}(y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} y$.
3) $f : X \to X$, $f(x) = x$ – гомеоморфизм.
4) Сфера без точки гомеоморфна плоскости.

Замечание. Далее мы покажем, что вся сфера не гомеоморфна плоскости и не гомеоморфна тору.

Упражнение. Докажите, что шар $B_1(0)$ гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$.

§4. Фактортопология

1. Если в данном топологическом пространстве отождествить ("склеить") некоторые точки, то в новом пространстве возникает естественная топология.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$. Классы эквивалентности будем обозначать $\hat{x}$, т.е. $x, y \in \hat{x} \Longleftrightarrow x \sim y$.

Утверждение 1. *Пусть (X, τ) – топологическое пространство, $\sim$ – отношение эквивалентности. Определим семейство $\tau_\sim$ подмножеств $(X/\sim)$ следующим образом: $\emptyset \in \tau_\sim$, кроме того,*

$$V = \{\hat{x}\} \in \tau_\sim \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\bigcup_{\hat{x} \in V} \hat{x} \right) \in \tau.$$

Тогда $\tau_\sim$ – топология на фактормножестве.

Доказательство. 1) Очевидно.
2) Пусть $V_\alpha \in \tau_\sim$, $V = \cup_\alpha V_\alpha$. Тогда

$$\bigcup_{\hat{x} \in V} \hat{x} = \bigcup_{\alpha} \left(\bigcup_{\hat{x} \in V_\alpha} \hat{x} \right) \in \tau.$$

3) Аналогично 2). $\square$

2. *Примеры.*

1) Если у квадрата склеить две противоположные стороны, то получится боковая поверхность цилиндра (но можно вложить в $\mathbb{R}^2$ – кольцо на плоскости).

2) Если две противоположные стороны склеить "наоборот" (т.е. отождествить точки с координатами $(0; x_2)$ и $(1; 1 - x_2)$), то получится лист Мебиуса (вкладывается в $\mathbb{R}^3$).

3) Если склеить две пары противоположных сторон, получится тор.

4) Если две стороны склеить "правильно", а две – "наоборот", то получится бутылка Клейна (вкладывается в $\mathbb{R}^4$).

5) Если две пары сторон склеить "наоборот", то получится проективная плоскость (вкладывается в $\mathbb{R}^4$).

6) Если всю поверхность шара в $\mathbb{R}^n$ склеить в одну точку, то полученное пространство будет гомеоморфно сфере S^n.

7) Пусть $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Введем отношение эквивалентности

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

Получаемое факторпространство называется проективным пространством и обозначается $\mathbb{R}P^n$. $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно S^1.

8) $\mathbb{C}P^n$.

Упражнения.

1) Докажите, что проективная плоскость из примера 5) гомеоморфна $\mathbb{R}P^2$.

2) Пусть X – топологическое пространство, $\sim$ – отношение эквивалентности, $f : X \to (X/\sim)$ – отображение, переводящее элемент x в класс эквивалентности, которому он принадлежит, $f(x) = \hat{x}$. Докажите, что f непрерывно.

3) Если два листа Мебиуса склеить по краю, получится бутылка Клейна.

4) Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно S^2.

§5. База топологии

1. Пусть X – топологическое пространство, $\mathfrak{B}$ – семейство его подмножеств.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{B} \subset \tau$. $\mathfrak{B}$ называется базой топологии, если любое открытое множество U представимо в виде $U = \cup_\alpha V_\alpha$, где $V_\alpha \in \mathfrak{B}$.

Теорема 1 (критерий базы). *Пусть X – некоторое множество, $\mathfrak{B}$ – семейство его подмножеств. $\mathfrak{B}$ является базой некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1) $\forall x \in X\, \exists U \in \mathfrak{B} : x \in U$;

2) если $x \in U$, $x \in V$ и $U, V \in \mathfrak{B}$, то найдется $W \in \mathfrak{B}$, такое что

$$x \in W \subset U \cap V.$$

Доказательство. $\Longrightarrow$) Пусть $\mathfrak{B}$ – база топологии τ на X. Проверим выполнение условий 1 и 2.

1) $X = \cup_\alpha V_\alpha \Longrightarrow \forall x\, \exists V_\alpha \in \mathfrak{B} : x \in V_\alpha$;

2) $(U \cap V) \in \tau \Longrightarrow U \cap V = \cup_\alpha W_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha : x \in W_\alpha \subset U \cap V$.

$\Longleftarrow$) Пусть $\mathfrak{B}$ – семейство подмножеств X, удовлетворяющее условиям 1 и 2. Определим топологию τ таким образом: открытыми будем считать пустое множество и все множества вида $U = \cup_\alpha V_\alpha$, где $V_\alpha \in \mathfrak{B}$. Проверим выполнение аксиом.

1) $\emptyset, X \in \tau$ – очевидно;

2) Пусть $U_\alpha \in \tau$. Тогда $U_\alpha = \cup_\beta V_{\alpha,\beta}$ и, следовательно,

$$\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \left(\bigcup_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}\right) \in \tau;$$

3) Пусть $U, V \in \tau$, т.е.

$$U = \cup_\alpha U_\alpha, \quad V = \cup_\beta V_\beta, \quad U_\alpha, V_\beta \in \mathfrak{B}.$$

Нас интересует множество $U \cap V = \cup_{\alpha,\beta}(U_\alpha \cap V_\beta)$. Имеем

$$\forall x \in U \cap V \quad \exists W_x \in \mathfrak{B} : \quad x \in W_x \subset U_\alpha \cap V_\beta,$$

следовательно, $U \cap V = \cup_x W_x$. $\square$

Замечание. Можно задать топологию, задав базу.

2. Естественно дать следующее

Определение 2. Топологическое пространство (X, τ) называется пространством со счетной базой, если существует база $\mathfrak{B} = \{U_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Примеры. 1) Одноточечные множества образуют базу дискретной топологии.
2) $\mathbb{R}^n$ – пространство со счетной базой $\mathfrak{B} = \{B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+\}$.

Утверждение 1. *Пространство со счетной базой сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\{U_k\}$ – база, $x_k \in U_k$. Тогда $A = \{x_k\}$ – счетно. Множество $V = X \setminus \overline{A}$ открыто, значит, $V = \cup_j U_{k_j}$. Но $x_{k_j} \notin V$, поэтому $V = \emptyset$ и $\overline{A} = X$. $\square$

Следующее утверждение показывает, что обратное неверно.

Утверждение 2. *Пусть X – несчетное множество, τ – топология Зарисского. Тогда (X, τ) – сепарабельное пространство, в котором нет счетной базы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ – база топологии, $x_0 \in X$. Для любой точки $y \neq x_0$ существует такой элемент базы $U_y \in \mathfrak{B}$, что $y \notin U_y$, $x_0 \in U_y$. Следовательно,

$$\bigcap_{y \neq x_0} U_y = \{x_0\} \qquad \Longrightarrow \qquad X \setminus \{x_0\} = X \setminus \left(\bigcap_{y \neq x_0} U_y \right) = \bigcup (X \setminus U_y).$$

Если база $\mathfrak{B}$ счетна, то объединение в правой части тоже не более, чем счетно. Каждое множество $(X \setminus U_y)$ конечно, поэтому все пространство X счетно, и мы пришли к противоречию. $\square$

3. Понятие базы позволяет ввести топологию на произведении пространств. Пусть (X, τ_X), (Y, τ_Y) – топологические пространства. Рассмотрим декартово произведение множеств $X \times Y$.

Утверждение 3. *Семейство $\mathfrak{B} = \{U \times V; U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$ – база некоторой топологии на $X \times Y$.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий теоремы 1.
1) $\forall (x, y) \in X \times Y$.
2) Пусть $(x, y) \in U_1 \times V_1$, $(x, y) \in U_2 \times V_2$. В качестве W можно взять $W = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$. $\square$

Определение 3. $(X \times Y, \tau_{\mathfrak{B}})$ называется произведением топологических пространств.

Примеры. 1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$;
2) $S^1 \times S^1$ гомеоморфно тору;
3) $S^{n-1} \times (0, \infty)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Упражнение. Пусть $\pi : X \times Y \to X$ – отображение, которое паре (x, y) ставит в соответствие точку x. Докажите, что π непрерывно.

§6. Связные множества

1. Пусть (X, τ) – топологическое пространство.

