Алгебра, III семестр

Осень 2016, лектор: Всемирнов Максим Александрович

Автор: Ольга Черникова, Глеб Валин

Собрано: 11 февраля 2016 г. 12:05

Оглавление

Глава 1

Пространства со скалярным произведением

1.1. Билинейные и полуторалинейные формы

$\mathfrak{Def}$ **1.1.1.** V — векторное пространство над K. $B\colon V \times V \to K$. B — билинейная форма, если B линейно по каждому аргументу.

$$B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y)$$
$$B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 B(x, y_1) + \alpha_2 (x, y_2)$$

$\mathfrak{Def}$ **1.1.2.** B — билинейная форма.

1. B — симметрическая, если $\forall x, y \in V, B(x, y) = B(y, x)$.
2. B — кососимметрическая, если
   (a) $\forall x, y \in V B(x, y) = -B(y, x)$
   (b) $\forall x \in V, B(x, x) = 0$

Замечание 1.1.1. Если $\operatorname{char} K \neq 2$, то $a \Rightarrow b$.

$$B(x, x) = -B(x, x) \Rightarrow 2B(x, x) = 0 \Rightarrow B(x, x) = 0$$

Замечание 1.1.2. Для произвольного поля $b \Rightarrow a$.

$$0 = B(x + y, x + y) = B(x + y, x) + B(x + y, y) = B(x, x) + B(y, x) + B(x, y) + B(y, y)$$
$$B(y, x) + B(x, y) = 0$$
$$B(x, y) = -B(y, x)$$

$$B(0, y) = B(0 + 0, y) = B(0, y) + B(0, y)$$
$$\forall y \in V, 0 = B(0, y)$$
$$\forall x \in V, 0 = B(x, 0)$$

$\mathfrak{Def}$ **1.1.3.** B — невырожденная, если

$$\forall x \neq 0 \exists y\colon B(x, y) \neq 0$$
$$\forall y \neq 0 \exists x\colon B(x, y) \neq 0$$

$\mathfrak{Def}$ 1.1.4. Пусть $K = \mathbb{R}, V$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$. $B\colon V\times V \to \mathbb{R}, B$ — билинейная форма. B положительно определенна, если

$$\forall x\colon B(x,x) \geqslant 0 \quad B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\mathfrak{Def}$ 1.1.5. B — неотрицательно определена, если

$$\forall x\colon B(x,x) \geqslant 0$$

Замечание 1.1.3. Положительная определнность $\Rightarrow$ невырожденность.

Пример 1.1.1.

1. $\mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$B(x,y) = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

B — симметричный положительный оператор.

2. $a_1, \cdots, a_n \in R$.

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$$

B — симметричная. B — положительно определенная $\Leftrightarrow$ все $a_i > 0$.

3. K — произвольное.

$$A \in M(n,n,K), V = K^n$$
$$B\colon V\times V \to K$$
$$B(x,y) = x^T A y$$

Если $A = A^T$, то B — симметричная.

$$B(x,y) = x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T (x^T)^T = y^T A^T x = y^T A x = B(y,x)$$

Верно и обратное. Если $A \neq A^T$, и $\exists i, j a_{ij} \neq a_{ji}$, то

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x^T A y = a_{ij}$, $y^T A x = a_{ji}$, таким образом B не симметричная.

B — кососимметричная $\Leftrightarrow$

(a) $A = -A^T$

(b) На диагонали A нули.

4.

$$V = C([a,b],\mathbb{R})$$
$$B(f,g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

B — симметричная.

$$\int_a^b f^2(t)dt \geqslant 0$$
$$\int_a^b f^2(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Положительно определенная.

5. $V = C([a,b],\mathbb{R})$, ρ — непрырывная функция на $[a,b]$.

$$B(f,g) = \int\limits_a^b \rho(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

B — симметрична.

Если $\rho > 0$ на $[a,b]$, то B — положительно определено (упражнение: когда B — невыраждена?).

6. $V = \mathbb{R}[t]$.

$$B(f,g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
$$B(f,g) = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

$\mathfrak{Def}$ 1.1.6. V — векторное пространство над R, $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$. $B\colon V\times V \to \mathbb{R}, B$ — симмитрична, положительно определенная. Тогда (V,B) называется евклидовым пространством.

$\mathfrak{Def}$ 1.1.7. K — поле. $^-\colon K \to K$ — изоморфизм поля K, $^- \neq id$, $(^-)^2 = id$, $\forall a \in K\colon \bar{\bar{a}} = a$. Тогда $^-$ — инвлюция на поле K.

Пример 1.1.2. $\mathbb{C}$ и комплексное сопряжение.

$\mathfrak{Def}$ 1.1.8. V — векторное пространство над K. $B\colon V\times V \to K$ B — полуторолиненая форма если:

1. $B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$
2. $B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$
3. $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$
4. $B(x, \alpha y) = \bar{\alpha} B(x, y)$

$\mathfrak{Def}$ 1.1.9. B называется эрмитово симметричной, если

$$B(x,y) = \overline{B(y,x)}$$

$\mathfrak{Def}$ 1.1.10. Если B эрмитово симмитричная, $B(x,x) \in \mathbb{R}$ и

$$\forall x \in V, B(x,x) \geqslant 0 \quad B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

то B — положительно определенная.

$\mathfrak{Def}$ 1.1.11. B — невырожденная, если

$$\forall x \neq 0 \exists y B(x,y) \neq 0$$
$$\forall y \neq 0 \exists x B(x,y) \neq 0$$

Положительно определенная $\Rightarrow$ невыражденная.

$\mathfrak{Def}$ 1.1.12. $K = \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = n < \infty$. $B\colon V \times V \to K$, B — эрмитово симмитрична, положительно определенная. Тогда (V, B) называется унитарным пространством.

Пример 1.1.3.

1. C^n

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$
$$B(x, \lambda y) = \bar{\lambda} B(x,y)$$

Эрмитово симмитрична, положительно определена.

2.

$$B(x,y) = x^T A \bar{y}$$

(Упражнение: B — эрмитово симмитрично $\Leftrightarrow A = \bar{A}^T$)

3. $V = C([a,b] \to \mathbb{C})$.

$$B(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} \mathrm{d}t$$

$$B(f,f) = \int_a^b |f|^2 \mathrm{d}t$$

B — положительно определенная.

$B(u,v)$ — полуторолинейна, эрмитово симметрична. K — поле с инволюцией. Если $K = \mathbb{C}$,

$$B(u,v) = \overline{B(u,v)} \Rightarrow B(u,v) \in \mathbb{R}$$

Выше было: $^-$ — инволюция на K (то есть, в частности, $^- \neq id$)

$$B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$$
$$B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2)$$
$$B(\lambda u, v) = \lambda B(u,v)$$
$$B(u, \lambda v) = \bar{\lambda} B(u,v)$$

Далее $^-$ — либо инволюция на K, либо id. B, соответственно, полуторолинейная или билинейная форма.

1.2. Матрица Грама

$\mathfrak{Def}$ 1.2.1. $\dim_K V < \infty$. $B\colon V \times V \to K$ — полуторолинейная(билинейная) форма. $v_1, \dots, v_n$ — базис V.

$$\Gamma \in M(n \times n, K)$$
$$\Gamma = (B(v_i, v_j))_{i,j=1..n}$$

Γ — матрица Грама формы B, отвечающая базису $v_1, \cdots, v_n$.

Почему нам достаточно Γ, чтобы востановить значение билинейной формы на всем пространстве.

$$x, y \in V$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$
$$B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \bar{y}_j B(v_i, v_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i B(v_i, v_j) \bar{y}_j = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B(v_i, v_j) \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$$
$$B(x,y) = x^T \Gamma \bar{y}$$

Замечание 1.2.1 (Замечание о бесконечномерном случае). $x = \sum x_i v_i$, где почти все $x_i = 0$. $y = \sum y_i v_j$, где почти все $y_i = 0$.

$$B(x,y) = \sum_i \sum_j x_i B(v_i, v_j) \bar{y}_j$$

почти все $x_i, y_j = 0$.

Лемма 1.2.1. Матрица Грама эрмитово симметрична $\Leftrightarrow$ форма эрмитово симметрична.

▶ Эрмитово симметрична $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$.

$$\Gamma = B(v_i, v_j)$$

$\Gamma^T = \overline{\Gamma}$ — эрмитово симметричная матрица.

Верно и обратное.

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$B(x,y) = x^T \Gamma \bar{y}$$
$$\overline{B(x,y)} = \overline{(x^T \Gamma \bar{y})} = \left(\overline{x^T \Gamma \bar{y}}\right)^T =$$
$$= \left(\bar{x}^T \bar{\Gamma} \bar{\bar{y}}\right)^T = y^T \bar{\Gamma}^T (\bar{x}^T)^T = y^T \Gamma \bar{x} = B(y,x)$$
$$B(x,y) = \overline{B(y,x)}$$

◀

Лемма 1.2.2.

1. B — эрмитово симметрична полуторолинейная $\Leftrightarrow$ ее матрица Грама эрмитово симметрична.
2. B — симметрична билинейная форма $\Leftrightarrow$ ее матрица Грама (в любом базисе) симметричная матрица.
3. B — кососимметричная билинейная форма $\Leftrightarrow$ ее матрица Грама — кососимметричная матрица с нулевой диагональю.

▶ Пункты 1 и 2 смотрите выше. Докажем пункт 3:

$$\forall x, y, B(x,y) = -B(y,x)$$
$$\forall x B(x,x) = 0$$
$$\varGamma^T = -\varGamma \Rightarrow B(x,y) = -B(y,x) \forall (x,y)$$
$$B(x,y) = x^T \varGamma y = (x^T \varGamma y)^T = y^T \varGamma^T x = -y^T \varGamma x = -B(y,x)$$

В обратную сторону, если верно для $\forall x, y$, то, в частности, верно и для базисных векторов. Если $B(x,x) = 0 \forall x$, $B(v_i, v_j) = 0 \Rightarrow$ диагональ $\varGamma$ — нулевая.
$\varGamma^T = -\varGamma$ + нулевая диагональ.

$$B(x,x) = x^T \varGamma x = \sum_{i,j} x_i \varGamma_{ij} x_j = \sum_i \varGamma_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (\varGamma_{ij} + \varGamma_{ji}) x_i x_j = 0$$

◀

Лемма 1.2.3. B — невырожденная $\Leftrightarrow$ $\varGamma$ невырожденная.

▶

$$\forall x \neq 0, \exists y \colon B(x,y) \neq 0$$
$$\forall x \neq 0, \exists \bar{y} \colon x^T \varGamma \bar{y} \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ для строки $x^T \varGamma$ найдется столбец $\bar{y}$, такой что $x^T \varGamma \bar{y} \neq 0$.

$$(c_1, \dots, c_n)$$
$$\exists y c_1 \bar{y}_1 + \dots + c_n \bar{y}_n \neq 0 \Leftrightarrow \forall x, (c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0) \Leftrightarrow \forall x \neq 0, x^T \varGamma \neq 0$$

Отображение из пространства строк в пространство строк.

$$x^T \to x^T \varGamma$$

невырожденно $\Leftrightarrow$ ядро отображения тривиально $\Leftrightarrow$ $\det \varGamma \neq 0$.

$$x \to \varGamma^T x$$

Невырожденно $\Leftrightarrow$ $\det(\varGamma^T) \neq 0 \Leftrightarrow \det(P \neq 0)$.
Аналогично,

$$\forall \bar{y}, \exists x \colon B(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow \det \varGamma \neq 0$$

◀

𝔇𝔢𝔣 1.2.2. $K = \mathbb{R}$, B — симмитричная положительно определенная.

$$\forall x \neq 0, x^T \varGamma x > 0$$

Матрица $\varGamma$ с таким свойством называется положительно определенной матрицей.

𝔇𝔢𝔣 1.2.3. $K = \mathbb{C}$, B — полуторалинейная, эрмитово симметричная, положительно определенная.

$$\forall x \neq 0, x^T \Gamma \bar{x} > 0$$
$$\Gamma^T = \bar{\Gamma}$$

Такая матрица Грамма — положительно определенная эрмитова матрица.

Лемма 1.2.4. $v_1, \dots, v_n$, $v'_1, \dots, v'_n$ — базисы V. B — полутoролинейная (билинейная) форма на V. Γ, Γ' — матрицы Грама в соответствующих базисах. C — матрица перехода от $v_1, \dots, v_n$ к $v'_1, \dots, v'_n$. Тогда

$$\Gamma' = C^T \Gamma \bar{C}$$

▶ x, y — столбцы координат в старом базисе. x', y' — столбцы координат в новом базисе.

$$u = \sum x_i v_i = \sum x'_i v'_i$$
$$v = \sum y_i v_i = \sum y'_i v'_i$$
$$x = Cx' \quad y = Cy'$$
$$x'^T C^T \Gamma \bar{C} \bar{y} = x^T \Gamma \bar{y} = B(u, v) = x'^T \Gamma' \bar{y}'$$

Для всех столбцов x', y':

$$x'^T \Gamma' \bar{y}' = x'^T C^T \Gamma \bar{C} \bar{y}'$$
$$\Gamma' = C^T \Gamma \bar{C}$$
$$\forall i, j, (\Gamma')_{ij} = \left(C^T \Gamma \bar{C}\right)_{ij} \Rightarrow \Gamma = C^T \Gamma \bar{C}$$

◀

1.3. Процесс ортогонализации

𝔇𝔢𝔣 1.3.1. B — полуторалинейная(билинейная) форма на V.
$v_1, \cdots, v_n$ пространства V называется ортогональным базисом, если $B(v_i, v_j) = 0$ для всех $i \neq j$.
Базис ортонормирован, если он ортогонален и $B(v_i, v_i) = 1$ для всех i.