Определение 1. Пространство X связно, если не существует других множеств, открытых и замкнутых одновременно, кроме пустого и всего X.

Определение 1'. Пространство X не связно, если оно представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Определение 2. Множество $A \subset X$ называется связным, если связно пространство (A, τ_A) (см. §1, утверждение 3).

Определение 2'. Множество $A \subset X$ не связно, если существуют такие открытые множества U и V, что

$$A \subset U \cup V, \quad A \not\subset U, \quad A \not\subset V, \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Утверждение 1. *Отрезок $[a, b]$ связен.*

Доказательство. Пусть $[a, b] \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U, V \in \tau_{\mathbb{R}}$. Не ограничивая общности, считаем $a \in U$. Существует $\varepsilon > 0$, такое что $[a, a+\varepsilon) \subset U$. Положим $x = \sup\{y : [a, y) \subset U\}$. Если $x < b$, то

$$x \notin U \quad \Longrightarrow \quad x \in V \quad \Longrightarrow \quad (x - \delta, x] \subset V,$$

и мы пришли к противоречию. То же самое в случае, если $x = b \notin U$. Остается только вариант $[a, b] \subset U$, $V = \emptyset$. $\square$

При непрерывном отображении образ связного множества связен.

Утверждение 2. *Пусть X, Y – топологические пространства, причем X связно. Если $f \in C(X, Y)$, то $f(X)$ связно.*

Доказательство. Если

$$f(X) \subset U \cup V \quad \text{и} \quad U \cap V \cap f(X) = \emptyset,$$

то

$$X \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \quad \text{и} \quad f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset,$$

откуда следует результат. $\square$

2. Компоненты связности.

Утверждение 3. *Пусть набор связных множеств A_α таков, что любые два множества пересекаются. Тогда их объединение $B = \cup_\alpha A_\alpha$ связно.*

Доказательство. Пусть U и V – открытые множества, $B \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Для всякого α либо $A_\alpha \subset U$, либо $A_\alpha \subset V$. Если существуют два такие индекса β и γ, что $A_\beta \subset U$, $A_\gamma \subset V$, то

$$U \cap V \supset A_\beta \cap A_\gamma \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad B \cap U \cap V \neq \emptyset,$$

чего быть не может. Следовательно, все A_α содержатся в одном из множеств, например, $A_\alpha \subset U$ $\forall \alpha$, и $B \subset U$. $\square$

Определение 3. Пусть $x \in X$. Обозначим через L_x объединение всех связных множеств $A_\alpha(x)$, содержащих точку x, $L_x = \cup_\alpha A_\alpha(x)$. Множество L_x называется связной компонентой точки x в топологическом пространстве X.

Замечание. L_x – наибольшее связное множество, содержащее точку x.

Утверждение 4. $z \in L_x \Longrightarrow L_z = L_x$.

Доказательство. L_x – связно, $z \in L_x$. Следовательно,

$$L_x \subset L_z \quad \Longrightarrow \quad x \in L_z \quad \Longrightarrow \quad L_z \subset L_x. \qquad \square$$

Теорема 1. *Всякое топологическое пространство является объединением непересекающихся компонент связности.*

Доказательство. Рассмотрим две точки x, y. Их компоненты связности L_x, L_y либо не пересекаются, либо совпадают, т.к. из $z \in L_x \cap L_y$ вытекает $L_x = L_z = L_y$. $\square$

Упражнения.
1) Докажите, что $\mathbb{Q}$ не связно в $\mathbb{R}$.
2) Докажите, что $L_x = \overline{L_x}$.
3) Докажите, что произведение связных пространств связно.

§7. Линейно связные множества

1. Пусть (X, τ) – топологическое пространство.

Определение 1. Путем, соединяющим точки x, y, называется непрерывное отображение $f : [0,1] \to X$, такое что $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Утверждение 1. *Если существуют путь, соединяющий точки x, y, и путь, соединяющий точки y, z, то существует путь, соединяющий точки x, z.*

Доказательство. Пусть $f, g \in C([0,1], X)$, $f(0) = x$, $f(1) = y = g(0)$, $g(1) = z$. Положим $h(t) = f(2t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, $h(t) = g(2t-1)$ при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. $\square$

Определение 2. Пространство X называется линейно связным, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует путь, их соединяющий.

Утверждение 2. *Пусть X линейно связно. Если $f \in C(X, Y)$, то $f(X)$ линейно связно.*

Доказательство. Пусть $y_0 = f(x_0) \in f(X)$, $y_1 = f(x_1) \in f(X)$. Существует $g \in C([0,1], X)$, такое что $g(0) = x_0$, $g(1) = x_1$. Положим $h = f \circ g \in C([0,1], Y)$. Ясно, что $h(0) = y_0$, $h(1) = y_1$. $\square$

Теорема 1. *Всякое линейно связное пространство X связно.*

Доказательство. Предположим, что существуют непустые $U, V \in \tau_X$, такие что

$$X = U \cup V, \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Пусть $x \in U$, $y \in V$. Существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to X$, при котором $f(0) = x$, $f(1) = y$. Следовательно, множество $f([0,1])$ не связно, что противоречит результатам предыдущего параграфа. $\square$

2. *Примеры.* 1) Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ множество

$$A = \{(x; \sin(1/x)); x \neq 0\} \cup \{(0; y); y \in [-1,1]\}.$$

Множество A связно, но не линейно связно.

2) Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для любых $x, y \in M$ весь отрезок $\{tx + (1-t)y; t \in [0,1]\}$ содержится в M. Всякое выпуклое множество линейно связно; в частности, $\mathbb{R}^n$ и $B_r(x)$.

Упражнение. Докажите, что сфера S^n связна.

Глава II. Метрические пространства

В этой главе мы рассмотрим пространства, в которых "близость" точек друг к другу измеряется количественно; иначе говоря, задана функция расстояния.

§1. Расстояние

1. Пусть X – множество, $\rho : X \times X \to [0, \infty)$.

Определение 1. (X, ρ) называется метрическим пространством, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\rho\,(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

2) $\rho\,(x, y) = \rho\,(y, x)\ \forall x, y \in X$;

3) $\rho\,(x, z) \leqslant \rho\,(x, y) + \rho\,(y, z)\ \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Функция ρ называется метрикой или расстоянием. Шаром с центром в точке x радиуса r называется множество $B_r(x) = \{y \in X : \rho\,(x, y) < r\}$.

Определение 2. Множество $U \subset X$ называется открытым, если

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad B_\varepsilon(x) \subset U.$$

Утверждение 1. *Набор τ открытых множеств из определения 2 образует топологию.*

Доказательство. Первые два свойства очевидны. Проверим третье. Пусть $U_k \in \tau$, $V = \cap_{k=1}^n U_k$. Пусть $x \in V$. Существуют $\varepsilon_k > 0$, такие что $B_{\varepsilon_k}(x) \subset U_k$. Положим $\varepsilon = \min_{k=1,\ldots,n} \varepsilon_k > 0$. Тогда $B_\varepsilon(x) \subset V$, следовательно, $V \in \tau$. □

Утверждение 2. *Семейство всех шаров $\mathfrak{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$ является базой топологии τ.*

Утверждение 3. *Пусть A – подмножество X. Тогда*

$$x \in \overline{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad B_r(x) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0.$$

Доказательство. См. §I.2.1, теорема 1. □

Утверждение 4. *Если (X, ρ) – сепарабельное метрическое пространство, то (X, τ_ρ) – пространство со счетной базой.*

Доказательство. Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, $\overline{A} = X$. Тогда

$$\forall y \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_k \in A : \quad \rho\,(x_k, y) < \varepsilon.$$

Докажем, что семейство $\mathfrak{B} = \{B_{1/m}(x_k)\}_{k,m \in \mathbb{N}}$ является базой. Пусть $U \in \tau$, $y \in U$. Существуют m и k, такие что $B_{1/m}(y) \subset U$ и $\rho\,(x_k, y) < 1/2m$. Положим $B_y = B_{1/2m}(x_k)$. Ясно, что $y \in B_y$. Далее, если $z \in B_y$, то

$$\rho\,(y, z) < \frac{1}{2m} + \rho\,(x_k, z) < \frac{1}{m} \quad \Longrightarrow \quad z \in B_{1/m}(y) \quad \Longrightarrow \quad B_y \subset B_{1/m}(y) \subset U.$$

Значит, $U = \cup_y B_y$. $\square$

Замечание. Сравните с §I.5.2, утверждения 1 и 2.

Примеры. 1) Введем на произвольном множестве X метрику $\rho(x,y) = 0$, если $x = y$, $\rho(x,y) = 1$, если $x \neq y$. Соответствующая топология дискретна.

2) $X = \mathbb{C}$, $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

3) $X = S^n$.

2. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $\{x_n\} \subset X$.

Определение 3.

$$x_n \to x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

Утверждение 5 (единственность предела). *Если $x_n \to x$ и $x_n \to y$, то $x = y$.*

Доказательство. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \to 0$. $\square$

Утверждение 6. $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists\{x_n\} \subset A : x_n \to x$.

Доказательство. $\Longrightarrow$). Пусть $x \in \overline{A}$. Имеем

$$B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_n \in A : \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad x_n \to x.$$

$\Longleftarrow$). Пусть $\{x_n\} \subset A$, $x_n \to x$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $x_n \in B_\varepsilon(x)$ при всех $n > N$. Следовательно, $x \in \overline{A}$. $\square$

Теорема 1. *Пусть (X, ρ), (Y, ρ') – метрические пространства, $f : X \to Y$, $f(x) = y$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) отображение f непрерывно в точке x;

2) если $x_n \to x$, то $f(x_n) \to y$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть f непрерывно в x и $x_n \to x$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое $\delta > 0$, что $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(y)$. Начиная с некоторого номера, $x_n \in B_\delta(x)$, поэтому $\rho(f(x_n), y) < \varepsilon$, и значит, $f(x_n) \to y$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\varepsilon > 0$. Предположим, что для любого положительного δ $f(B_\delta(x)) \not\subset B_\varepsilon(y)$. Тогда для любого n существует такая точка $x_n \in B_{1/n}(x)$, что $f(x_n) \notin B_\varepsilon(y)$. Теперь $x_n \to x$, но $f(x_n) \not\to y$. Противоречие. $\square$

Определение 4. Пусть $f : (X, \rho) \to (Y, \rho')$ – биекция. Отображение f называется изометрией, если

$$\rho'(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Замечание. f – изометрия $\Longrightarrow f^{-1}$ – изометрия.

Утверждение 7. *f – изометрия* $\Longrightarrow f \in C(X,Y)$, $f^{-1} \in C(Y,X)$.

Доказательство.

$$x_n \to x \iff \rho(x_n, x) \to 0 \iff f(x_n) \to f(x). \qquad \square$$

Упражнения.

1) Постройте пример метрического пространства, в котором шар большего радиуса может содержаться в шаре меньшего радиуса.

2) Пусть p – простое число. Любое рациональное число $q \neq 0$ представимо в виде $q = \frac{a}{b}p^n$, где a, b, n – целые числа, причем a и b не делятся на p. Введем функцию φ следующим образом: $\varphi(q) = p^{-n}$ при $q \neq 0$, $\varphi(0) = 0$. Докажите, что формула $\rho(q_1, q_2) = \varphi(q_1 - q_2)$ задает некоторую метрику на множестве рациональных чисел.

§2. Нормированные пространства

Так же как метрические пространства – важный частный случай топологических, так и нормированные пространства являются наиболее распространенным частным случаем метрических.

1. Пусть E – линейное пространство над полем K, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение 1. E называется нормированным пространством, если на нем задан функционал, сопоставляющий каждому элементу x неотрицательное число $\|x\|$ (норма x), удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ $\forall \alpha \in K$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in E$.

Утверждение 1. *Пусть E – нормированное пространство, $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Тогда (E, ρ) – метрическое пространство.*

Доказательство. 1) очевидно из 1);

2) $\rho(y,x) = \|(-1)(x-y)\| = \|(x-y)\|$ в силу 2);

3) $\rho(x,z) = \|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$ согласно 3). $\square$

2. *Примеры.*

1) $E = \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

2) $E = C[0,1]$. Введем норму $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Утверждение 2. $C[0,1]$ *– нормированное пространство.*

Доказательство. 1) $\|f\| = 0 \iff f(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$.

2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.

3)
$$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\| + \|g\| \quad \forall x \in [0,1]$$
$$\Longrightarrow \quad \max |f(x) + g(x)| \leqslant \|f\| + \|g\|. \qquad \square$$

Замечание. $C[0,1]$ – сепарабельное пространство. В нем плотно множество полиномов с рациональными коэффициентами (проще доказать, впрочем, плотность множества кусочно линейных функций).

3) Через l_∞ обозначим пространство ограниченных последовательностей вещественных чисел,

$$x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in l_\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| < \infty.$$

Линейные операции введем покоординатно, т.е. $\alpha x = (\alpha \xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, и если $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, то $x + y = (\xi_k + \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Утверждение 3. *Функционал* $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$ *является нормой в* l_∞.

Утверждение 4. *Пространство* l_∞ *не сепарабельно.*

Доказательство. Рассмотрим множество M всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц. M имеет мощность континуума (см. §0.2 пример 2) и $M \subset l_\infty$. Предположим, что некоторое множество A плотно в l_∞, $\overline{A} = l_\infty$. Тогда $B_{1/2}(x) \cap A \neq \emptyset$ $\forall x \in M$. С другой стороны, если $x \neq y \in M$, то $\|x - y\| = 1$, и следовательно, $B_{1/2}(x) \cap B_{1/2}(y) = \emptyset$. Отсюда вытекает, что множество A не счетно. $\square$

Упражнения.

1) Через l_p, $p \geqslant 1$, обозначается пространство последовательностей, суммируемых со степенью p,

$$x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in l_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p =: \|x\|_{l_p}^p < \infty.$$

Докажите, что l_1 – сепарабельное нормированное пространство.

2) Докажите, что l_p – сепарабельное нормированное пространство.

§3. Полные метрические пространства

1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если для любого положительного ε существует такое N, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при всех $n, m > N$.

Утверждение 1. *Если* $x_n \to x$, *то* $\{x_n\}$ *фундаментальна.*

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ $\forall n > N \Longrightarrow$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \varepsilon \qquad \forall n, m > N. \quad \square$$

Определение 2. Пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Определение 3. Полное нормированное пространство называется банаховым.

Замечание. Stefan Banach, Польша, 1892 – 1945.

Примеры полных пространств. 1) $\mathbb{R}^n$; 2) $C[a,b]$; 3) l_∞.

Утверждение 2. *l_∞ полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность x_n элементов l_∞, $x_n = (\xi_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ и $\rho(x_n, x_m) \to 0$. Имеем

$$\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \leqslant \|x_n - x_m\| \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_n\| \leqslant C.$$

Далее, из соотношения $|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| \leqslant \|x_n - x_m\| \to 0$ вытекает, что при каждом k существует такое вещественное число η_k, что $\xi_k^{(n)} \to \eta_k$, причем $|\eta_k| \leqslant C$. Положим $y = (\eta_1, \eta_2, ...) \in l_\infty$. Нам известно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \varepsilon \qquad \forall n, m > N \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Переходя в неравенстве к пределу по $n \to \infty$, получим $|\eta_k - \xi_k^{(m)}| \leqslant \varepsilon$, $\forall m > N$. Отсюда следует $\|y - x_m\| \to 0$. $\square$

2. Этот пункт посвящен двум теоремам, имеющим место в полных метрических пространствах. Ниже (X, ρ) – полное пространство.

Определение 4. Отображение $F : X \to X$ называется сжатием, если

$$\exists \alpha < 1 : \rho(F(x), F(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Утверждение 3. *Всякое сжатие непрерывно.*

Доказательство.

$$x_n \to x \quad \Longrightarrow \quad \rho(F(x_n), F(x)) \leqslant \alpha\rho(x_n, x) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad F(x_n) \to F(x). \qquad \square$$

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений). *Если отображение F является сжатием, то существует единственная неподвижная точка $y \in X$ (т.е. такая, что $F(y) = y$).*

Доказательство. См. в курсе матанализа. $\square$

Положим $K_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) \leqslant r\}$.