𝔇𝔢𝔣 1.3.2.

$$x \perp y$$

$x, y \in V$ ортогональны, если $B(x, y) = 0$

Замечание 1.3.1. B — эрмитово симметрична(симметрична, кососимметрична).

$$x \perp y \Rightarrow y \perp x$$

Замечание 1.3.2. Не для всякой билинейной формы(даже невырожденной) существует ортогональный базис.

Пример 1.3.1. B — кососимметрична, невырожденная.
$v_1, \cdots, v_n$ — ортогональный базис?

$$v_1 \perp v_2, \cdots v_1 \perp v_n$$

Но и $v_1 \perp v_1 \Rightarrow v_1$ ортогонален $\forall$ вектору из V $\forall i B(v_1, v_i) = 0$
$\forall y \in V, B(v_1, y) = 0$ противоречие с невырожденностью.

Теорема 1.3.1. $K = \mathbb{C}$(или $\mathbb{R}$) $V, \dim V < \infty$. B — эрмитова симметричная положительно определенная.

Тогда существует ортогональный базис.

▶ **Шаг 1** Строим ортогоналный базис.

Пусть $v_1, \cdots, v_n$ — базис V.

Найдем новый базис $u_1, \cdots, u_n$

1. $< u_1, \cdots, u_i >=< v_1, \cdots, v_i >, i = 1, \cdots, n$
2. $u_i \perp u_j, i \neq j$

Строим такой базис по индукции.

$u_1 = v_1$

Предположим, что построили $u_1, \cdots, u_i$: $< u_1, \cdots, u_i >=< v_1, \vdots, v_i >$ и добавляем u_{i+1} в виде линейной комбинации v_{i+1} и $u_1, \cdots, u_i$

$$u_{i+1} = v_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \alpha_j u_j$$

$$< u_1, \cdots, u_{i+1} >=< v_1, \cdots, v_{i+1}) >$$

Условие ортогональности: $u_{i+1} \perp u_1 \cdots u_i$

$$0 = B(u_{i+1}, \cdots, u_k) = B(v_{i+1}, u_k) + \sum_{j=1} \alpha_j B(u_j, u_k) =$$

$$= B(v_{i+1}, u_k) + \alpha_k B(u_k, u_k)$$

$$a_k = -\frac{B(v_{i+1}, u_k)}{B(u_k, u_k)}$$

$B(u_k, u_k) > 0$ в силу положительной определенности $u_k \neq 0$(так как $u_1, \cdots u_k$ — линейно независимые).

Нашли u_{i+1}

Шаг 2 Нормируем $u_1, \cdots, u_n$ — ортогональный базис.

$$w_i = \lambda_i u_i$$

$$1 = B(w_i, w_i) = \lambda_i \overline{\lambda_i} B(u_i, u_i)$$

$|\lambda_i|^2 = \frac{1}{B(u_i, u_i)} > 0$ В силу положительной определенности.

$$\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{B(u_i, u_i)}}$$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

◀

Замечание 1.3.3. А вот теперь начался 3 семестр!

1.4. Ортогональное дополнение

𝔇𝔢𝔣 1.4.1. $S \subset V$.

$$S^\perp = \{v \in V \mid \forall s \in S, (v, s) = 0\}$$

$S^\perp$ — ортогональное дополнение к S.

Следствие 1.4.0.1.

1. $S^\perp \leqslant V$.(подпространство векторного пространства)
2. $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_1^\perp \geqslant S_2^\perp$
3. $S^\perp = \langle S\rangle^\perp$. Ортогональное дополнение к S совпадает с ортогональным дополнением к подпространству, порожденным S.
4. $\{0\}^\perp = V$
5. Если $(,)$ невырожденная, то $V^\perp = \{0\}$
6. Если $(,)$ симметричная, кососимметричная, эрмитово симметричная, то
$$S \subset (S^\perp)^\perp (\Rightarrow \langle S\rangle \leqslant (S^\perp)^\perp)$$
7. $U_1, U_2 \leqslant V$.
$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$
8.
$$(U_1 \cap U_2)^\perp \geqslant U_1^\perp + U_2^\perp$$

Замечание 1.4.1. Далее $K = \mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$ и $(,)$ — положительно определенная, симметричная (или эрмитово симметричная).

9.
$$S \subset V$$
$$\langle S\rangle \cap S^\perp = \{0\}$$
10. Если $\dim V = n < \infty$, и форма положительно определенная, то
$$U \leqslant V, \dim U = k \Rightarrow \dim U^\perp = n - k$$
В частности $V = U \oplus U^\perp$.
11. Если $\dim V < \infty$, то $\langle S\rangle = (S^\perp)^\perp$.
12. Если $\dim V < \infty$, то
$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

▶ 1.
$$0 \in S^\perp$$
Возьмём $v_1, v_2 \in S^\perp$, $s \in S$:
$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, s) = \alpha_1 (v_1, s) + \alpha_2 (v_2, s) = 0$$
В силу произвольности s,
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in S^\perp$$
То есть $S^\perp$ замкнуто относительно $+$ и $\cdot$.

2. $v \in S_2^\perp$, $S_1 \subset S_2$:
$$\forall s \in S_2, (v, s) = 0 \Rightarrow \forall s \in S_1, (v, s) = 0 \Rightarrow v \in S_1^\perp$$
3.
$$S \subset \langle S \rangle \Rightarrow S^\perp \geqslant \langle S \rangle^\perp$$
$v \in S^\perp$, $\forall s \in S, (v, s) = 0$, $\sum_i \alpha_i s_i \in \langle S \rangle$ ($s_i \in S$, почти все $\alpha_i = 0$):
$$\left(v, \sum_i \alpha_i s_i\right) = \sum_i \bar{\alpha}_i (v, s_i) = 0 \Rightarrow v \in \langle s \rangle^\perp$$
Проверили обратное включение, получили
$$S^\perp = \langle S \rangle^\perp$$
4. Очевидно.
5.
$$V^\perp = \{u\colon \forall v \in V\colon (u, v) = 0\}$$
Если $u \neq 0$, то в силу невырожденности
$$\exists v \in V\colon (u, v) \neq 0$$
откуда $V^\perp = \{0\}$.
6. Предположение о форме влечет, что отношение ортогональности между векторами симметрично:
$$(u, v) = 0 \Leftrightarrow (v, u) = 0$$
$$S^\perp = \{v\colon \forall s \in S\colon (v, s) = 0\}$$
$$s \in S, v \in S^\perp, (s, v) = (v, s) = 0 \Rightarrow s \in (S^\perp)^\perp$$
7.
$$U_1 \leqslant U_1 + U_2, U_2 \leqslant U_1 + U_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U_1^\perp \geqslant (U_1 + U_2)^\perp, U_2^\perp \geqslant (U_1 + U_2)^\perp \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U_1^\perp \cap U_2^\perp \geqslant (U_1 + U_2)^\perp$$
$\bar{v} \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$
$$v \in (U_1 \cup U_2)^\perp = \langle U_1 \cup U_2 \rangle^\perp = (U_1 + U_2)^\perp$$
8.
$$(U_1 \cap U_2)^\perp \supset U_1^\perp + U_2^\perp$$
$w = w_1 + w_2$, $w_1 \in U_1^\perp$, $w_2 \in U_2^\perp$, $u \in U_1 \cap U_2$
$$(w, u) = (w_1 + w_2, u) = (w_1, u) + (w_2, u) = 0$$
В силу произвольности u имеем $w \in (U_1 \cap U_2)^\perp$.
9.
$$U = \langle S \rangle, S^\perp = U^\perp$$
$$U \subset V, U \cap U^\perp = \{0\}$$
$$v \in U \cap U^\perp \Rightarrow (v, v) = 0$$
Так как форма положительно определенная, то $v = 0$.

Пример 1.4.1.

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_2y_1$$
$$v = (1,1) \in \mathbb{R}^2, (v,v) = 0$$
$$v \in \langle v\rangle^{\perp}, s = \langle(1,1)\rangle$$

Положительная определенность существена.

Пример 1.4.2. $\mathbb{R}^4$

$$(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4$$

$(1,1,0,0)$ — ортогонален сам себе.

$\mathfrak{Def}$ **1.4.2.** Если $(v,v)=0$, то v — изотропный вектор.

Пример 1.4.3. $\mathbb{F}_2$, $V = \mathbb{F}_2^n$

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

$(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда среди его координат четное число единичек.

10. $U \leqslant V$. $u_1,\dots,u_k$ — базис U. Дополним до базиса V, ортогонализуем. $e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n$ — ортонормированный базис V. $e_1,\dots,e_k$ — ортонормированный базис u по построению в процессе ортогонализации Грама-Шмита.

$$U^{\perp} \geqslant \langle e_{k+1},\dots,e_n\rangle$$

Рассмотрим $v \in U^{\perp}$ и разложим по базису $v = \sum \alpha_i e_i$:

$$j = 1..k, (v,e_j) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$
$$\Rightarrow U^{\perp} \leqslant \langle e_{k+1},\cdots,e_n\rangle$$
$$\Rightarrow U^{\perp} = \langle e_{k+1},\cdots,e_n\rangle$$
$$\Rightarrow \dim U^{\perp} = n-k$$
$$U + U^{\perp} \leqslant V$$
$$\dim(U+U^{\perp}) = k + n - k - \dim(U\cap U^{\perp}) = n$$
$$\Rightarrow U + U^{\perp} = V \Rightarrow U \oplus U^{\perp} = V$$

11.

$$\dim\langle S\rangle = k$$
$$\dim S^{\perp} = \dim\langle S\rangle^{\perp} = n-k$$
$$\dim(S^{\perp})^{\perp} = n - (n-k) = k$$
$$\langle S\rangle \leqslant (S^{\perp})^{\perp}$$

Размерности совпадают и одно подпространство другого, значит пространства совпадают.

Пример 1.4.4. Обоснуем, зачем конечномерность. Рассмотрим следующее бесконечномерное векторное пространство:

$$V = l^2 = \{(a_1,a_2,\dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\}$$

И введём на нём скалярное произведение:

$$A = (a_1,\dots)$$
$$B = (b_1,\dots)$$
$$(A,B) = \sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i$$

Следует показать, что это действительно скалярное произведение (определено и билинейно):

▶ Покажем, что ряд сходится, даже абсолютно:

$$|a_i b_i| \leqslant \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} \Leftrightarrow (|a_i| - |b_i|)^2 \geqslant 0$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty$$

Линейность:

$$(A_1 + A_2, B) = (A_1, B) + (A_2, B)$$
$$A_1 = (a_1', a_2', \dots) \quad A_2 = (a_1'', a_2'', \dots)$$
$$\sum (a_i' + a_i'') b_i = \sum a_i' b_i + \sum a_i'' b_i$$

◀

Несколько примеров:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \in l^2 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots\right) \notin l^2$$

Теперь рассмотрим подпространство $l_0^2 = \{(a_1, \dots) \mid \text{почти все } a_i = 0\}$ (очевидно, что $\langle l_0^2 \rangle = l_0^2$) и покажем контрпример к утверждению:

$$l_0^2 \leqslant l^2$$
$$A \in (l_0^2)^{\perp}$$
$$\forall i\colon A \perp (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) = e_i$$
$$0 = (A, e_i) = a_i$$
$$(l_0^2)^{\perp} = \{0\}, ((l_0^2)^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = l^2 \neq l_0^2$$

12. $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$ — верно для любого подпространства. В частности

$$(U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp} = (U_1^{\perp})^{\perp} = (U_1^{\perp})^{\perp} \cap (U_2^{\perp})^{\perp} = U_1 \cap U_2$$
$$(U_1 \cap U_2)^{\perp} = ((U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$$

◀

1.5. Взаимный базис

Def 1.5.1. K — поле, V — векторное пространство, $(,)$ — форма (билинейная или полуторалинейная). $\{e_i\}$ — базис V. $\{e_i^*\}$ взаимный базис к базису $\{e_i\}$, если

$$(e_i, e_j^*) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Пример 1.5.1. $\{e_i\}$ — ортонормированный базис.

$$\{e_i^*\} = \{e_i\}$$

Теорема 1.5.1. $\dim V = n < \infty$, $\{e_i\}$ — базис, $(,)$ — невырожденная. Тогда существует единственный взаимный базис $\{e_i^*\}$.

▶ $\varGamma$ — матрица Грамма базиса $\{e_i\}$. Разложим e_j^* по базису e_i, получим матрицу $C = (c_{kj})$:

$$e_j^* = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k$$

Теперь рассмотрим матрицу из всевозможных скалярных произведений между e_i и e_j^*. Эта матрица единичная из условия, что базис взаимный:

$$E_n = ((e_i, e_j^*))_{i,j=1..n} = \left(\left(e_i, \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k\right)\right) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_{kj}(e_i, e_k)\right) = \left(\sum_{k}(e_i, e_k)\bar{c}_{kj}\right) = \varGamma\bar{C}$$
$$E = \varGamma\bar{C}$$

$\varGamma$ — невырожденная.

$$C = \overline{\varGamma^{-1}} = (\bar{\varGamma})^{-1}$$

C — тоже невырожденная, значит $\{e_i^*\}$ — базис. ◀

1.6. Евклидовы и унитарные пространства

Def 1.6.1. n-мерное Евклидово пространство:

$$\mathbb{R}^n \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

n-мерное унитарное пространство:

$$\mathbb{C}^n \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

В обоих случаях (если берём естественный базис)

$$\varGamma = E$$

Def 1.6.2. V — евклидово (унитарное) пространство. Расстояние между двумя векторами:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$$
$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$
$$d(x, y) = |x - y|$$

Докажем, что это метрика.

▶ 1. $d(x, y) = d(y, x)$ в силу симметричности (эрмитовой).
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ в силу положительной определенности.

3. Неравенство треугольников. Осталось показать:

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$$
$$|x-y| \leqslant |x-z| + |y-z|$$

$u = x - z$, $v = z - y$.

$$|u+v| \leqslant |u| + |v|$$
$$|u+v|^2 \leqslant (|u|+|v|)^2$$
$$(u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) \leqslant (u,u) + 2|u||v| + (v,v)$$
$$(u,v) + (v,u) \leqslant 2|u||v|$$

Сумма двух комплексно сопряжённых чисел, из-за этого мнимая часть убьётся.

$$2\operatorname{Re}(u,v) \leqslant 2|u||v|$$
$$|(u,v)|^2 \leqslant (u,u)(v,v)$$
$$|(u,v)|^2 \geqslant (\operatorname{Re}(u,v))^2 + (\operatorname{Im}(u,v))^2 \geqslant (\operatorname{Re}(u,v))^2$$
$$0 \leqslant (u+\lambda v, u+\lambda v) =$$
$$= (u,u) + \overline{\lambda}(u,v) + \lambda(v,u) + |\lambda|^2(v,v)$$

$\lambda = (u,v)t$, $t \in \mathbb{R}$. $(u,v) = 0$ — очевидно. Пусть $(u,v) \neq 0$:

$$0 \leqslant (u,u) + 2|(u,v)|^2 t + |(u,v)|^2 t^2 (v,v)$$

$\lambda\overline{\lambda} = |(u,v)|^2$

$$0 \geqslant \frac{1}{4}D = |(u,v)|^4 - (u,u)(v,v)|(u,v)|^2 \Rightarrow$$
$$0 \geqslant |(u,v)|^2 - (u,u)(v,v)$$

◀

$\mathfrak{Def}$ **1.6.3.** Угол между векторами:

$$|(u,v)| \leqslant |u||v|$$
$$-1 \leqslant \frac{(u,v)}{|u||v|} \leqslant 1$$
$$\exists \varPhi \in \mathbb{R}\colon \frac{(u,v)}{|u||v|} = \cos\varPhi$$
$$0 \leqslant \varPhi \leqslant \pi$$

$\varPhi$ — угол между u и v.

1.7. Изометрии

Есть V и $(\,,\,)$. Интересующие нас ситуации:

1. симметричная невырожденная билинейная форма.

2. кососимметричная невырожденная билинейная форма.

3. эрмитовосимметричная невырожденная полуторалинейная форма.

$\mathfrak{Def}$ 1.7.1. $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ — изометрия V, $(,)$, если

$$\forall x, y \in V, (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$$

В Евклидовом пространстве $\mathcal{A}$ также называют ортогональным оператором.

Пример 1.7.1. $\mathbb{R}^2$, поворот — изометрия.

Теорема 1.7.1. $\dim V = n < \infty$, $\{e_i\}$ — базис V. $\varGamma$ — матрица Грама относительно базиса $\{e_i\}$. $A = [\mathcal{A}]_{\langle e_i \rangle}$ — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $\mathcal{A}$ — изометрия.
2. $A^T \varGamma \bar{A} = \varGamma$

▶

$$x \leftrightarrow [x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \leftrightarrow [y] = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$[\mathcal{A}x] = A[x] \quad [\mathcal{A}y] = A[y]$$
$$(x, y) = [x]^T \varGamma \overline{[y]}$$
$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = [x]^T A^T \varGamma \overline{A[y]}$$

$2 \Rightarrow 1$**:** Очевидно.

$1 \Rightarrow 2$**:**

$$\forall [x][y] \colon [x]^T A^T \varGamma \overline{A[y]} = [x]^T \varGamma \overline{[y]}$$

Значит, в частности, для следующих векторов это тоже верно:

$$[x] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [y] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы можем «выбрать» из матриц $A^T \varGamma \bar{A}$ и $\varGamma$ произвольный элемент $\varGamma_{ij}$ (он окажется одинаковый с двух сторон). Получаем:

$$(A^T \varGamma \bar{A})_{ij} = \varGamma_{ij} \Rightarrow A^T \varGamma \bar{A} = \varGamma$$

◀

Следствие 1.7.1.1. Так как форма невырожденная, то изометрия — обратимое преобразование.

▶

$$A^T \varGamma \bar{A} = \varGamma, \det \varGamma \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$$

$A = [\mathcal{A}]$ обратима, значит $\mathcal{A}$ обратимо. ◀

Следствие 1.7.1.2. Изометрии пространства V, $(,)$ образуют группу (относительно композиции).

▶ id_V — изометрия. Проверим композицию:

$$(\mathcal{AB}x, \mathcal{AB}y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{B}y) = (x, y)$$

Проверим наличие единицы и обратимость:

$$[\mathcal{A}] = A \quad [\mathcal{A}^{-1}] = A^{-1}$$
$$E = [\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = [\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}]$$
$$A^T \mathit{\Gamma} \bar{A} = \mathit{\Gamma}$$
$$\mathit{\Gamma} = (A^T)^{-1}\mathit{\Gamma}(\bar{A})^{-1} = (A^{-1})^T \mathit{\Gamma}\overline{(A^{-1})}$$

$\mathcal{A}^{-1}$ — изометрия. ◀

Def 1.7.2. V — векторное конечномерное пространство над K. $\dim V = n < \infty$ $B = (,)$ — невырожденная, симметричная билинейная форма.

Группа изометрии $O(V, B)$ называется ортогональной группы связанной с формой B.

Def 1.7.3.

1. В частности, если $V = \mathbb{R}^n$ — евклидово пространство с $(x, y) = \sum x_i y_i$, то $O(n)$ — вещественная ортогональная группа.

2. В $\mathbb{R}^n$ могут быть билинейные формы

$$\sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i \quad O(p, q) \quad p + q = n$$

Все ортогональные группы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны вышеперечисленным. Это будет показано позже.

Пример 1.7.2. $O(1, 3)$ — группа изометрий пространства Минковского.

Def 1.7.4. B — кососимметрическая, билинейная. Группа изометрий (V, B) — симплектическая группа.

$$Sp(V, B)$$

Пример 1.7.3.

$$\mathit{\Gamma}_B = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$
$$K^{2n} \quad Sp(K^{2n}, B)$$

Симплектические группы исчерпываются группами, заданными такой матрицей Грамма.

Def 1.7.5. K — поле с инволюцией.
B — эрмитовосимметричная, полуторалинейная, невырожденная.
Группа изометрий пространства (V, B) называется унитарной группой, отвечающей форме B.

$$U(V, B)$$

Пример 1.7.4. $V = \mathbb{C}^n$.

$U(n)$**:**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

$U(p, q)$**:**

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \bar{y}_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i \bar{y}_i$$

1.7.1. Матричная интерпретация

Рассмотрим случай $O(n)$, то есть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство, $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис, $\Gamma = E$, $A = [\mathcal{A}]$.

Изометрии евклидова пространства соотвествуют *ортогональным операторам.*

$$A^T A = E \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$$

$\mathfrak{Def}$ **1.7.6.** $A \in M(n, \mathbb{R})$ называется ортогональной, если

$$A^{-1} = A^T$$

Ортогональная матрица — это матрица ортогонального оператора в евклидовом пространстве.

Следствие 1.7.1.3 (Ортогональных матриц). Столбцы и строки ортогональной матрицы попарно ортогональны.

1. A — ортогональная матрица.
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$
A — ортогональная тогда и только тогда, когда A_i попарно ортогональны и единичной длины.
$A^T A = E$ означает, что произведение разных столбцов дает 0, а самого на себя дает 1. То есть это просто переформулировка условия ортогональности.

2. Но, оказывается, тоже самое верно и для строк.
$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$
A — ортогональныая тогда и только тогда, когда строки попарно ортогональны и единичной длины.
$$A^T A = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$$
$$AA^T = AA^{-1} = E$$
$$AA^T = E$$
То есть произведение одинаковых строк дает 1, разных — 0.

3. $\mathcal{A}$ — ортогональный оператор в евклидовом пространстве тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

▶ Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис, $\Gamma_{\{e_i\}} = E$. Знаем:
$$(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j)_{ij} = (e_i, e_j)_{i,j} = E$$
Теперь возьмём два произвольных вектора с координатами a_i и b_i и проверим, что скалярное произведение не меняется (то есть $\mathcal{A}$ являеется изометрией евклидова пространства):
$$\left(\mathcal{A}\left(\sum a_i e_i\right), \mathcal{A}\left(\sum b_i e_i\right)\right) =$$
$$\left(\sum a_i(\mathcal{A}e_i), \sum b_i(\mathcal{A}e_i\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} (\mathcal{A}e_i\mathcal{A}e_j)_{i,j} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$
$$= \left(\sum a_i e_i, \sum b_i e_i\right)$$
◀

Пример 1.7.5. $O(1)$ — вещественная ортогональная группа для пространства размерности 1.

$$a^T a = 1 \quad a \in \mathbb{R}$$
$$a = \pm 1$$
$$O(1) = \{\pm 1\}$$

Пример 1.7.6. $O(2)$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = E$$
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

A ортогональный, значит $\det A = \pm 1$ (так как $|A^T A| = |A^T||A| = |A|^2 = |E|^2 = 1$). Положим

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$$

Тогда $O(2)$ порождается следующим множеством матриц:

$$O(2) = \langle SO(2) \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot SO(2) \rangle$$

Матрицы с определителем 1:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

Запишем то же самое по строкам.

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

Делаем выводы, что

$$a = \cos(\Phi) \qquad c = \sin(\Phi)$$
$$b = -\sin(\Phi) \qquad d = \cos(\Phi)$$

$c \neq \sin(\Phi)$ так как не подойдет под одно из условий.

Тогда матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{Def}$ 1.7.7. $V = \mathbb{C}^n$ — унитарное пространство. Изометрия $\mathcal{A}$ называется унитарным оператором, а его матрица A в стандартном базисе называется унитарной матрицей. $A \in M(n, \mathbb{C})$, $\Gamma = E$.

$$A^T \bar{A} = E$$
$$\bar{A}^T A = E$$
$$A^{-1} = \overline{A^T}$$

Упражнение: $\mathcal{A}$ — унитарный тогда и только тогда, когда ортонормированный базис переводит в ортонормированный.

Пример 1.7.7. $U(1)$:

$$a^T\bar{a} = 1$$
$$|a| = 1$$
$$U(1) = S_1 \sim SO(2)$$
$$SU(2) \to SO(3)$$

1.8. Сопряженный оператор

𝔇𝔢𝔣 1.8.1. V — пространство с $(,)$ билинейной или полуторалинейной невырожденной формой, $\mathcal{A} \in End(V)$.
$\mathcal{A}^* \in End(V)$ называется сопряжённым оператором к A, если

$$\forall x, y \in V\colon (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

Теорема 1.8.1. $\dim V < \infty$, тогда $\mathcal{A}^*$ существует и единственный.

▶ **Единственность:** Предположим, что $\mathcal{A}^*$ существует. Убедимся, что существует всего один. $v_1, \dots, v_n$ — базис V, $\varGamma$ — матрица Грамма.

$$(\mathcal{A}x, y) = [\mathcal{A}x]^T\varGamma\overline{[y]} = ([\mathcal{A}][x])^T\varGamma\overline{[y]} = [x]^T[\mathcal{A}]^T\varGamma\overline{[y]}$$
$$(x, \mathcal{A}^*y) = [x]^T\varGamma\overline{[\mathcal{A}^*][y]}$$

То есть для всех x и y верно, что $[\mathcal{A}]^T\varGamma = \varGamma\overline{[\mathcal{A}^*]}$.
$(,)$ невырожденная, откуда $\varGamma$ — невырожденная.

$$\overline{[\mathcal{A}^*]} = \varGamma^{-1}[\mathcal{A}]^T\varGamma$$
$$[\mathcal{A}^*] = \overline{\varGamma^{-1}[\mathcal{A}]^T\varGamma} \tag{1.1}$$

Значит $\mathcal{A}^*$ определен однозначно.

Существование: Возьмем $\mathcal{A}^*$ так, чтобы матрица $\mathcal{A}^*$ в базисе $v_1, \dots, v_n$ задавалась равенством (1.1).

$$[\mathcal{A}^*] = \overline{\varGamma^{-1}[\mathcal{A}]^T\varGamma}$$
$$\overline{[\mathcal{A}^*]} = \varGamma^{-1}[\mathcal{A}]^T\varGamma$$
$$[\mathcal{A}]^T\varGamma = \varGamma\overline{[\mathcal{A}^*]}$$
$$(\mathcal{A}x, y) = [x]^T[\mathcal{A}]^T\varGamma\overline{[y]} = [x]^T\varGamma\overline{[\mathcal{A}^*][y]} = (x, \mathcal{A}^*y) \Rightarrow (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

В силу произвольности x и y получичи, что $\mathcal{A}^*$ — сопряженный оператор.

◀

Следствие 1.8.1.1.

1. $[\mathcal{A}^*] = \overline{\varGamma^{-1}[\mathcal{A}]^T\varGamma}$.
2. Если есть ортонормированный базис, то в этом базисе $[\mathcal{A}^*] = \overline{[\mathcal{A}]^T}$ — матрица, эрмитово сопряженная с $[\mathcal{A}]$.
   В случае билинейной формы в ортонормированном базисе $[\mathcal{A}^*] = [\mathcal{A}]^T$.

Теорема 1.8.2. $V, (,)$ — невырожденная форма, $U \leqslant V$, $\mathcal{A} \in End(V)$. U — $\mathcal{A}$-инвариантно. Тогда $U^\perp$ — $\mathcal{A}^*$-инвариантно.

▶ $w \in U^\perp$. Хотим проверить, что $\mathcal{A}^* w \in U^\perp$.
$u \in U$

$$(u, \mathcal{A}^* w) = (\mathcal{A}u, w) = 0$$

$\Rightarrow \mathcal{A}^* w \in U^\perp$. В силу произвольности w получили, что $U^\perp$ — $\mathcal{A}^*$-инвариантно. ◀

Пример 1.8.1. $U \leqslant V$, $\dim V < \infty$. Пусть есть ортонормированный базис U, дополненный до ортонормированного базиса V.