Утверждение 4. *Множество $K_r(x)$ замкнуто.*

Доказательство.

$$y_n \to y, \quad \rho(x, y_n) \leqslant r \qquad \Longrightarrow \qquad \rho(x, y) \leqslant r. \qquad \square$$

Теорема 2 (о вложенных шарах). *Пусть $K_n = K_{r_n}(x_n)$ – последовательность вложенных замкнутых шаров, $K_{n+1} \subset K_n$, радиусы которых стремятся к нулю, $r_n \to 0$. Тогда существует единственная точка z, принадлежащая всем шарам K_n (т.е. $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \{z\}$).*

Доказательство. Существование. При $m > n$ точка $x_m \in K_m \subset K_n$, значит, $\rho(x_n, x_m) \leqslant r_n \to 0$, поэтому последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, следовательно, существует такая z, что $x_n \to z$. При этом

$$x_n, x_{n+1}, \dots \in K_n \quad \Longrightarrow \quad z \in K_n \quad \Longrightarrow \quad z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Единственность. Пусть $y, z \in K_n$ при всех n. Тогда

$$\rho(y,z) \leqslant \rho(x_n, y) + \rho(x_n, z) \leqslant 2r_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad y = z. \qquad \square$$

Упражнения.

1) Докажите, что $C[a,b]$ полно.

2) Постройте полное метрическое пространство X и отображение $F : X \to X$, обладающее свойством $\rho(F(x), F(y)) < \rho(x,y)$, $\forall x \neq y$, но не имеющее неподвижных точек.

3) Постройте полное метрическое пространство X и последовательность вложенных замкнутых шаров, пересечение которых было бы пусто.

§4. Пополнение

В этом параграфе мы покажем, что любое метрическое пространство может быть вложено в некоторое полное пространство.

1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Утверждение 1. $|\rho(x,y) - \rho(x',y')| \leqslant \rho(x,x') + \rho(y,y')$.

Утверждение 2. *Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – фундаментальны, то существует предел $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.*

Доказательство. $|\rho(x_n,y_n) - \rho(x_m,y_m)| \leqslant \rho(x_n,x_m) + \rho(y_n,y_m) \to 0$. $\square$

Определение 1. Будем говорить, что фундаментальные последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ эквивалентны и писать $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

Утверждение 3. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

Пусть $\hat{x} = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$ – класс эквивалентных фундаментальных последовательностей. Введем на множестве $\hat{X}$ таких классов, $\hat{X} = \{\hat{x}\}$, функцию $\hat{\rho}$.

Определение 2. Пусть $\{x_n\}$ – какой-то представитель класса $\hat{x}$, $\{y_n\}$ – класса $\hat{y}$. Тогда положим

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Утверждение 4 (корректность определения). *Если* $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ *и* $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, *то* $\lim \rho\,(x_n, y_n) = \lim \rho\,(x'_n, y'_n)$.

Доказательство. Из утверждения 1. □

Утверждение 5. $(\hat{X}, \hat{\rho})$ – *метрическое пространство.*

Доказательство. Ясно, что $\hat{\rho}\,(\hat{x}, \hat{y}) \geqslant 0$. Проверим свойства расстояния.

1)
$$\hat{\rho}\,(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim \rho\,(x_n, y_n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \{x_n\} \sim \{y_n\}.$$

2) $\hat{\rho}\,(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\rho}\,(\hat{y}, \hat{x})$ – очевидно.

3) Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ – фундаментальны. Переходя в неравенстве треугольника $\rho\,(x_n, z_n) \leqslant \rho\,(x_n, y_n) + \rho\,(y_n, z_n)$ к пределу по n, получаем $\hat{\rho}\,(\hat{x}, \hat{z}) \leqslant \hat{\rho}\,(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{\rho}\,(\hat{y}, \hat{z})$. □

2. Определим отображение $j : X \to \hat{X}$, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ класс последовательностей, сходящихся к этому элементу,

$$j(x) = \hat{x} = \{\{x_n\} : x_n \to x\}.$$

Замечание. $j(x) \neq \emptyset$, например, $x_n \equiv x$.

Утверждение 6. $\hat{\rho}\,(j(x), j(y)) = \rho\,(x, y)\ \forall x, y \in X$.

Доказательство. Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\rho\,(x_n, y_n) \to \rho\,(x, y)$. □

Будем отождествлять X и $j(X) \subset \hat{X}$ (они изометричны).

Утверждение 7. $j(X)$ *плотно в* $\hat{X}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\hat{x} \in \hat{X}$, $\{x_n\} \in \hat{x}$. Существует такое N, что $\rho\,(x_n, x_m) < \varepsilon$ при всех $n, m > N$. При фиксированном n получаем $\hat{\rho}\,(j(x_n), \hat{x}) = \lim_{m\to\infty} \rho\,(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$. □

Утверждение 8. $(\hat{X}, \hat{\rho})$ *полно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\hat{x}_n\}$ такова, что $\hat{\rho}\,(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$. При каждом n существует такая $y_n \in X$, что $\hat{\rho}\,(j(y_n), \hat{x}_n) < 1/n$. Следовательно, $\rho\,(y_n, y_m) \to 0$ и последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. Обозначим через $\hat{y}$ класс последовательностей, эквивалентных $\{y_n\}$. Тогда $\hat{\rho}\,(\hat{x}_n, \hat{y}) \leqslant \hat{\rho}\,(\hat{x}_n, y_n) + \hat{\rho}\,(y_n, \hat{y}) \to 0$. □

Определение 3. Полное метрическое пространство $(\hat{X}, \hat{\rho})$ называется пополнением метрического пространства (X, ρ), если X содержится и плотно в $\hat{X}$ и, кроме того, $\hat{\rho}\,|_X \equiv \rho$.

Подведем итог предыдущих построений.

Теорема 1. *У всякого метрического пространства существует пополнение.*

Замечание. Пополнение единственно с точностью до изометрии.

3. *Примеры.*

Утверждение 9. *На пространстве $C\,[-1,1]$ функционал*

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|dt$$

является нормой.

Утверждение 10. *Пространство $C\,[-1,1]$ с нормой $\|.\|_1$ не полно.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{bmatrix} -1, & x \leqslant -1/n, \\ nx, & -1/n \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 1, & x \geqslant 1/n. \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что $\|f_n - f_m\| = |n^{-1} - m^{-1}|$ и последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна. Предположим, что $f_n \to g$. Тогда $\int_0^1 |f_n(t) - g(t)|dt \to 0$, значит $g(t) = 1$ при $t > 0$. Аналогично, $g(t) = -1$ при $t < 0$, тем самым, $g \notin C[-1,1]$. $\square$

Замечания. 1) Пополнением пространства непрерывных функций по этой норме является пространство $L_1(-1,1)$ функций, для которых сходится интеграл $\int_{-1}^1 |f(t)|dt$ (но интеграл надо понимать по Лебегу).

2) При $p \geqslant 1$ вводится пространство $L_p(a,b)$ функций, для которых сходится интеграл $\int_{-1}^1 |f(t)|^p dt$ с нормой $\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$.

Упражнение. Докажите, что если E – линейное нормированное пространство, то его пополнение $\hat{E}$ является банаховым.

Глава III. Отделимость и компактность

§1. Аксиомы отделимости

1. Пусть (X, τ) – топологическое пространство.

Определение 1. (X, τ) удовлетворяет аксиоме T_1, если для любых двух различных точек x, y существует окрестность O_x точки x, не содержащая y.

Утверждение 1. *Если X удовлетворяет аксиоме T_1, то*
1) одноточечные множества $\{x\}$ замкнуты;
2) конечные множества $\{x_1, ..., x_n\}$ замкнуты.

Доказательство. 1) Для всякой точки $y \in X \setminus \{x\}$ существует окрестность $O_y \subset X \setminus \{x\}$, следовательно $X \setminus \{x\}$ открыто;
2) очевидно. □

Примеры. 1) Пусть $X = \{a; b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{b\}, X\}$. Топология, но не T_1.
2) Пусть $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{(c, \infty)\}$. Топология, но не T_1.

Определение 2. (X, τ) удовлетворяет аксиоме T_2 (хаусдорфово пространство), если у любых двух различных точек x, y существуют непересекающиеся окрестности O_x, O_y.

Замечание. Felix Hausdorff, 1868 – 1942.

Утверждение 2. $T_2 \Longrightarrow T_1$.