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \overbrace{*}^{U} & \overbrace{*}^{U^\perp} \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

U — $\mathcal{A}$ инвариантно.

$$[\mathcal{A}^*] = \overline{[\mathcal{A}]^T} = \begin{pmatrix} \overbrace{*}^{U} & \overbrace{0}^{U^\perp} \\ * & * \end{pmatrix}$$

Теорема 1.8.3. $\dim V < \infty$, $(,)$ — билинейная (симметрическая или кососимметрическая) или полуторалинейная и эрмитовосмметричная невырожденная форма. Тогда

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

▶

$$\forall x, y, (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$$
$$\varepsilon\overline{(y, \mathcal{A}x)} = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) = \varepsilon\overline{(\mathcal{A}^* y, x)}$$

$\varepsilon = -1$ для кососимметричной, $\varepsilon = +1$ для симметричной и эрмитовосимметричной.
$\bar{}$ — инволюция для полуторалинейной формы, id — для билинейной формы.

$$\forall x, y, (\mathcal{A}^* y, x) = (y, \mathcal{A}x) \Rightarrow \mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$$

◀

1.9. Самосопряженный оператор

Def 1.9.1. V, $(,)$, $\mathcal{A} \in End(V)$.
$\mathcal{A}$ называется самосопряженным, если

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$$

Обозначение:

$$V, (,), \mathcal{A} \in End(V)$$
$$\langle , \rangle : V \times V \to K$$
$$\langle x, y \rangle = (\mathcal{A}x, y)$$

$\langle , \rangle$ — билинейная или полуторалинейная форма. То есть построили новую форму на том же пространстве. Невырожденность в общем случае может пропадать, так как не требуем обратимости $\mathcal{A}$.

Теорема 1.9.1. Пусть $(,)$ — симметричная (эрмитово симметричная) невырожденная, у $\mathcal{A}$ есть сопряжение. Тогда следующие условия равносильны:

1. $\langle , \rangle$ симметричная (эрмитово симметричная).

2. $\mathcal{A}$ — самосопряженная.

▶ **$2 \Rightarrow 1$:**

$$\langle y, x\rangle = (\mathcal{A}y, x) = (y, \mathcal{A}^*x) = (y, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, y)} = \overline{\langle x, y\rangle}$$

$1 \Rightarrow 2$:

$$\forall y, x, \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} \Rightarrow$$
$$\forall y, x, (\mathcal{A}y, x) = \overline{(\mathcal{A}x, y)}$$
$$(y, \mathcal{A}^*x) = (\mathcal{A}y, x) = \overline{(\mathcal{A}x, y)} = (y, \mathcal{A}x)$$
$$x \in V : \forall y, (y, \mathcal{A}^*x - \mathcal{A}x) = 0$$

В силу невырожденности $(,)$

$$\mathcal{A}^*x - \mathcal{A}x = 0$$

В силу произвольности x

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$$

◀

Пример 1.9.1. $\dim V = n < \infty$, $\{v_i\}$ — базис, $(,)$ — невырожденная (эрмитово)симметричная форма, Γ, $\mathcal{A}$, $[\mathcal{A}]$.

$$\langle x, y\rangle = (\mathcal{A}x, y)$$

Γ' — матрица Грамма $\langle,\rangle$.

$$\Gamma' = [\mathcal{A}]^T \cdot \Gamma$$

Если $\mathcal{A}$ — самосопряжён, то $\Gamma' = \overline{(\Gamma')^T}$:

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}^*] = \bar{\Gamma}^{-1}\overline{[\mathcal{A}]^T}\bar{\Gamma}$$
$$\overline{[\mathcal{A}]} = \Gamma^{-1}[\mathcal{A}]^T\Gamma$$
$$\overline{(\Gamma')^T} = \overline{(\Gamma)^T}[\overline{\mathcal{A}}] = \Gamma[\overline{\mathcal{A}}] = \Gamma \cdot \Gamma^{-1}[\mathcal{A}]^T\Gamma = \Gamma'$$

Следствие 1.9.1.1. $\dim V < \infty$. Тогда $\langle,\rangle$ невырожденная тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ обратима.

▶

$$\Gamma' = [\mathcal{A}]^T\Gamma$$

$\langle,\rangle$ невырожденная $\Leftrightarrow \det \Gamma' \neq 0$

$$\Leftrightarrow \det[\mathcal{A}]^T \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}\text{— обратим}$$

◀

Следствие 1.9.1.2. $\dim V < \infty$, $(,)$ — невырожденная симметричная (эрмитово симметричная)/ Тогда всякое симметричное (эрмитово симметричное) скалярное произведение на V имеет вид

$$\langle x, y\rangle = (\mathcal{A}x, y)$$

для некоторого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$.

▶ $\{v_i\}$ — зафиксируем базис V, $(,) = \Gamma$ — исходной скалярное произведение.
Все $\langle , \rangle$ однозначно определяются Γ' — своей матрицей Грамма. Хотим построить самосопряженный оператор у этой матрицы Грамма.

$$[\mathcal{A}] = (\Gamma'\Gamma^{-1})^T = (\Gamma^T)^{-1}(\Gamma')^T$$
$$\Gamma' = (\bar{\Gamma}')^T$$
$$[\mathcal{A}^*] = \overline{\Gamma^{-1}[\mathcal{A}]^T]}\overline{\Gamma} =$$
$$= \overline{\Gamma^{-1}}(\overline{\Gamma'\Gamma^{-1}})\overline{\Gamma} =$$
$$= \overline{\Gamma^{-1}}\overline{\Gamma'} = (\Gamma^T)^{-1}(\Gamma')^T$$
$$\overline{\Gamma^T} = \Gamma \quad \overline{\Gamma'^T} = \Gamma'$$
$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}^*] \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

◀

1.10. Нормальные операторы в евклидовых и унитарных пространствах.

Def 1.10.1. V — евклидово или унитарное, $(,)$ — стандартное скалярное произведение, $\mathcal{A} \in End(V)$. $\mathcal{A}$ — нормальный, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Пример 1.10.1.

1. Самосопряженный — нормальный.
2. Ортогональный и унитарный операторы также нормальные.

   ▶
   $$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$$
   Изометрия — обратимое преобразование. $y = \mathcal{A}^{-1}z$.
   $$(x, \mathcal{A}^*z) = (\mathcal{A}x, z) = (x, \mathcal{A}^{-1}z)$$
   Если $\mathcal{A}$ — унитарное или ортогональное, тогда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$.
   $$\forall x (x, \mathcal{A}^{-1}z - \mathcal{A}^*z) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$$
   $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ коммутируют. ◀

Теорема 1.10.1. V — унитарное пространство. Следующие условия равносильны:

1. $\mathcal{A}$ — нормальна.
2. Существует ортонормированный базис V, в котором $[\mathcal{A}]$ диагональная.

▶ **2 ⇒ 1:** $\{v_i\}$ — ортонормированный базис, $\Gamma = E$. $[\mathcal{A}]$ — диагональная. $[\mathcal{A}^*] = \overline{[\mathcal{A}]^T}$ — диагональная. Две диагональные матрицы всегда коммутируют.

$$[\mathcal{A}\mathcal{A}^*] = [\mathcal{A}][\mathcal{A}^*] = [\mathcal{A}^*][\mathcal{A}] = [\mathcal{A}^*\mathcal{A}] \Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

1 ⇒ 2: $\mathcal{A}$ — нормальный оператор. λ — собственное число $\mathcal{A}$. $U(\lambda) = U_1(\lambda)$ — пространство собственных векторов отвечающих λ. U — $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство. $\mathcal{A}^*$ — инвариантно?

Возьмем $u \in U$ и применим оператор $\mathcal{A}^*$, нас интересует, почему $\mathcal{A}^*u \in U$.

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^*u) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}u) = \mathcal{A}^*(\lambda u) = \lambda\mathcal{A}^*(u)$$

$\mathcal{A}^*u$ — собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающий λ. Тогда $\mathcal{A}^*u \in U$.

Мы нашли подпространство, которое одновременно $\mathcal{A}$- и $\mathcal{A}^*$-инвариантно. $U^\perp$ — $\mathcal{A}^*$- и $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$-инвариантно.

$V = U \oplus U^\perp$ и оба подпространства инвариантны $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Значит определены.

$$\mathcal{A}|_U, \mathcal{A}^*|_U \in End(U)$$
$$\mathcal{A}|_{U^\perp}, \mathcal{A}^*|_{U^\perp} \in End(U^\perp)$$

$\mathcal{A}|_U$ и $\mathcal{A}^*|_U$ — нормальные операторы на U. $\mathcal{A}|_{U^\perp}$ и $\mathcal{A}^*|_{U^\perp}$ — нормальные операторы на $U^\perp$.

Выберем ортонормированный базис U. Мы знаем, что на нём $Av = \lambda v$:

$$[\mathcal{A}|_U] = \lambda E_{\dim U}$$
$$[\mathcal{A}^*|_U] = \overline{[\mathcal{A}|_u]^T} = \overline{\lambda}E$$

Далее: доказательство по индукции (применить к $U^\perp$).

◀

Следствие 1.10.1.1.

1. $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, u — собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающй λ. Тогда u — собственный вектор $\mathcal{A}^*$, отвечающий $\overline{\lambda}$.

2. $\mathcal{A}$ — нормальный в унитарном пространстве. Собственный вектора, отвечающие разным собственным числам, ортогональны.

$$\mathcal{A}u = \lambda u \quad \mathcal{A}v = \beta v$$
$$\beta(u, v) = (u, \bar{\beta}v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (\mathcal{A}u, v) = (\lambda u, v) = \lambda(u, v)$$
$$\Rightarrow (u, v) = 0$$

3. Всякий нормальный оператор в унитарном пространстве диагонализируемы.

1.11. Самосопряженные операторы в евклидовом и унитарном пространстве

Теорема 1.11.1. $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, в котором $[\mathcal{A}]$ диагональная и вещественная.

▶ Унитарное пространство:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

Существует ортонормированный базис, в котором

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}^*] = \overline{[\mathcal{A}]^T} = \overline{[\mathcal{A}]} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

Следовательно $\lambda_i = \bar{\lambda}_i \Rightarrow$ все собственные числа вещественные.

И наоборот, если найдётся ортонормированный базис, в котором

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ то

$$[\mathcal{A}^*] = \overline{[\mathcal{A}]^T} = [\mathcal{A}^T] = [\mathcal{A}] \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

◀

Следствие 1.11.1.1. Собственный числа самосопряженных операторов — вещественные.

Теорема 1.11.2. Для всякой эрмитовосимметрической матрицы $[\mathcal{A}]$ существует унитарная U такая, что:

$$U^{-1}[\mathcal{A}]U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Возможно, тут потеряно дополнительное условие на самосопряжённость оператора $\mathcal{A}$.

▶ Пусть $\{e_i\}$ — стандартный базис. Матрица $\mathcal{A}$ задаёт некоторый самосопряжённый оператор, который в ортонормированном базисе $\{v_i\}$ выглядит так:

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Причём $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$
$$[\mathcal{A}] = \overline{[\mathcal{A}]^T}$$
$$U^T\bar{U} = E \quad \textit{Егор не понял, к чему это}$$

Унитарные матрицы — в точности матрицы, которые ортонормированный переводят в ортонормированные. Пусть U — матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{v_i\}$. Тогда U — унитарная матрица и:

$$U^{-1}[\mathcal{A}]U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

◀

Теорема 1.11.3. $\mathbb{C}^n$, $\langle , \rangle$ — полуторалинейная эрмитовосимметричная форма на $\mathbb{C}^n$. Тогда существует базис $\mathbb{C}^n$, в котором

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть на диагонали сначала идут единицы, потом минус единицы, потом нули. Не на диагонали тоже стоят нули.

▶ $\langle x, y\rangle = (\mathcal{A}x, y)$ для некоторого самосопряженного $\mathcal{A}$. $\Gamma'_{\langle\rangle} = [\mathcal{A}]^T \Gamma = [\mathcal{A}]^T$. $[\mathcal{A}]$ — эрмитовосимметричная матрица. $[\mathcal{A}]^T$ — эрмитовосимметричная. Существует ортонормированный базис (относительно стандартного скалярного произведения), в котором $[\mathcal{A}]^T$ — диагональ с вещественными элементами.

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Не умаляя общности могут сначала идти положительные, потом отрицательные, потом нули. $\{v_i\}$ — ортонормированный базис. В нём первые k элементов на диагонали матрицы Грамма имеют положительное значение λ_i, потом от $k+1$ до l имеют отрицательные λ_i, а потом идут нули. Перейдем в ортонормированный базис w_i:

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} v_i}, i = 1..k$$
$$\langle w_i, w_i\rangle = \frac{1}{\lambda_i}\langle v_i, v_i\rangle = 1$$

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i} v_i}, i = k+1..l$$
$$\langle w_i, w_i\rangle = \frac{1}{-\lambda_i}\langle v_i, v_i\rangle = -1$$

$$w_i = v_i, i = l+1..n$$
$$\langle w_i, w_i\rangle = \langle v_i, v_i\rangle = 0$$

В $\{w_i\}$ матрица Грама имеет вид:

$$\Gamma'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◀

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

$[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}]^T$ — симметрическая матрица.

Лемма 1.11.1. Если $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]$ — симметрическая матрица, то ее собственный числа вещественные.

▶ λ — собственное число $\mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим вектор x отвечающий λ.

$$\mathcal{A}x = \lambda x, x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$$
$$\overline{x^T}\mathcal{A}x = \overline{x^T} \cdot \lambda x = \lambda \overline{x^t} x = \lambda(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)$$
$$\overline{x^T}\mathcal{A}x = \overline{x^T \mathcal{A}^T} x = \overline{(\mathcal{A}x)^T} \cdot x = \overline{(\lambda x)^T} x =$$
$$= \overline{\lambda}\bar{x}^T x = \bar{\lambda}(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)$$

$\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ ◀

1.12. Самосопряженные операторы в унитарном пространстве

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Существует ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{A}$, в котором матрица $[\mathcal{A}]$ диагональная и на диагонали стоят собственные числа $\mathcal{A}$. Причем собственные числа вещественные.

2. $A \in M(n, \mathbb{C})$, $A = \overline{A^T}$. Существует ортонормированный базис из собственных векторов A и матрица перехода U из стандартного базиса к этому базису. $U^{-1}AU$ есть диагональная матрица, на диагонали собственные числа A.

3. $A \in M(n, \mathbb{C})$, $A = \overline{A^T}$. Существует унитарная матрица U, что U^TAU — диагональная, на диагонали собственные числа A.

Замечание 1.12.1. U из пункта 2 — унитарная матрица (и она же из пункта 3). U переводит ортонормированный базис в ортонормированный (то есть изометрия унитарного пространства).

$$U^T\bar{U} = E$$

$\bar{U}^TU = E \Rightarrow \bar{U}$ — унитарная. $U^{-1} = \bar{U}^T$ $(U^{-1} = U^*)$.

$$U^{-1}AU = \bar{U}^TAU = U_1^TA\bar{U}_1$$

Где $U_1 = \bar{U}$ — унитарная.

Всякая эрмитовосимметричная, полуторалинейная форма имеет вид $\langle x, y\rangle = (\mathcal{A}x, y)$, где $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

Следствие 1.12.0.1. Существует ортонормированный (относительно стандартного скалярного произведения) базис, в котором $\mathcal{A}$ — диагонален, и значит, в этом базисе Γ формы $\langle , \rangle$ диагональная с вещественными числами на диагонали.

Следствие 1.12.0.2. Существует базис, в котором матрица Грама формы $\langle , \rangle$ диагональная и на диагонали $+1, -1, 0$ («Закон инерции»).

1.12.1. Самосопряжённые операторы в Евклидовом пространстве

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Собственные числа вещественные и существует ортонормированный базис (в $\mathbb{R}^n$) из собственных векторов $\mathcal{A}$, в котором матрица $[\mathcal{A}]$ диагональная и на диагонали собственные числа.

2. $A \in M(n, \mathbb{R})$, $A = A^T$. Существует ортонормированный базис из собственных векторов A и матрица перехода O от старого базиса к этому. $O^{-1}AO$ диагональная и на диагонали собственные числа A (и все они вещественные).

   O переводит стандартный базис в ортонормированный, а значит изометрия $\mathbb{R}^n$:

$$O^TEO = E$$
$$O^{-1} = O^T$$

3. $A \in M(n, \mathbb{R})$, $A = A^T$. Существует O — ортогональная, что $O^TAO = O^{-1}AO$ — диагональная и на диагональной собственные числа A.

4. $\langle , \rangle$ — билинейная форма симметричная на $\mathbb{R}^n$. $< x, y >= (\mathcal{A}x, y)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

   Существует ортонормированный базис, в котором матрица Грама скалярного произведения диагональная. На диагонали сначала сколько-то положительных чисел, потом сколько-то отрицательных и нули.

Следствие 1.12.0.3. Существует базис, в котором матрица Грама имеет вид: на диагонали сколько-то единиц, сколько-то -1 и 0, остальные 0. k — количество 1, l — количество -1. («Закон инерции квадратичных форм»).

Комментарий к закону инерции: k, l и $(n-k-l)$ определены формой $\langle , \rangle$ однозначно. $k+l$ — задают ранг матрицы Грама, не меняется при замени базиса.

Упражнение: Подумайте, почему k тоже задается однозначно.

1.13. Канонический вид унитарного оператора.

$$U^{-1} = U^*(\Leftrightarrow [U^T][\bar{U}] = E)$$

Унитарный оператор — нормальный.

Существует ортонормированный базис состоящий из собственных векторов, в котором $[U]$ — диагональная (на диагонали собственные числа).

$$[U]^T[\bar{U}] = E$$
$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_i\bar{\lambda}_i = 1 \Leftrightarrow |\lambda_i|^2 = 1$.

Теорема 1.13.1. Собственные числа унитарного оператора по модулю равны 1 и существует базис из собственных векторов, в котором матрица $[U]$ диагональная и на диагонали собственные числа U.

▶ U — унитарный, значит существует ортонормированный базис, в котором $[U]^T[\overline{U}]$ — диагональные и диагональные элементы по модулю равны 1.

$$[U]^T[\overline{U}] = E$$
$$\lambda_i\overline{\lambda_i} = 1$$

U унитарный оператор тогда и только тогда, когда $[U]^T \varGamma[\bar{U}] = \varGamma$. ◀

Переформулируем на языке матриц.

U — унитарная матрица, то есть $U^T\overline{U} \equiv E \Rightarrow \exists V$ — унитарная $V^*UV = V^{-1}UV$ — диагональная матрица и на диагонали собственные числа по модулю 1.

1.14. Канонический вид ортогонального оператора в евклидовом пространстве.

$\mathbb{R}^n$. A — ортогональная матрица (матрица ортогонального оператора), $A^TA = E$.

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$$
$$A^T\bar{A} = E$$
$$\bar{A} = A$$

Отсюда A — унитарная матрица (как комплексная матрица).

Собственные числа A по модулю равны 1.

$$\chi_A \in \mathbb{R}[t]$$
$$\chi_A = \det(A - tE)$$

Корни χ_A — либо вещественные, либо распадаются на пары $\lambda, \bar{\lambda}$ (причем кратности $\lambda, \bar{\lambda}$ одинаковые).

Значит, вещественные собственные числа A это ± 1. Комплексные имеют вид $\cos\varphi + i\sin\varphi$ и $\cos\varphi - i\sin\varphi$ для некоторых φ.

Существует ортонормированный базис $\mathbb{C}^n$, состоящий из комплексных собственных векторов A, такой что $C^{-1}AC$ — диагональная, на диагонали ± 1 и числа $\cos\varphi_k \pm i\sin\varphi_k$, где C — матрица перехода от стандартного базиса к этому ортонормированному базису.

Пусть $\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ($\varphi \neq \pi k$) и $\bar{\lambda}$ это пара комплексных собственных чисел A.

$$\exists v = u + iw, u, w \in \mathbb{R}^n$$
$$Av = \lambda v$$
$$A(u + iw) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(u + iw)$$
$$\begin{cases} Au = \cos\varphi u - \sin\varphi w \\ Aw = \cos\varphi w + \sin\varphi u = \sin\varphi u + \cos\varphi w \end{cases}$$

u и w — линейно независимые, пространство, пораждённое u и w инвариантно относительно A.

$$Av = \lambda v$$
$$\overline{Av} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

$A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$, $\bar{v}$ — собственный вектор, отвечающий $\bar{\lambda} \neq \lambda$.

v и $\bar{v}$ — линейно независимые над $\mathbb{C}$ (собственные вектора, отвечающие разным собственным числам). $(v+\bar{v})/2$ и $(v-\bar{v})/2i$ — линейно независимые над $\mathbb{C}$, так как порождают то же пространство, что и $v, \bar{v}$. u и w линейно независимые над $\mathbb{C}$, значит они линейно независимые над $\mathbb{R}$.

Сужение оператора умножения на A на подпространство $\langle u, w\rangle$ в базисе (u, w) имеет вид матрица поворота на угол φ.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Теорема 1.14.1. $\mathcal{A}$ — ортогональный оператор в $\mathbb{R}^n$. Существует ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$, в котором матрица $[\mathcal{A}]$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \cdots \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

▶ $v, \bar{v}$ можно дополнить до ортонормированного базиса $\mathbb{C}^n$, в котором матрица оператора умножения на A диагонализуема. Остальные вектора, кроме v и $\bar{v}$, порождают ортогональное дополнение к $\langle v, \bar{v}\rangle$ в $\mathbb{C}$. ◀

A в стандартном базисе, $x \to Ax$ — ортогональный оператор $\mathcal{A}$, $[\mathcal{A}] = A$. λ и $\bar{\lambda}$ — собственные числа $\mathcal{A}$ (как унитарного оператора), $v \in \mathbb{C}^n$.

$$|v| = 1$$
$$\mathcal{A}v = \lambda v$$
$$\mathcal{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$
$$|\bar{v}| = |v| = 1$$

Собственные вектора, отвечающие разным собственным числам — ортогональные.

Рассмотрим $\langle v, \bar{v}\rangle$, (u, w).

$$|v|^2 = |u|^2 + |w|^2$$
$$v = u + iw$$
$$0 = (v, \bar{v}) = (u + iw, u - iw) = |u|^2 + i(u, w) + i(w, u) - |w|^2 = |u|^2 - |w|^2 + 2i(u, w)$$
$$\begin{cases} |u|^2 + |w|^2 = 1 \\ |u|^2 - |w|^2 = 0 \\ (u, w) = 0 \end{cases}$$
$$|u| = |w| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}u, \sqrt{2}w$ — ортонормированный базис в $\langle u, w\rangle$

$$Au = \cos\varphi u - \sin\varphi w$$
$$Aw = \sin\varphi u + \cos\varphi w$$
$$A(\sqrt{2}u) = \cos\varphi(\sqrt{2}u) - \sin\varphi(\sqrt{2}w)$$
$$A(\sqrt{2}w) = \sin\varphi(\sqrt{2}u) + \cos\varphi(\sqrt{2}w)$$
$$\mathcal{A}|_{\langle\sqrt{2}u, \sqrt{2}w\rangle} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}|_{\langle u,w\rangle^\perp}$ — вновь ортогональный оператор.

$$\mathcal{A}|_{\langle u,w\rangle^\perp}\colon\ \langle u, w\rangle^\perp \to \langle u, w\rangle^\perp$$
$$x \perp u, w$$
$$Ax \perp u, w$$
$$(\mathcal{A}x, w) = (x, \mathcal{A}^* u) = (x, \mathcal{A}^{-1}u) = 0$$

$\mathcal{A}^{-1}$ на $\langle u, w\rangle$ действует как поворот в обратную сторону.

Описан шаг индукции, если есть пара комплексных собственных чисел, если остались только вещественные, то они должны быть равны ± 1. В каждом из собственных подпространств $U(1), U(-1)$ выбираем по ортонормированному базису.

Пример 1.14.1. $\mathbb{R}^3$

$$O(3) = \{A \in GL_3(\mathbb{R}) \mid A^T A = E\} \Rightarrow \det A^2 = 1, \det A = \pm 1$$

$O(3) = \{A \in O(3) \mid \det A = 1\}$ — специальная ортогональная группа.

Упражнение: Докажите, что ортогональное преобразование $\mathbb{R}^n$ есть композиция не более, чем n отображений.

1.15. Овеществление и комплексификация

1.15.1. Овеществление

$$\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$$

$\mathcal{A} \in End(\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим $\mathcal{A}$ как оператор на $\mathbb{R}^{2n}$.
$e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис $\mathbb{C}^n$. $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, e_n$ — базис в $\mathbb{R}^{2n}$.

$$v = \sum \lambda_j e_j = \sum (\operatorname{Re} \lambda_j) e_j + (\operatorname{Im} \lambda_j)(ie_j)$$
$$\mathcal{A}\left(\sum a_j e_j + \sum b_j (ie_j)\right) = \mathcal{A}\left(\sum (a_j + ib_j) e_j\right) = \sum (a_j + ib_j)\mathcal{A}(e_j) =$$
$$= \sum a_j \mathcal{A}(e_j) + \sum b_j i\mathcal{A}(e_j) = \sum a_j \mathcal{A}(e_j) + \sum b_j \mathcal{A}(ie_j)$$

Получили, что$\mathcal{A}$ — линейный оператор в $2n$-мерном вещественном пространстве.
Над $\mathbb{C}$: $[\mathcal{A}] = (\alpha_{kj})_{k,j=1..n}$. $[\mathcal{A}]$ — матрица $\mathcal{A}$ в стандартном базисе.

$$\alpha_{kj} = \beta_{kj} + i\gamma_{kj}$$
$$\mathcal{A} \in End(\mathbb{C}^n) \quad e_1, ie_1, \cdots, e_n, ie_n$$
$$\mathcal{A}e_j = \sum_k \alpha_{kj} e_j = \sum (\beta_{kj} e_j + \gamma_{kj} ie_j)\mathcal{A}(ie_j) = \dots = \sum_k (-\gamma_{kj} e_j + \beta_{kj}(ie_j))$$
$$\alpha_{kj} \to \begin{pmatrix} \beta_{kj} & -\gamma_{kj} \\ \gamma_{kj} & \beta_{kj} \end{pmatrix}$$

Получили матрицу оператора $\mathcal{A}$ рассматриваемого как $\mathbb{R}^{2n}$-оператор. Дословно повторяется дла V, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2n, \mathcal{A} \in End_{\mathbb{R}}(V)$$

Пример 1.15.1.

$$U(1) \quad SO(2)$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi) \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

1.15.2. Комплексификация

V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$. Строим новое пространство $V_{\mathbb{C}}$ векторное пространчтво над $\mathbb{C}$ — над $\mathbb{R}$ должно иметь размерность $2n$.

$$V_{\mathbb{C}} = V \oplus V'$$

V' — «копия» V.

$$V_{\mathbb{C}} = V \times V = \{(v,u) | v, u \in V\}$$
$$V \sim V \times \{0\}$$
$$V' \sim \{0\} \times V$$
$$(v,u) = (v,0) + (0,u)$$
$$\alpha = \beta + i\gamma$$
$$\alpha(u,v) = (\beta + i\gamma)(u,v) = (\beta u - \gamma v, \beta v + \gamma u)$$

Упражнение: $V_{\mathbb{C}}$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$.

$$V_{\mathbb{C}} = \{(v,0)\} \oplus \{(0,u)\}$$

$$i(v,0) = (0,u)$$

Отождествляем V с вещественным подпространством $V\times\{0\}$. $i(u,0)=(0,u)$. $v_1,\dots,v_n$ — базис $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$.

$$V_{\mathbb{C}}=\{(v,0)\}\oplus\{(0,u)\}$$
$$V_{\mathbb{C}}=V\oplus iV$$

$\{v_i\}$ — базис V над $\mathbb{R}$. $\{(v_i,0)\}$ — базис $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$.