Утверждение 3. *Если X и Y – хаусдорфовы пространства, то их произведение $Z = X \times Y$ тоже хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $(x_1, y_1) = z_1 \neq z_2 = (x_2, y_2)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_1 \neq x_2$. Существуют непересекающиеся окрестности O_k точек x_k в пространстве X, $k = 1, 2$. Тогда $V_k = O_k \times Y$ – окрестности точек z_k в Z и $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. □

Примеры. 1) На любом бесконечном множестве топология Зарисского удовлетворяет аксиоме T_1 и не удовлетворяет T_2.
2) Прямая с двойным нулем.

2. Пусть (X, τ) – топологическое пространство.

Определение 3. (X, τ) удовлетворяет аксиоме T_3, если для любых замкнутого множества F и точки $x \notin F$ существуют окрестность O_x точки x и открытое множество G, такие что $F \subset G$ и $O_x \cap G = \emptyset$. Пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_3 называется регулярным.

Утверждение 4. *Если пространство регулярно, то оно хаусдорфово.*

Определение 4. (X, τ) удовлетворяет аксиоме T_4, если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 существуют открытые непересекающиеся множества G_1 и G_2, такие что $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$. Пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4 называется нормальным.

Утверждение 5. *Если пространство нормально, то оно регулярно.*

Примеры. 1) В "пространстве слипшихся точек" с топологией $\tau = \{\emptyset, X\}$ выполнены аксиомы T_3 и T_4, но нет T_1 и T_2.

2) Дискретная топология удовлетворяет всем аксиомам.

3) Пусть $X = \mathbb{R}$, τ – обычная топология на прямой. Пусть $F = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Введем топологию τ', включающую все множества вида $U \setminus \tilde{F}$, где $U \in \tau$, $\tilde{F} \subset F$. Аксиома T_2 выполнена, а T_3 – нет, т.к. точка 0 и множество $F = \overline{F}$ не отделимы.

Упражнения.

1) Докажите, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда в пространстве $X \times X$ "диагональ" (т.е. множество $\{(x, x)\}$) замкнута.

2) Введем на множестве $[0, 1]$ отношение эквивалентности $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Докажите, что пространство $([0, 1]/\sim)$ не хаусдорфово.

3) Докажите, что всякое регулярное топологическое пространство со счетной базой нормально (теорема Тихонова).

§2. Нормальные пространства

1. Пусть (X, τ) – нормальное пространство.

Утверждение 1. *Если замкнутое множество F содержится в открытом множестве U, $F \subset U$, то существует открытое множество G, такое что $F \subset G$, $\overline{G} \subset U$.*

Доказательство. Положим $F_1 = F$, $F_2 = X \setminus U$. Существуют $G_1, G_2 \in \tau$, для которых $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ и $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. В качестве G можно взять G_1. □

Теорема 1 (Урысон). *Пусть X – нормальное пространство, A и B – непересекающиеся замкнутые множества. Тогда существует непрерывная функция $f \in C(X, [0, 1])$, такая что $f\,|_A = 0$, $f\,|_B = 1$.*

Доказательство. Первый шаг. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ числа вида $r = 2^{-n}k$, где $n = 0, 1, 2, ...$; $k = 0, 1, ..., 2^n$. Докажем, что существует семейство открытых множеств $G(r)$, обладающих следующими свойствами: $A \subset G(0)$; $\overline{G(r)} \subset G(r')$ при $r < r'$; $X \setminus B = G(1)$. Доказательство проведем индукцией по n. База $n = 0$. Здесь $r = 0$ или $r = 1$.

$$\exists G(0): \quad A \subset G(0), \quad \overline{G(0)} \subset X \setminus B =: G(1).$$

Переход $n - 1 \to n$. Добавляются числа вида $r = (2m + 1)/2^n$. По предположению $\overline{G(2m/2^n)} \subset G((2m + 2)/2^n)$. В силу утверждения 1

$$\exists G\left(\frac{2m+1}{2^n}\right): \quad \overline{G\left(\frac{2m}{2^n}\right)} \subset G\left(\frac{2m+1}{2^n}\right), \quad \overline{G\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)} \subset G\left(\frac{2m+2}{2^n}\right).$$

Положим еще $G(r) = \emptyset$ при $r < 0$, $G(r) = X$ при $r > 1$.

Второй шаг. Положим $f(x) = \sup\{r : x \notin G(r)\}$. Если $x \in A$, то $x \in G(0)$ и $f(x) = 0$. Если $x \in B$, то $x \notin G(1)$ и $f(x) = 1$. Остается доказать непрерывность f.

Пусть $y \in X$ и $\varepsilon > 0$. Существуют такое n, что $2^{-n} < \varepsilon$, и такое r, что $f(y) < r < f(y) + 2^{-n}$. Следовательно, $y \in G(r)$ и $y \notin \overline{G(r-2^{-n})}$. Введем множество $U = G(r) \setminus \overline{G(r-2^{-n})}$. Ясно, что $y \in U \in \tau$. Далее, для любого $z \in U$ имеем

$$\left.\begin{aligned} z \in G(r) &\Longrightarrow f(z) \leqslant r < f(y) + 2^{-n} \\ z \notin \overline{G(r-2^{-n})} &\Longrightarrow f(z) \geqslant r - 2^{-n} > f(y) - 2^{-n} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow |f(y) - f(z)| < 2^{-n} < \varepsilon,$$

тем самым, f непрерывна. $\square$

2. Пусть (X, τ) – метрическое пространство. Введем понятие расстояния от точки до множества: $\rho\,(x, A) = \inf_{y \in A} \rho\,(x, y)$.

Утверждение 2. $x \notin F = \overline{F} \implies \rho\,(x, F) > 0$.

Доказательство. Множество $X \setminus F$ открыто, следовательно, существует такое положительное ε, что

$$B_\varepsilon(x) \subset X \setminus F \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\,(x, y) \geqslant \varepsilon \quad \forall y \in F. \qquad \square$$

Теорема 2. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Выполнение аксиомы T_1 (и T_2) очевидно. Проверим T_4.

Пусть F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества. Для всякого $x \in F_1$ положим $r_1(x) = \rho\,(x, F_2)/2 > 0$. Образуем множество $G_1 = \cup_{x \in F_1} B_{r_1(x)}(x)$. Ясно, что $F_1 \subset G_1 \in \tau$. Аналогично поступим с F_2:

$$r_2(y) = \rho\,(y, F_1)/2 > 0, \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} B_{r_2(y)}(y), \quad F_2 \subset G_2 \in \tau.$$

Предположим теперь, что найдется точка $z \in G_1 \cap G_2$. Тогда существуют $x_k \in F_k$, такие что $\rho\,(x_k, z) < r_k(x_k)$, $k = 1, 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho\,(x_1, x_2) < r_1(x_1) + r_2(x_2) &= \frac{1}{2}(\rho\,(x_1, F_2) + \rho\,(x_2, F_1)) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\rho\,(x_1, x_2) + \rho\,(x_2, x_1)) = \rho\,(x_1, x_2), \end{aligned}$$

и мы пришли к противоречию. Поэтому $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. $\square$

3. Пусть (X, τ) – топологическое пространство.

Определение 1. Пространство (X, τ) называется метризуемым, если существует такая метрика $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, что $\tau = \tau_\rho$.

Утверждение 3. *Всякое метризуемое пространство нормально.*

Доказательство. Теорема 2. $\square$

Теорема 3 (Урысон). *Нормальное топологическое пространство со счетной базой метризуемо.*

Без доказательства.

Упражнение. Предъявите два замкнутых непересекающихся подмножества A и B прямой $\mathbb{R}$, для которых $\inf_{x \in A, y \in B} \rho\,(x, y) = 0$.

§3. Компактные множества

1. Пусть (X, τ) – топологическое пространство.

Определение 1. Множество $Y \subset X$ называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, т.е.

$$Y \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \tau \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \alpha_1, ..., \alpha_N : \quad Y \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k}.$$

Утверждение 1. *Если множества* Y_1, ... Y_m *компактны, то их объединение* $Y = \cup_{j=1}^{m} Y_j$ *тоже компактно.*

Утверждение 2. *Пусть* Y *– компактно,* F *– его замкнутое подмножество,* $F = \overline{F} \subset Y$. *Тогда* F *компактно.*

Доказательство. Пусть $F \subset \cup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha \in \tau$. Положим $V = (X \setminus F) \in \tau$. Тогда

$$Y \subset (\bigcup_{\alpha} U_\alpha) \bigcup V \quad \Longrightarrow \quad \exists \alpha_1, ..., \alpha_N : \quad Y \subset (\bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k}) \bigcup V$$

и $F \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k}$. $\square$

Примеры. 1) $X = \{x_1, ..., x_n\}$ – компактно;

2) $\mathbb{R}^n$ не компактно.

Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.

Теорема 1. *Пусть* X, Y *– топологические пространства, причем* X *компактно. Если* $f \in C(X, Y)$, *то* $f(X)$ *компактно в* Y.

Доказательство. Пусть $f(X) \subset \cup_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \in \tau_Y$. Множества $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ открыты в X. Имеем

$$X \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha \quad \Longrightarrow \quad X \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k} \quad \Longrightarrow \quad f(X) \subset \bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k}. \qquad \square$$

2. Пусть (X, τ) – хаусдорфово пространство.

Утверждение 3. *Пусть* $K \subset X$, K *компактно,* $y \notin K$. *Тогда существуют открытые множества* U, V, *такие что* $K \subset U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Доказательство. Для любой точки $x \in K$ существуют открытые U_x, V_x, для которых $x \in U_x$, $y \in V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$. В силу компактности K, из того, что $K \subset \cup_x U_x$, вытекает, что существуют точки $x_1, ..., x_N$, такие что $K \subset \cup_{j=1}^{N} U_{x_j}$. Остается положить

$$U = \bigcup_{j=1}^{N} U_{x_j}, \qquad V = \bigcap_{j=1}^{N} V_{x_j}. \qquad \square$$

Утверждение 4. *В хаусдорфовом пространстве любое компактное множество замкнуто.*

Доказательство. Пусть K – компактно в X. По предыдущему утверждению для любой точки $y \notin K$ существует открытое V, такое что $y \in V \subset X \setminus K$. Следовательно, $(X \setminus K) \in \tau$. $\square$

Теорема 2. *Если (X, τ) – компактное хаусдорфово пространство, то оно нормально.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся множества. В силу утверждения 2, F_1 и F_2 компактны. Для каждой $y \in F_2$ найдем, согласно утверждению 3, открытые непересекающиеся множества U_y, V_y, такие что $F_1 \subset U_y$, $y \in V_y$. Имеем

$$F_2 \subset \bigcup_y V_y \quad \Longrightarrow \quad \exists \{y_1, ..., y_N\}: \quad F_2 \subset \bigcup_{k=1}^{N} V_{y_k}.$$

Положим

$$G_1 = \bigcap_{k=1}^{N} U_{y_k}, \qquad G_2 = \bigcup_{k=1}^{N} V_{y_k}.$$

Эти множества открыты и не пересекаются, тем самым, мы проверили $T4$. $\square$

Утверждение 5. *Пусть X – компактное пространство, Y – хаусдорфово, а отображение $f : X \to Y$ биективно. Если f непрерывно, то и обратное отображение f^{-1} непрерывно (т.е. f – гомеоморфизм).*

Доказательство. Если $F = \overline{F} \subset X$, то F компактно. По теореме 1 множество $f(F)$ тоже компактно, и следовательно, замкнуто. Таким образом, для отображения f^{-1} прообраз любого замкнутого множества замкнут. $\square$

Упражнения.

1) Докажите, что произведение компактных пространств компактно.

2) Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная биекция, то f^{-1} также непрерывна.

3) Топологическое пространство называется локально компактным, если любая его точка обладает компактной окрестностью. Докажите, что локально компактное хаусдорфово пространство регулярно.

§4. Компактность в метрических пространствах

1. Компактность в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1 (Гейне – Борель). *Отрезок $[a, b]$ компактен.*

Доказательство. Предположим, что $[a, b] \subset \cup_\alpha U_\alpha$ и из открытого покрытия U_α нельзя выбрать конечное подпокрытие. Разделим отрезок пополам и обозначим через $[a_1, b_1]$ тот, который нельзя покрыть конечным числом множеств U_α. И т. д. На n-ном шаге получим отрезок $[a_n, b_n]$, длина которого равна $(b-a)2^{-n}$. По теореме о вложенных промежутках существует точка c, принадлежащая всем $[a_n, b_n]$. По условию $c \in U_{\alpha_0}$ при некотором α_0. Следовательно, существует такое m, что $[a_m, b_m] \subset U_{\alpha_0}$. Противоречие. $\square$

Утверждение 1. *Параллелепипед* $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ *компактен в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Аналогично. $\square$

Теорема 2. *Множество* $K \subset \mathbb{R}^n$ *компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. $\Longrightarrow$) Замкнутость компактного K вытекает из хаусдорфовости $\mathbb{R}^n$. Докажем ограниченность.

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \exists M : \quad K \subset B_M(0).$$

$\Longleftarrow$) K – ограничено, значит, $K \subset Q = [-L, L] \times ... \times [-L, L]$ при некотором L. Множество Q компактно, K замкнуто, следовательно, компактно. $\square$

Следствие 1. *Сфера* S^2 *не гомеоморфна плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Следствие 2 (теорема Вейерштрасса). *Пусть* (X, τ) *– компактное топологическое пространство,* f *– непрерывная функция,* $f \in C(X, \mathbb{R})$. *Тогда* f *ограничена и существуют такие точки* $a, b \in X$, *что* $f(a) = \min_{x \in X} f(x)$, $f(b) = \max_{x \in X} f(x)$.

Замечание. Пусть (X, τ) – компактно. Линейное пространство $C(X, \mathbb{R})$ является банаховым с нормой $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$.

2. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Определение 1. Множество M называется секвенциально компактным, если из любой последовательности точек $\{x_n\} \subset M$ можно выбрать сходящуюся к некоторой точке M подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in M$.

Утверждение 2. *Секвенциально компактное множество замкнуто.*

Теорема 3. *В метрическом пространстве множество компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Без доказательства.

Упражнения.

1) Множество M называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор точек $\{y_1, ..., y_n\}$, такой что $M \subset \cup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(y_k)$. Докажите, что в полном метрическом пространстве множество секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и вполне ограничено (теорема Хаусдорфа).

2) Если X – топологическое пространство со счетной базой, то из любого его открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.

3) Докажите теорему 3.

Глава IV. Гомотопии

При гомеоморфизмах топологических пространств остаются инвариантными их гомотопические группы. Эти группы являются одним из основных инструментов изучения топологических пространств. В этой главе мы определим первую гомотопическую группу – группу Пуанкаре.

§1. Гомотопные отображения

1. Пусть X, Y – топологические пространства, $f, g \in C(X, Y)$.

Определение 1. Отображения f и g называются гомотопными (мы будем писать $f \sim g$), если существует такое отображение $F \in C(X \times [0,1], Y)$, что $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$.

Утверждение 1. *Гомотопия – отношение эквивалентности на* $C(X, Y)$.

Доказательство. 1) $f \sim f$, т.к. можно взять $F(x, t) = f(x)$.
2) Если $f \sim g$, то $g \sim f$, т.к. можно взять $G(x, t) = F(x, 1 - t)$.
3) Если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$, т.к. можно взять

$$H(x,t) = \left[\begin{array}{rl} F(x, 2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ G(x, 2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{array} \right.$$

где F и G – отображения, реализующие гомотопии $f \sim g$ и $g \sim h$. $\square$

2. Пусть X – топологическое пространство, $x_0 \in X$.

Определение 2. Пространство X называется стягиваемым, если гомотопны отображения f_0 и f_1, где $f_0(x) = x_0$, $f_1(x) = x$.