Отождествление v_i и $(v_i,0)$. По V строим $V_{\mathbb{C}}$ (по $\mathbb{R}$ строим $\mathbb{C}$ соответствует $\dim V=1$).

$$v_{i\mathbb{C}}=(v_i,0)$$

𝔇𝔢𝔣 1.15.1. V, $V_{\mathbb{C}}$, $\dim_{\mathbb{R}} V=n<\infty$, $\mathcal{A}\in End(V)$. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\in End(V_{\mathbb{C}})$ — комплексикация $\mathcal{A}$.

Положим $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((v,u))=(\mathcal{A}v,\mathcal{A}u)$. Адитивность $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ очевидна.

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha+\beta i)(v,u))=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\alpha v-\beta u,\beta v+\alpha u)=$$
$$=(\mathcal{A}(\alpha v-\beta u),\mathcal{A}(\beta v+u))=(\alpha\mathcal{A}(v)-\beta\mathcal{A}(u),\beta\mathcal{A}(v)+\alpha\mathcal{A}(u))=$$
$$=(\alpha+\beta i)(\mathcal{A}(v),\mathcal{A}(u))=(\alpha+\beta i)\alpha_{\mathbb{C}}(v,u)$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ — линейный оператор.

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_V=\mathcal{A}|_{v\times\{0\}}$$
$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}|_V=\mathcal{A}$$
$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((v,0))=(\mathcal{A}v,0)$$
$$[\mathcal{A}]_{\{v_i\}}=(a_{ij})$$
$$\mathcal{A}v_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$$
$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_{j_{\mathbb{C}}})=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((v_j,0))=(\mathcal{A}v_j,0)=\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}v_i,0\right)=\sum_{i=1}^n a_{ij}(v_i,0)=\sum_{i=1}^n a_{ij}v_{i_{\mathbb{C}}}$$
$$[\mathcal{A}_{\mathbb{C}}]_{v_{i\mathbb{C}}}=[\mathcal{A}]_{\{v_i\}}$$

$\{v_i\}$ — базис V, над $\mathbb{R}$. $\{(v_i,0)\}$ — базис $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$

$$(v,v)=\left(\sum\alpha v_j,\sum\beta_j v_j\right)=\sum\alpha_j(v_j,0)+\sum\beta_j(0,v_j)=\sum\alpha(v_j,0)+\sum i\beta_j(v_j,0)=\sum(\alpha_j+i\beta_i)(v_j,0)$$

Пример 1.15.2.

1. Всякий самосопряженный оператор в евклидовом пространстве можно рассматривать как самосопряженный оператор в унитарном пространстве той же размерности.

2. Всякий ортогональный оператор в $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать как унитарный оператор той же размерности в $\mathbb{C}^n$.

Следствие 1.15.0.1.

$$O(n)\leqslant U(n)$$

1.16. $SU(2)$, кватернионы и $SO(3)$

𝔇𝔢𝔣 1.16.1.

$$SU(n)=\{g\in U(n)\mid\det g=1\}$$

$g \in SU(2)$

$$g = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$
$$g^T \bar{g} = E_2$$
$$\begin{pmatrix} w_1 & w_3 \\ w_2 & w_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 & \bar{w}_4 \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 & \bar{w}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 & w_3 \\ w_2 & w_4 \end{pmatrix}$$
$$g^T \bar{g} = E \Rightarrow \bar{g} g^T = E$$
$$\bar{g} = (g^T)^{-1}$$
$$\begin{cases} |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1 \\ |w_3|^2 + |w_4|^2 = 1 \\ \bar{w}_1 w_3 + \bar{w}_2 w_4 = 0 \\ \bar{w}_3 w_1 + \bar{w}_4 w_2 = 0 \end{cases} \det g = 1 \Rightarrow w_1 w_4 - w_2 w_3 = 1$$
$$\begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\det = |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$$
$$\begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & -\bar{w}_2 \\ w_2 & \bar{w}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$w_3 = -\bar{w}_2 \quad w_4 = \bar{w}_1$$

$$g \in SU(2) \Leftrightarrow g = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_1 \end{pmatrix}$$
$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$$
$$\Leftarrow$$
$$g^T \bar{g} = \begin{pmatrix} w_1 & -\bar{w}_2 \\ w_2 & \bar{w}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$
$$g = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

Унитарные матрицы $SU(2)$, матрицы Паули:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{i} = \begin{pmatrix} i, 0 \\ 0, -i \end{pmatrix}, \mathbb{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{k} = \begin{pmatrix} 0, i \\ i, 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = -E$$
$$\mathbb{i}\mathbb{j} = \mathbb{k} = -\mathbb{j}\mathbb{i}$$
$$g = aE + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$
$$\mathbb{H}_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\} \text{— кватернионы нормы 1}$$

$\mathbb{H}_1 \to SU(2)$ — изоморфизм групп.

$$a + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k} \to \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \text{(биекция)}$$

Сохраняется ли групповая операция(то есть гоморфизм)?

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -\bar{u}_2 & \bar{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1u_1 - w_2\bar{u}_2 & w_1u_2 + w_2\bar{u}_1 \\ -u_1\bar{w}_2 - \bar{u}_2\bar{w}_1 & -u_2\bar{w}_2 + \bar{w}_1\bar{u}_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} g = a + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k} \\ g_1 = a_1 + b_1\mathbb{i} + c_1\mathbb{j} = d_1\mathbb{k} \end{cases}$$

$gg_1 =$ то же, что при перемножение кватернионов.
Было:

$$\mathbb{H} \sim \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$a + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k} \to \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

Гомоморфизм колец, значит сужение на $\mathbb{H}_1$ сохраняет операцию умножения, то есть является гомоморфизмом $\mathbb{H}_1$ в $SU(2)$, значит есть изоморфизм.

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = 4$$

1.

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k}\}$$

$$\mathbb{H}_1 = \{z \in \mathbb{H} \colon |z| = 1\}$$

$$(z_1, z_2) = Re(z_1, \bar{z}_2)\text{скалярное произведение}$$

$$(z_1, z_1) = Re(z_1, \bar{z}_1) = |z_1|^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \ (z_1 + z_1', z_2) = (z_1, z_2) + (z_1', z_2) \Rightarrow \text{билинейная форма}$$

$$z \to \bar{z}$$

2.

$$g = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

$g \in SU(2)$, $\det g = 1$. Вещественная часть — это $\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(g)$

$$(g_1, g_2) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(g_1, \bar{g}_2^T)$$

$$(g_1, g_1) = \det g_1$$

$$(g_1, g_1) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(g_1, \bar{g}_1^T) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \det g_1$$

$$g \to \bar{g}^T$$

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{pmatrix}$$

Действие $\mathbb{H}_1$ на $\mathbb{H} \sim \mathbb{R}^4$
$\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$
$B(x, y)$ — симметричная, билинейная
$Q(x) = B(x, x)$ — квадратичная форма.
По $Q(x)$ можно востановить $B(x, y)$:

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(B(x + y, x + y) - B(x, x) - B(y, y)) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$$

Достаточно проверить, что сохраняется соответствующая квадратичная форма

$$\mathbb{H}_1 \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

$(h, z) \to hzh^{-1} = hz\bar{h}$ — это отображение — изометрия.

$Q(z) = |z|^2$

$Q(hzh^{-1}) = |hzh^{-1}|^2 = |h|^2|z|^2|h|^{-2} = |z|^2 = Q(z)$

$z \to hzh^{-1}$ — изометрия $\mathbb{H} \sim \mathbb{R}^4$

$\{a\colon a \in \mathbb{R}\} =< 1 >_{\mathbb{R}}$ — инвариантно относительно этого действия.

hzh

$$hah^{-1} = a$$

$< 1 >^{\perp} =< \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k} >$

$h \in \mathbb{H}_1$ действует на $\mathbb{R}^4 \sim \mathbb{H}$. $z \to hzh^{-1} = hz\bar{h}$ (так как $|z| = 1$, то $z^{-1} = \bar{z}$)

$$\varphi_h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

изометрия 4х мерного пространства.

Утеверждение: $(z_1, z_2) = (hz_1h^{-1}, hz_2h^{-1})$

Замечание 1.16.1. Доказательство с помощью матричного представления.

$h = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} x_0+x_1i & x_2+x_3i \\ -x_2+x_3i & x_0-x_1i \end{pmatrix}$

$$(z_1, z_2) = \frac{1}{2}Tr(z_1, \bar{z}_2^T)$$

$$(hzh^{-1}, hz_2h^{-1}) = \frac{1}{2}Tr(hzh^{-1} \cdot \overline{(hz_2h^{-1})}^T) =$$

$$= \frac{1}{2}Tr(hzh^{-1}\bar{h}^{-1})^T z_2^T h^T) = \frac{1}{2}Tr(hz\bar{z}_2^T\bar{h}^T) = \frac{1}{2}Tr(z\bar{z}_2^T\bar{h}^T h) = \frac{1}{2}Tr(z\bar{z}_2^T)$$

Следствие 1.16.0.2. $\{z \in \mathbb{H}\colon Rez = 0\} =< 1 >^{\perp}$ — инвариатно относительно действия h сопряжением.

▶ $z \in < 1 >^{\perp}$

$$(1, z) = 0$$

$$(h1h^{-1}, hzh^{-1}) = 0 \Rightarrow hzh^{-1} \in < 1 >^{\perp}$$

◀

Можно рассмотреть сужение действия сопряжения при помощи h на пространство линейных кватернионов.

$V =< 1 >^{\perp}$

$\varphi_h|_v\colon V \to V$

Сохраняет скалярное произведение (так как φ_2 изометрия на всем $\mathbb{H}$)

$V =< \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k} >\sim \mathbb{R}^3$

$\varphi_h|_v \in O(3)$

$$h \in \mathbb{H}_1 \sim SU(2)$$

$$h \to \varphi_h|_V$$

$$SU(2) \to O(3)$$

$$\varphi_{h_1h_2}(z) = h_1h_2zh_2^{-1}h_1^{-1} = \varphi_{h_1}(\varphi_{h_2}(z))$$

$$\varphi_{h_1h_2} = \varphi_{h_1} \circ \varphi_{h_2}$$
$$\varphi_{h_1h_2}|_v = \varphi_{h_1}|_v \circ \varphi_{h_2}|_v$$

Отображение $h \to \varphi_h|_v$ является гомоморфизмом.

Теорема 1.16.1. Отображение из $\mathbb{H}_1 \sim SU(2)$ h ставится в соответствие $\varphi_h|_V$ является гомоморфизмом из $SU(2)$ на $SO(3) = \{g \in O(3)\colon \det g = 1\}$ причем ядро этого отображение есть $\{\pm 1\}$

$h \to \varphi_h|_v$

Замечание 1.16.2. С топологической точки зрения $SU(2)$ гомеоморфна S^3

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1$$

С топологической точки зрения $SO(3)$ устроено как RP^3.

RP^3 можно вложить в $\mathbb{R}^9$

$SO(3)$ — зависит от 9 параметров удовлетворяющее 7 условиям.

$$f \in SO(3)$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$$
$$a_1^2+a_4^2+a_7^2=1$$
$$a_2^2+a_5^2+a_8^2=1$$
$$a_3^2+a_6^2+a_9^2=1$$
$$a_1a_2+a_4a_5+a_7a_8=0$$
$$...$$
$$\det(\cdots)=1$$

▶ $h \to [\varphi_h|_v]$ в базисе из матриц Пауля.

$$h = \begin{pmatrix} a+b_i & c+d_i \\ -c=d_i & a-b_i \end{pmatrix}$$

$$h\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}h^{-1} = \begin{pmatrix} (a^2+b^2-c^2-d^2)i & 2ad+2bc+(2bd-2ac)i \\ -2ad-2bc+(2bd-2ac)i & (-a^2-b^2+c^2+d^2)i \end{pmatrix}$$
$$h\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}h^{-1} = \begin{pmatrix} (-2ad+2bc)i & a^2-b^2+c^2-d^2+(2ab+2cd)i \\ * & * \end{pmatrix}$$
$$h\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}h^{-1} = \begin{pmatrix} (2ac+2bd)i & (2cd-2ab)+(a^2-b^2-c^2-d^2)i \\ * & * \end{pmatrix}$$
$$[\varphi_h|_V] = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & -2ad+2bc & 2ac+2bd \\ 2ad+2bc & a^2-b^2+c^2-d^2 & -2ab+2cd \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$
$$\det[\varphi|_v] = (a^2+b^2+c^2+d^2)^3 = 1$$
$$[\varphi][\varphi]^t = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2E = E$$

◀

Отступление: кватернионы и трехмерная геометрия.

$$z = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = [x_0, \bar{w}]$$

$$z' = x_0' + x_1' i + x_2' j + x_3' k = [x_0', \bar{w}]$$

$$zz' = [x_0 x_0' - (\bar{w}, \bar{w}'), x_0 \bar{w}' + x_0' \bar{w} + (x_1 x_2' - x_2 x_1')k + (x_3 x_1' - x_1 x_3')j + (x_2 x_3' - x_3 x_2')i] =$$

$$= [x_0 x_0' - (\bar{w}, \bar{w}'), x_0 \bar{w} + x_0' \bar{w} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix}] =$$

$$= [x_0 x_0' - (\bar{w}, \bar{w}'), x_0 \bar{w}' + x_0' \bar{w} + \bar{w} \times \bar{w}']$$

▶ Доказательство, что отображение $h \to \varphi_h|_v$ — сюръекция. $A \in SO(3)$, если $A = E$, то $h = 1$
Ищем h, чтобы $A = [\varphi_h|_V]$
Если $A \neq E$, то существует ортонормированный базис V в котором оператор усножения на A имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Есть $w_1 \neq 0, A\bar{w}_1 = \bar{w}_1, |w_1| = 1$
A — Поворот оси $\bar{w}_1$ на угол φ
Выберем какой-то $\bar{w}_2 \perp w_1$, $|w_2| = 1$
$\bar{w}_1, \bar{w}_2$ и $\bar{w}_1 \times \bar{w}_2$ — базис V. $\bar{w}_2$ и $\bar{w}_1 \times \bar{w}_2$ — ортонормированный базис $< w_1 >^\perp$

$$h = ?$$

$$h - [x_0, \bar{w}]$$

$$h\bar{w}h^{-1} = (x_0 + \bar{w})\bar{w}(x_0 - \bar{w}) = \bar{w}(x_0 + \bar{w})(x_0 - \bar{w}) = \bar{w}hh^{-1} = \bar{w}$$

$$|h| = 1$$

Если хотим, чтобы ось вращения совпадала с осью натянотой на w_1, то $w = \lambda w_1$
$h = [x_0, \lambda w_1]$ $1 = |h|^2 = x_0^2 + \lambda^2 |w_1|^2 = x_0^2 + \lambda^2 \Rightarrow \exists \in \mathbb{R} x_0 = \cos\psi, \lambda = \sin\psi$

$$h = \cos\psi + \sin\psi \bar{w}_1, h w_1 h^{-1} = w_1$$

$$h w_2 h^{-1} = (\cos\psi + \sin\psi \bar{w}_1)(0 + \bar{w}_2)(\cos\psi - \sin\psi \bar{w}_1) =$$

$$= (\cos\psi 0 - \sin\psi(\bar{w}_1 \bar{w}_2) + \cos\psi \bar{w}_2 + 0 +$$

$$\sin\psi \cdot \bar{w}_1 \times \bar{w}_2)(\cos\psi - \sin\psi \bar{w}_1)$$

$$= (\cos\psi \bar{w}_2 + \sin\psi \bar{w}_1 \times \bar{w}_2)(\cos\psi - \sin\psi \bar{w}_1) =$$

$$= 0 + \cos^2\psi \bar{w}_2 + \cos\psi \sin\psi \bar{w}_1 \times \bar{w}_2 - \cos\psi \sin\psi \bar{w}_2 \times \bar{w}_1 -$$

$$- \sin^2\psi(\bar{w}_1 \times \bar{w}_2)\bar{w}_1 =$$

$(w_1 \times w_2) \times w_1$ — нормированный $\perp w_1 \times w_2$, $\perp w_1$
$w_1, w_2, w_1 \times w_2$ — ортонормированный базис.
$(w_1 \times w_2) \times w_1 = \pm w_2$ $(w_1 \times w_2, w_1, \pm w_2)$ — правая тройка. $\Rightarrow$ знак $+$.

$$= (\cos^2\psi - \sin^2\psi)\bar{w}_2 + 2\cos\psi \sin\psi \bar{w}_1 \bar{w}_2 =$$

$$= \cos 2\psi \bar{w}_2 + \sin 2\psi \bar{w}_1 \times \bar{w}_2$$

$$2\psi = \alpha$$

◀

▶ $h = \pm$
$1z1^{-1} = z, \varphi_1 = id$
$(-1)z(-1)^{-1} = z, \varphi_2 = id$
Когда образ есть E_3?

$$4ab = 0$$
$$4ad = 0$$
$$4ac = 0$$

1. a = 0

$$2bc = 0$$
$$2bd = 0$$
$$2cd = 0$$

$\Rightarrow$ хотя бы 2 из трех b, c, d равны 0. 1*ненулевой*, остальные 0. На диагонали найдем противоречие.

$$\Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow b = c = d = 0$$
$$a^2 = 1$$
$$a = \pm 1$$

◀

1.17. Ортогональные многочлены

Многочлены Лежандра $V = \mathbb{R}[x]$ или $(V_n = \{g \in \mathbb{R}[x] \deg g \leqslant n\})$ $V_0 \subset V_1 \cdots = \cup_{i=0}^{\infty} V_i = V$

$1, x, x^2, \cdots$ — базис.

$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ — положительно определённая $\Rightarrow$ невырожденная.

Процесс ортогонализации. $\exists$ ортогональный базис из многочленов P_i, $\deg P_i = i$.

Теорема 1.17.1. Многочлены $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ являются ортогональным базисом пространства $\mathbb{R}[x]$ со сколярным произведением $\int_{-1}^{1} fgdx$.

Причем $\deg P_n = n$, $P_n(1) = 1$

$\mathfrak{Def}$ 1.17.1. P_n n-ый многочлен Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ — формула Родрига.

▶

$$\deg P_n = n$$
$$< P_0 >= V_0 \text{— пространство констант, порождается} P_0$$
$$< P_1, P_0 >=< P_1 > + V_0 = V_1$$
$$< P_0, \cdots, P_n >=< P_n > + < P_0, \cdots, P_{n-1} >= V_n$$

$$\alpha_n P_n + \cdots + \alpha_0 P_0 = 0$$

Надо проверить, что базис ортогональный. Проверим, что:

$$\forall n\colon P_n \perp P_0 \cdots P_{n-1}$$
$$P_n \perp < P_0, \cdots, P_{n-1} >= V_{n-1} =< 1, \cdots, x^{n-1} >$$

Для ортогональности достаточно проверить: $P_n \perp x^k$ для всех $k = 0, \cdots, n-1$
$P_n \perp f$ для любого многочлена f степени $\leqslant n-1$

$$\forall n \forall f \colon \deg f < n \colon \int_{-1}^{1} P_n(x) f(x) dx = 0$$

Проверим это:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n f(x) dx = 0$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n f(x)|_{-1}^{1}$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d}{dx} f(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) dx = 0$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n|_{x=1} = \frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n (x+1)^n|_{x=1} = \sum_{k=0} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n|_{x=1} =$$

$$\binom{n}{k} (\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n)(x+1)^n|_{x=1} = n!\,(1+1)^n = 2^n n!$$

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} 2^n n! = 1$$

◀

Теорема 1.17.2.

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

$x \in [-1, 1]$ z в некоторой окрестности 0.

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) z^n = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$$P_n(1) = 1$$

3.
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1) z^n = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots$$

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

Многочлены Чебышева

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x) g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$x = \cos\varphi, \varphi \in (0, \pi]$$

$$dx = -\sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sin\varphi$$

$$\Rightarrow (f,g) = (-1)\int_0^\pi \frac{f(\cos(\varphi))g(\cos\varphi)}{\sin\varphi}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^\pi f(\cos\varphi)g(\cos\varphi)d\varphi$$

$\int_0^\pi \cos(n\varphi)\cos(m\varphi)d\varphi = 0$, если $n \neq m$.

$\cos(n\varphi) = T_n(\cos\varphi)$

T_n — многочлен Чебышева.

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

T_n ортогональна для $(f,g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int_0^\pi \frac{(e^{inx\varphi} + e^{-inx})(e^{im\varphi} + e^{-im\varphi})}{4}d\varphi =$$
$$= \int_0^\pi \frac{e^{i(n+m)\varphi} + e^{i(m-n)\varphi} + e^{i(n-m)\varphi} + e^{-(n+m)\varphi}}{4}d\varphi$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}f(x)g(x)dx = \int_0^\pi \sin^2(\varphi)f(\cos\varphi)g(\cos\varphi)d\varphi$$
$$\sin(n+1)\varphi = U_n(\cos(\varphi))\sin(\varphi)$$

$U_n(x)$ — ортогональные многочлены с весом $\sqrt{1-x^2}$.

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{2n!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^n \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}})$$

$$\sum_{n=0}^\infty T_n(x)z^n = \frac{1-xz}{1-2xz+z^2}$$

Многочлены Лагерра .

$$\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}$$

$$L_n(x) = c_n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

Многочлены Эрмита $\int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)e^{-x^2}$ — многочлены Эрмита H_n

$$H_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Многочлены Якоби

$$(f,g) = \int_{-1}^1 (x-1)^\alpha (x+1)^\beta f(x)g(x)dx, \alpha > -1, \beta > -1$$

многочлены Якоби $J_n^{\alpha,\beta}(x)$ — ортогональный базис пространства $\mathbb{R}[x]$ с данным скалярным произведением.

1.18. Дифференциальные операторы и ортогональные многочлены.

1.

$$V = \mathbb{R}[x]$$

Пространство многочленов ограниченной степени:

$$V_n = \{g \in \mathbb{R}[x], \deg g \leqslant n\}, n = 0, 1, \cdots$$

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Рассмотрим оператор:

$$D\colon V \to V$$

$$D = \frac{d}{dx}(x^2-1)\frac{d}{dx} = (x^2-1)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx}$$

$$D(f) = (x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}f + 2x\frac{d}{dx}f$$

Сузим оператор на пространство многочленов ограниченной степени.

$$D\colon V_n \to V_n$$

$$D^* = ?$$

Соотношение определяющее сопряженный оператор:

$$\int_{-1}^{1} D(f)gdx = \int_{-1}^{1} fD^*(g)dx$$

$$(Df, g) = (f, D^*g)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}((x^2-1)\frac{d}{dx}f)gdx = -\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{d}{dx}f\frac{d}{dx}gdx + (x^2-1)\frac{d}{dx}fg|_{-1}^{1} =$$

$$= -\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{d}{dx}f\frac{d}{dx}gdx = \int_{-1}^{1} f\frac{d}{dx}((x^2-1)\frac{d}{dx}g)dx$$

$D = D^*$ — самосопряженный.

$D\colon V_n \to V_n, D = D^*$

$\Rightarrow \exists$ ортонормированный базис из собственных функций(многочленов).

Теорема 1.18.1. P_m — собственная функция оператора D с собственными числами $m(m+1), m = 0, 1, \cdots, n$.

P_m — Многочлены Лежандра.

▶ Почему собствнные числа обязаны иметь вид $m(m+1)$? Если λ — собственное число.

$$D(f) = \lambda f, \deg f = m, f = a_m x^m + \cdots$$

$$\lambda a_m x^m + \cdots = D(f) = m(m+1)a_m x^m + \cdots \Rightarrow \lambda = m(m+1)$$

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^m = 2mx(x^2-1)^m$$

Продиффиренцируем по переменной x m + 1 раз и применем формулу Лейбница.

$$(x^2-1)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}(x^2-1)^m+(m+1)2x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m+\frac{2m(m+1)}{2}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m=$$

$$2mx\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m+(m+1)2m\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$$

$$(x^2-1)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}(x^2-1)^m+2x\frac{d^{m+1}}{dx^m}(x^2-1)^m=m(m+1)\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$$

Что бы получились многочлены Лежандра нужно еще домножить на $\frac{1}{2^n n!}$.

$$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}(\frac{1}{2^n n!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m)+2x\frac{d}{dx}(\frac{1}{2^n n!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m)=$$
$$=m(m+1)\frac{1}{2^n n!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$$

$$D(P_m(x))=(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}P_m(x)+2x\frac{d}{dx}P_m(x)=m(m+1)P_m(x)$$

$V_n, m=0,1,\cdots,n$ $\{P_m\}$ — базис V_m ◀

Упражнение:

(a) Проверить ортогональность многочленов Чебышева, Лагерра, Эрмита(для соответствующих весов).

(b) Попробуйте найти дифференциальные операторв, чьими собственными функциями являются многочлен Чебышева, Лагерра и Эрмита.

2. Тригонометрические многочлены.

$$V=\{a_0+a_1\cos(x)+\cdots+a_n\cos(nx)+b_1\sin x+\cdots+b_n\sin nx$$

$$\dim_{\mathbb{R}} V=2n+1$$

$$(f,g)=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx$$

$$D=\frac{d}{dx}:V\to V$$
$$D^*=?$$

$$\int_0^{2\pi}D(f)\cdot g dx=\int_0^{2\pi}f'g dx=-\int_0^{2\pi}fg'dx+fg|_0^{2\pi}$$
$$f(2\pi)g(2\pi)-f(0)g(0)=0$$

$$D^*=-D$$

$(\frac{d^2}{dx^2})^*=\frac{d^2}{dx^2}$ — самосопряженный.

Упражнение: проверьте самосопряженность

$$\frac{d^2}{dx^2}(1) = 0$$

собственное число $= 0$.

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cos(mx)) = -m^2 \cos mx$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin(mx)) = -m^2 \sin mx$$

собственные числа $0, -1, -n, \cdots, -n^2$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin mx dx = 0$$

$$< 1, \cos x, \cdots, \cos nx, \cdots, \sin nx >$$

$$\dim \leqslant 2n + 1$$

$1, \cos x, \cdots, \sin nx$ — попарноортогональные и не ноль, значит базис.

Глава 2

Полилинейная алгебра и тензоры

2.1. Факторпространство

$\mathfrak{Def}$ 2.1.1. K — поле, V — векторное поле над K, $U < V$. Введём отношение для $v_1, v_2 \in V$:

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$$

Упражнение: Это отношение эквивалентности. То есть выполняется транзитивность, рефлексивность и симметричность.

$\mathfrak{Def}$ 2.1.2. $[v] = v + U = \{v + u \colon u \in U\}$ — линейное многообразие. Действие над классами:

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U$$
$$\alpha(v_1 + U) = \alpha v_1 + U$$

Упражнение: докажите что определение корректно(независимость от выбора представителей в классах)

Рассмотрим факторможество $V/\sim$.

Упражнение: операции сложения классов и умножение классов на скаляр удовлетворяет аксиомам векторного пространства. То есть такой фактор — это векторное пространство над полем K.

$\mathfrak{Def}$ 2.1.3. $V/\sim$ с операциями $+$ и $\cdot$ называется факторпространством V по подпространству U. Обозначение: V/U.