Утверждение 2. *Если пространство X стягиваемо, то оно линейно связно.*

Доказательство. По условию существует такое $F \in C(X \times [0,1], X)$, что $F(x, 0) = x_0$, $F(x, 1) = x$. Для произвольной точки $y \in X$ рассмотрим отображение $g : [0,1] \to X$, $g(t) = F(y, t)$. Ясно, что g непрерывно, $g(0) = x_0$, $g(1) = y$, тем самым, существует путь, соединяющий y и x_0. Аналогично, для любой $z \in X$ существует путь, соединяющий z и x_0, а следовательно (см. §I.7.1, утверждение 1), и путь, соединяющий y и z. $\square$

Утверждение 3. *Определение стягиваемости не зависит от точки* x_0.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, X – стягиваемо. Пусть $\tilde{x} \in X$. Докажем, что $f_0 \sim \tilde{f}$, где $f_0(x) = x_0$, $\tilde{f}(x) = \tilde{x}$. X – линейно связно, поэтому существует путь $h \in C([0,1], X)$, $h(0) = x_0$, $h(1) = \tilde{x}$. Теперь достаточно взять $F(x, t) = h(t)$. $\square$

Пример. Любое выпуклое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ стягиваемо. Действительно, пусть $x_0 \in M$. Положим $F(x, t) = t(x - x_0) + x_0$. Имеем $F(x, t) \in M$, $\forall x \in M, t \in [0,1]$, F непрерывно, $F(x, 0) = x_0$, $F(x, 1) = x$. В частности, $\mathbb{R}^n$ стягиваемо.

Упражнение. Пусть X, Y – топологические пространства, причем Y стягиваемо. Докажите, что любые два непрерывных отображения из X в Y гомотопны.

§2. Теорема Брауэра

Теорема 1. *Сфера S^{n-1} не стягиваема.*

Доказательство. Мы рассмотрим только случай $n = 2$ (окружность), а случай $n > 2$ оставим без доказательства.

Выберем на окружности три точки A, B и C. Предположим, наше утверждение неверно и существует отображение $F \in C(S^1 \times [0,1], S^1)$, для которого $F(x,0) = A$, $F(x,1) = x$, $F(A,t) = A$. Развернем цилиндр $S^1 \times [0,1]$ в прямоугольник (разрыв окружности по точке A) и разобьем его на квадраты, а каждый квадрат – на два треугольника. Таким образом, каждый узел получившейся сетки служит вершиной шести треугольников. Будем считать, что триангуляция настолько мелкая, что для каждой вершины V образ всех шести треугольников при отображении F содержится внутри дуги (ABC), либо (BCA), либо (CAB). Сопоставим каждой вершине V соответственно букву B, либо C, либо A. В верхней "строке" прямоугольника окажется слово $AA...BB...CC...AA$, а в нижней и на боковых сторонах будут только буквы A. Отметим, что не может оказаться так, что вершинам какого-то одного треугольника сопоставлены три разные буквы.

Теперь соединим верхние левую и правую вершины нашего прямоугольника ломаной. Будем двигать ее вниз, "откусывая" на каждом шаге по одному треугольнику, так что в первый момент она совпадала с верхней стороной, а в последний – с тремя остальными сторонами прямоугольника. На каждом шаге сопоставим ломаной число по следующему алгоритму. Если звено ломаной соединяет две вершины, которым соответствуют одинаковые буквы, т.е. AA, BB или CC, то такому звену сопоставим 0. Если звено соответствует переходу (при движении по ломаной слева направо) AB, BC или CA, то 1, если переходу AC, CB или BA, то -1. А всей ломаной – сумму чисел, сопоставленных звеньям. Таким образом, в начальный момент ломаной соответствует число 3, а в конечный – 0. Нетрудно проверить, что при "съедании" одного треугольника сумма, соответствующая ломаной, измениться не может (т.к. с точностью до замены букв каждый треугольник – это либо AAB, либо ABA, либо AAA). Мы пришли к противоречию. $\square$

Теорема 2 (Брауэр). *Пусть $\overline{B}$ – замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $f : \overline{B} \to \overline{B}$ – непрерывное отображение. Тогда существует хотя бы одна неподвижная точка $x = f(x)$.*

Доказательство. $n = 1$). Здесь $f \in C[-1,1]$. Положим $g(t) = t - f(t)$. Имеем $g(-1) \leqslant 0$, $g(1) \geqslant 0$, следовательно, существует такая точка t, что $g(t) = 0$ и $f(t) = t$.

$n \geqslant 2$). Предположим, что $f \in C(\overline{B}, \overline{B})$ и $f(x) \neq x$ ни при каком $x \in \overline{B}$. Определим точку $h(x)$ как пересечение луча $[f(x), x)$ со сферой S. Ясно, что отображение $h : \overline{B} \to S$ непрерывно и что $h(x) = x$, если $x \in S$. Введем обозначение $x_0 := h(0) \in S$ и рассмотрим отображение $F : S \times [0,1] \to S$, заданное по формуле $F(x,t) = h(tx)$. Т.к. $F(x,0) = x_0$, $F(x,1) = x$, отсюда следовало бы, что сфера стягиваема, что противоречит предыдущей теореме. Значит, наше предположение неверно и существует хотя бы одна неподвижная точка. $\square$

Примеры. 1) Если рассмотреть на плоскости кольцо X, то поворот на какой-нибудь угол является непрерывным отображением X в себя, не имеющим неподвижных точек.

2) Рассмотрим множество натуральных чисел как метрическое пространство с метрикой $\rho(n,m) = 1 - \delta_{nm}$. Отображение $f(n) = n+1$ является непрерывным отображением замкнутого единичного шара в себя, не имеющим неподвижных точек.

Упражнение. Пусть X – топологическое пространство, гомеоморфное замкнутому шару в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что всякое непрерывное отображение пространства X в себя имеет неподвижную точку.

§3. Фундаментальная группа

1. Пусть X – топологическое пространство, $x_0 \in X$.

Определение 1. Петлей называется такое отображение $\varphi \in C([0,1], X)$, что $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Множество всех петель с началом и концом в x_0 обозначим через Π.

Утверждение 1. *Гомотопия – отношение эквивалентности в* Π.

Определение 2. Классы эквивалентных петель будем обозначать $[\varphi] = \{\psi \in \Pi : \psi \sim \varphi\}$. Множество классов эквивалентности обозначим $\pi_1(X, x_0) = \{[\varphi]\}$.

Определение 3. Произведением петель назовем отображение

$$(\varphi \cdot \psi)(t) = \left[\begin{array}{rl} \varphi(2t), & t \leqslant 1/2 \\ \psi(2t-1), & t \geqslant 1/2 \end{array}\right. .$$

Замечание. Ясно, что $\varphi \cdot \psi \in \Pi$.

Утверждение 2.

$$\varphi \sim \tilde{\varphi}, \quad \psi \sim \tilde{\psi}, \quad \Longrightarrow \quad \varphi \cdot \psi \sim \tilde{\varphi} \cdot \tilde{\psi}.$$

Таким образом, корректно определено произведение $[\varphi]\,[\psi] = [\varphi \cdot \psi]$.

Теорема 1. $\pi_1(X, x_0)$ – *группа.*

Доказательство. 1) Положим $\varphi_0(t) = x_0$. Проверим, что класс петель, гомотопных φ_0, обладает свойствами единицы группы, $e = [\varphi_0]$. Пусть $\varphi \in \Pi$, $\psi = \varphi \cdot e$,

$$\psi(t) = \left[\begin{array}{rl} \varphi(2t), & t \leqslant 1/2 \\ x_0, & t \geqslant 1/2 \end{array}\right. .$$

Отображение

$$F(s,t) = \left[\begin{array}{rl} \varphi\left(\dfrac{2s}{t+1}\right), & 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{t+1}{2} \\ x_0, & (t+1)/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{array}\right.$$

принадлежит классу $C([0,1]\times[0,1],X)$ и $F(s,0)=\psi(s)$, $F(s,1)=\varphi(s)$. Тем самым, $\psi\sim\varphi$.

2) Положим $\varphi^{-1}(t)=\varphi(1-t)$. Проверим, что класс петель $[\varphi^{-1}]$ обладает свойствами обратного элемента, $[\varphi]^{-1}=[\varphi^{-1}]$. Пусть $\psi=\varphi\cdot\varphi^{-1}$,

$$\psi(t)=\left[\begin{array}{rl}\varphi(2t), & t\leqslant 1/2\\ \varphi(2-2t), & t\geqslant 1/2\end{array}\right. .$$

Отображение

$$F(s,t)=\left[\begin{array}{rl}x_0, & s\leqslant t/2\\ \varphi(2s-t), & t/2\leqslant s\leqslant 1/2\\ \varphi(2-2s-t), & 1/2\leqslant s\leqslant 1-t/2\\ x_0, & 1-t/2\leqslant s\end{array}\right.$$

принадлежит классу $C([0,1]\times[0,1],X)$ и $F(s,0)=\psi(s)$, $F(s,1)=x_0$. Тем самым, $\psi\sim\varphi_0$.

3) Пусть $\varphi,\psi,\chi\in\Pi$. Докажем, что $(\varphi\cdot\psi)\cdot\chi\sim\varphi\cdot(\psi\cdot\chi)$. Нужными свойствами обладает отображение

$$F(s,t)=\left[\begin{array}{rl}\varphi\left(\dfrac{4s}{t+1}\right), & 0\leqslant s\leqslant\dfrac{t+1}{4}\\ \psi(4s-t-1), & (t+1)/4\leqslant s\leqslant(t+2)/4\\ \chi\left(\dfrac{4s-2-t}{2-t}\right), & \dfrac{t+2}{4}\leqslant s\leqslant 1\end{array}\right. . \qquad \square$$

Определение 4. $\pi_1(X,x_0)$ называется фундаментальной группой пространства X с отмеченной точкой x_0.

Примеры. 1) Фундаментальная группа круга тривиальна. 2) Фундаментальная группа кольца на плоскости нетривиальна (изоморфна $\mathbb{Z}$).

2. Пусть X, Y – топологические пространства. В этом пункте мы докажем, что фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны.

Теорема 2. *Пусть $f:X\to Y$ – гомеоморфизм, $f(x_0)=y_0$. Тогда $\pi_1(X,x_0)\simeq\pi_1(Y,y_0)$.*

Доказательство. Пусть

$$\Pi_X=\{\varphi\in C([0,1],X):\varphi(0)=\varphi(1)=x_0\},$$
$$\Pi_Y=\{\psi\in C([0,1],Y):\psi(0)=\psi(1)=y_0\}.$$

Отображение $G:\Pi_X\to\Pi_Y$, сопоставляющее каждой петле $\varphi\in\Pi_x$ петлю $G(\varphi)=f\circ\varphi\in\Pi_Y$, является биекцией. Если $\varphi\sim\tilde\varphi$, то $G(\varphi)\sim G(\tilde\varphi)$. Таким образом, возникает биекция

$$g:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0),\quad g[\varphi]=[G(\varphi)].$$

Проверим, что отображение g переводит произведение в произведение. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \Pi_X$, $G(\varphi_1) = \psi_1$, $G(\varphi_2) = \psi_2$. Имеем

$$G(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(t) = f((\varphi_1 \cdot \varphi_2)(t)) = \left[\begin{array}{r} f(\varphi_1(2t)),\ t \leqslant 1/2 \\ f(\varphi_2(2t-1)),\ t \geqslant 1/2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{r} \psi_1(2t),\ t \leqslant 1/2 \\ \psi_2(2t-1)),\ t \geqslant 1/2 \end{array}\right] = (\psi_1 \cdot \psi_2)(t) \quad \Longrightarrow$$

$$G(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \psi_1 \cdot \psi_2 \quad \Longrightarrow \quad g([\varphi_1]\,[\varphi_2]) = g[\varphi_1]\,g[\varphi_2]. \qquad \square$$

3. Пусть X – топологическое пространство. Для доказательства того, что фундаментальная группа линейно связного пространства не зависит от выбора точки x_0, нам понадобятся следующие обозначения. Пусть γ_1, γ_2 – пути в X, $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$. Положим

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \left[\begin{array}{rl} \gamma_1(2t), & t \leqslant 1/2 \\ \gamma_2(2t-1), & t \geqslant 1/2 \end{array}\right.$$

($\gamma_1 \cdot \gamma_2$ – путь в X) и $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Ясно, что $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \sim \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$. Если $\gamma(0) = x_0$, то $\gamma \cdot \gamma^{-1} \in \Pi_{x_0}$ и $[\gamma \cdot \gamma^{-1}] = e$ в $\pi_1(X, x_0)$.

Утверждение 3. *Пусть $x_0, x_1 \in X$. Если существует путь γ, соединяющий точки x_0 и x_1, то $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Pi_{x_0}$. Положим $G\varphi = \gamma^{-1} \cdot \varphi \cdot \gamma \in \Pi_{x_1}$. Если $\varphi \sim \tilde{\varphi}$, то $G\varphi \sim G\tilde{\varphi}$. Возникает отображение $g : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$. По определению зададим отображение $G^{-1} : \psi \mapsto \gamma \cdot \psi \cdot \gamma^{-1}$ (это **не** обратное отображение). Оно порождает $g^{-1} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$. Это отображение уже является обратным к g, т.к.

$$g^{-1}(g\,[\varphi]) = g^{-1}[\gamma^{-1} \cdot \varphi \cdot \gamma] = [\gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \varphi \cdot \gamma \cdot \gamma^{-1}] = [\gamma \cdot \gamma^{-1}]\,[\varphi]\,[\gamma \cdot \gamma^{-1}] = [\varphi].$$

Таким образом, g – биекция.

Пусть теперь $\varphi_1, \varphi_2 \in \Pi_{x_0}$. Имеем

$$\begin{aligned} g([\varphi_1]\,[\varphi_2]) = g([\varphi_1 \cdot \varphi_2]) &= [\gamma^{-1} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} \cdot \varphi_1 \cdot \gamma]\,[\gamma^{-1} \cdot \varphi_2 \cdot \gamma] = g[\varphi_1]\,g[\varphi_2]. \end{aligned} \qquad \square$$

Следствие. *Если X линейно связное пространство, то $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$ при любых x, y.*

Определение 4'. $\pi_1(X)$ называется фундаментальной группой линейно связного пространства X (группа Пуанкаре).

Замечание. Henri Poincaré, 1854 – 1912.

4. *Примеры.*

1) Если пространство X стягиваемо, то $\pi_1(X) \simeq \{0\}$. В частности, фундаментальная группа $\mathbb{R}^n$ тривиальна.

2) $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

3) Фундаментальная группа тора изоморфна $\mathbb{Z}^2$.

4) Рассмотрим на плоскости круг, из которого вырезаны два меньших непересекающихся круга (крендель). Фундаментальная группа такого пространства не абелева.

5) $\pi_1(S^n) \simeq \{0\}$ при $n \geqslant 2$. Следовательно, тор не гомеоморфен сфере.

Упражнение. Пусть $Q = [0,1]^n$ – куб, ∂Q – его граница, $\Pi = \{\varphi \in C(Q, X) : \varphi(\partial Q) = x_0\}$. Гомотопия – отношение эквивалентности на Π. $[\varphi]$ – класс эквивалентности. Введем произведение

$$(\varphi \cdot \psi)(t_1, t_2, ..., t_n) = \left[\begin{array}{rl} \varphi(2t_1, t_2, ..., t_n), & t_1 \leqslant 1/2 \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n), & t_1 \geqslant 1/2 \end{array}\right. .$$

Корректно определено произведение $[\varphi]\,[\psi] = [\varphi \cdot \psi]$. Возникает $\pi_n(X, x_0)$ – n-мерная гомотопическая группа пространства X с отмеченной точкой x_0. Докажите, что $\pi_n(X, x_0)$ – абелева группа при $n \geqslant 2$.

Вопросы к зачету

1. Счетные и несчетные множества.
2. Открытые множества.
3. Замкнутые множества.
4. Непрерывные отображения.
5. Фактортопология.
6. База топологии.
7. Связные множества.
8. Линейно связные множества.
9. Метрические пространства.
10. Нормированные пространства.
11. Принцип сжимающих отображений.
12. Теорема о вложенных шарах.
13. Пополнение метрического пространства.
14. Аксиомы отделимости.
15. Теорема Урысона.
16. Нормальные пространства (связь с метрическими).
17. Компактные множества.
18. Компактность в $\mathbb{R}^n$
19. Компактность в метрических пространствах.
20. Гомотопные отображения.
21. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
22. Фундаментальная группа (определение).
23. Фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны.
24. Фундаментальная группа линейно связного пространства.

Список литературы

[1] Борисович, Близняков, Израилевич, Фоменко, *Введение в топологию*, М, Наука, 1995.
[2] Бурбаки, *Общая топология, основные структуры*, М, Наука, 1968.
[3] Виро, Иванов, Нецветаев, Харламов, *Задачи по топологии*, СПбГУ, 2000.
[4] Колмогоров, Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М, Наука, 1989.
[5] Мищенко, Фоменко, *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, М, Наука, 2000.