Что значит, что $\{v_i + U\}_{i\in I}$ — базис V/U?

$$\forall v + U \in V/U, \exists! \{\alpha_i\} \subset K \colon \text{почти все } \alpha_i \text{ равны } 0 \colon$$
$$v + U = \sum_{i\in I} \alpha_i(v_i + U) = \left(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i\right) + U$$

Упражнение: $\{v_i + U\}_{i\in I}$ — базис V/U тогда и только тогда, когда $\{v_i\}_{i\in I}$ — относительный базис V относительно U.

2.1.1. Отображение, индуцированное на факторпространстве

V, W — векторные пространства над K, $U < V$. $f \colon V \to W$ линейная. **Вопрос:** когда можно построить естественное линейное индуцированное отображение $\bar{f} \colon V/U \to W$?

Предложение: Если $U \leqslant \ker f$, то такое индуцированное отображение можно построить.

$$\bar{f}\colon V/U \to W$$
$$v + U \in V/U\colon \bar{f}(v+U) = f(v)$$

Корректность:

$$v + U = v' + U \overset{?}{\Rightarrow} \bar{f}(v+U) = \bar{f}(v'+U)$$
$$v - v' \in U \leqslant \ker f$$
$$v - v' \in U \Rightarrow f(v) = f(v')\colon f(v) - f(v') = f(v - v') = 0$$

Теперь проверим линейность:

$$\bar{f}\left(\alpha_1(v_1+U) + \alpha_2(v_2+U)\right) = \bar{f}\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + U\right) =$$
$$= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = \alpha_1 \bar{f}(v_1+U) + \alpha_2 \bar{f}(v_2+U)$$
$$\bar{f} \in \mathcal{L}(V/U, W)$$

2.2. Тензорное произведение пространств

Возьмём $V_1, \dots, V_n$, W — векторные пространства над K. Рассмотрим полилинейные отображения $V_1 \times \dots \times V_n$ в W, то есть отображения, линейные по каждому из аргументов.

Построим новое, тензорное пространство $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ и каноническое отображение из $V_1 \times \dots \times V_n$ в $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$

Шаг 1: Построим $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$

$$V_1 \times \dots \times V_n = \{(v_1, \dots, v_n)\colon v_i \in V_i\}$$

Возьмём M — пространство всех финитных отображений из $V_1 \times \dots \times V_n$ в K (финитное значит, что отображение почти всюду равно 0).

$$f, g \in M$$
$$(f+g)(v_1, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_n) + g(v_1, \dots, v_n)$$
$$(\alpha f)(v_1 \dots v_n) = \alpha f(v_1, \dots, v_n)$$

Упражнение: M с операциями поточечного сложения и умножения на скаляр — векторное пространство над K.

Теперь рассмотрим набор финитных отображений $\delta_{(v_1, \dots, v_n)}$ и убедимся, что он является базисом M:

$$\delta_{(v_1, \dots, v_n)}(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1 & u_1 = v_1 \wedge \dots \wedge u_n = v_n \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Для любой f:

$$f = \sum_{(v_1, \dots, v_n)} f(v_1, \dots, v_n) \delta_{(v_1, \dots, v_n)}$$

Если f финитная, то сумма конечна. Тогда набор δ-функций порождает M.

$$\sum \alpha_{(v_1, \dots, v_n)} \delta_{(v_1, \dots, v_n)} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{(v_1, \dots, v_n)} = 0$$

$\alpha_{v_1,\dots,v_n} \in K$, значит δ-функции линейно независимы.

δ-функции — базис M. Если поле K бесконечно и хотя бы одно из V_i не нульмерно, то M — бесконечномерное.

Далее символ δ будем опускать, будем просто писать $(v_1, \dots, v_n)$. **TODO** в конспекте ещё не везде хватает скобок, чтобы это обозначение было видно.

$\sum \alpha_{v_1,\dots,v_n}(v_1, \dots, v_n)$ — такие формальные суммы образуют M.

Теперь рассмотрим формальные финитные линейные комбинации элементов $V_1 \times \dots \times V_n$:

$$\sum \alpha_{v_1,\dots,v_n}(v_1, \dots, v_n) = \sum \beta_{v_1,\dots,v_n}(v_1, \dots, v_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall v_1, \dots, v_n \colon \alpha_{(v_1,\dots,v_n)} = \beta_{(v_1,\dots,v_n)}$$

Возьмем подпространство, порожденное следующим набором векторов.

$$\begin{aligned} M_0 = \langle &(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n) - (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) - (v_1, \dots, v_i', \dots, v_n), \\ &(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) - \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ &\mid \forall i = 1..n, v_i, v_i' \in V_i, \alpha \in K\rangle \end{aligned}$$

Что же такое M_0? Это те самые разности, которые не позволяют нам работать с δ-ми линейно по их параметрам. Нам бы хотелось, чтобы все M_0 были на самом деле нулями в новом пространстве. Давайте возьмём факторпространство:

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \coloneqq M/M_0$$

Замечание 2.2.1.

$$(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n) + M_0 = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + (v_1, \dots, v_i', \dots, v_n) + M_0$$

$$(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) + M_0 = \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + M_0$$

𝔇𝔢𝔣 2.2.1. $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ — тензорное произведение пространств. Элементы тензорного произведения — тензоры. Так как $(v_1, \dots, v_n)$ порождают M, то $(v_1, \dots, v_n) + M_0$ порождают $M/M_0 = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ — разложимый тензор.

Пример 2.2.1. $(v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) + M_0$ — не разложимый тензор.

Предостережение: разложимые тензоры порождают $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, но не являются базисом:

$$v_1 \otimes \dots \otimes (v_i + v_i') \dots \otimes v_n - v_1 \otimes \dots v_i \dots \otimes v_n - v_1 \otimes \dots \otimes v_n = 0$$

Шаг 2: Построение полилинейного отображения из $V_1 \times \dots \times V_n$ в $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$.

Теорема 2.2.1.

$$\varphi(\underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\text{это не } \delta}) = v_1 \otimes \dots \otimes v_n = \underbrace{\delta(v_1, \dots, v_n)}_{\text{а это } \delta} + M_0$$

Такое каноническое отображение является полилинейным.

▶

$$\begin{gathered}
\varphi((v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n)) = v_1 \otimes \dots \otimes (v_i + v_i') \otimes \dots v_n = \\
= (\delta(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n) + M_0) = \\
= \delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \delta(v_1, \dots, v_n) + M_0 = \\
= (\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + M_0) + (\delta(v_1, \dots, v_i', \dots v_n) + M_0) = \\
= v_1 \otimes \dots v_i \otimes \dots v_n + v_1 \otimes \dots v_i' \otimes \dots \otimes v_n = \varphi((v_1, \dots, v_n)) + \varphi((v_1, \dots, v_i', \dots, v_n)) \\
\varphi((v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)) = v_1 \otimes \dots \alpha v_i \otimes \dots v_n = \alpha v_1 \otimes \dots \otimes v_n = \alpha\varphi((v_1, \dots, v_n))
\end{gathered}$$

Получили, что φ — полилинейно. ◀

Шаг 3: Универсальность тензорного произведения. У нас уже есть $V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, а также $V_1 \times \dots \times V_n \to W$.

$$\begin{array}{ccc}
V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\varphi} & V_1 \otimes \dots \otimes V_n \\
 & \overset{\alpha}{\searrow} & \downarrow \beta \\
 & & W
\end{array}$$

Теорема 2.2.2. Для любых W и полилинейного отображения $\alpha\colon V_1 \times \dots \times V_n \to W$, существует единственное полилинейное отображение $\beta\colon V_1 \otimes \dots \otimes V_n \to W$, что $\alpha = \beta \circ \varphi$.

▶ **Единственность:** Пусть $\beta \in \mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, W)$ существует.
Достаточно проверить, что β однозначно определено на семействе образующих, то есть на разложимых тензорах:

$$\beta((v_1 \otimes \dots \otimes v_n)) = \beta(\varphi(v_1, \dots, v_n)) = \alpha(v_1, \dots, v_n)$$

Значит действительно существует не более одного отображения β.

Существование: Рассмотрим линейное отображение $\tilde{\beta}$ из M в W, которая на базисных элементах определяется следующим образом:

$$\tilde{\beta}((v_1, \dots, v_n)) = \alpha(v_1, \dots, v_n)$$

По линейности достраиваем до линейного отображения из M в W.

$$\tilde{\beta}\left(\sum a_{v_1 \dots, v_n}(v_1, \dots, v_n)\right) = \sum a_{v_1, \dots, v_n}\tilde{\beta}((v_1, \dots, v_n)) = \sum a_{v_1, \dots, v_n}\alpha(v_1, \dots, v_n)$$

$\tilde{\beta}$ — линейное отображение.
Теперь хотим линейное $\beta\colon M/M_0 \to W$.
Это можно сделать, если $M_0 \leqslant \ker\tilde{\beta}$:

$$\begin{gathered}
\tilde{\beta}((v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n)) - (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) - (v_1, \dots, v_i', \dots, v_n)) = \\
= \tilde{\beta}((v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n)) - \tilde{\beta}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) - \tilde{\beta}((v_1, \dots, v_i', \dots v_n)) = \\
= \alpha(v_1, \dots, v_i + v_i', \dots, v_n) - \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) - \alpha(v_1, \dots, v_i', \dots, v_n) = 0 \\
\tilde{\beta}((v_1, \dots, av_i, \dots, v_n)) - a(v_1, \dots, v_n) = \tilde{\beta}((v_1, \dots, av_i, \dots, v_n)) - a\tilde{\beta}((v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)) = \\
= \alpha(v_1, \dots, av_i, \dots v_n) - a\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) = 0
\end{gathered}$$

$\tilde{\beta}$ принимет значение 0 на порождающих подпространствах M_0. Таким образом, $M_0 \leqslant \ker\tilde{\beta}$.

$$\begin{gathered}
\beta(m + M_0) = \tilde{\beta}(m) \\
\beta\colon V_1 \otimes \dots \otimes V_n \to W
\end{gathered}$$

Последнее, что осталось проверить: $\alpha = \beta \circ \varphi$

$$(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$$
$$\varphi((v_1, \dots, v_n)) = v_1 \otimes \dots \otimes v_n = (v_1, \dots, v_n) + M_0$$
$$(\beta \circ \varphi)(v_1, \dots, v_n) = \beta((v_1, \dots, v_n) + M_0) = \tilde{\beta}(v_1, \dots, v_n) = \alpha(v_1, \dots, v_n)$$
$$\beta \circ \varphi = \alpha$$

◀

Обозначения: $\mathcal{L}(V, W)$ — множество линейных отображений.
$V_1, \dots, V_n$, W — векторные пространства над K.
$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W)$ — пространство полилинейных отображений из $V_1 \times \dots \times V_n$ в W.

Следствие 2.2.2.1. Пространства $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W)$ и $\mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, W)$ изоморфны.

$$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W) \cong \mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, W)$$

▶ $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W)$ — векторное пространство над K. Сложение и умножение на скаляр определяется поточечно.

Надо проверить, что $f + g, \alpha f$ вновь полилинейные и что $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W)$ является векторным пространством над K.
Отображение $(\alpha \to \beta)$ построенное в теореме является линейным отображением из $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W)$ в $\mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, W)$.

$$\alpha = \beta \circ \varphi$$
$$\alpha \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W) \quad \beta \in \mathcal{L}(V_1 \otimes \dots, \otimes V_n, W)$$
$$\psi \colon \alpha \to \beta$$
$$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W) \to \mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, W)$$

Докажем, что отображение является гомоморфизмом.

$$\psi(\alpha + \alpha') = \beta + \beta'$$
$$\tilde{\beta}(\delta(v_1, \dots, v_n)) = \alpha(v_1, \dots, v_n)$$
$$\tilde{\beta}'((\dots)) = \alpha'(\dots)$$
$$\tilde{\beta}(\dots) + \tilde{\beta}'(\dots) = (\alpha + \alpha')(\dots)$$

Аналогично для умножения на скаляр.
Это линейное отображение сюръективно: возьмем произвольное линейное β, $\alpha = \beta \circ \varphi$. β — линейное, φ — полилинейное, значит α — полилинейное. В силу части единственности в теореме отображение действительно переводит в β.

$$\alpha \mapsto \beta_1 \colon \alpha = \beta_1 \circ \varphi \Rightarrow \beta = \beta_1$$

Это линейное отображение инъективно: достаточно поверить, что только нулевое переходит в 0. (так как для линейных отображений инъективность равносильно тривиальности ядра).

$$\alpha \mapsto \beta = 0$$
$$\alpha = \beta \circ \varphi = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

◀

Пример 2.2.2.

1. Многочлены
$$\mathbb{N} \cup \{0\}$$
Последовательности = отображения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ в K, K — поле.

Нам нужны только финитные последовательности.

Базис пространства финитных последовательностей $\{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\} = \delta_i$
$$\delta_i \colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to K$$
$$\delta_i(i) = 1, \delta_i(j) = 0 (j \neq i)$$
$$x^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$
f — многочлен.
$$f = a_n x^n + \dots + a_0 x^0$$
$$g = b_n x^n + \dots + b_0 x^0$$
$$f + g = (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_0 + b_0) x^0$$
$f = 0 \Leftrightarrow$ все коэффициенты = 0.

2. Конструкция пространства M.
$$v_1 \times \dots \times V_n$$
Финитные отображения из $V_1 \dots V_n$ в K.

$\delta_{(v_1, \dots, v_n)}$ — базис пространства.

$\delta_{(v_1, \dots, v_n)}(v_1, \dots, v_n) = 1$

$\delta_{(v_1, \dots, v_n)}(u_1, \dots, u_n) = 0$ если $\exists v_i \neq u_i$.
$$(v_1, \dots, v_n) = \delta_{(v_1, \dots, v_n)}$$
$$f(.) = \sum_{(v_1, \dots, v_n), f(v_1, \dots, v_n) \neq 0} f(v_1, \dots, v_n) \delta_{v_1, \dots, v_n}(.)$$
$$f = \sum_{v_1, \dots, v_n} \alpha_{v_1, \dots, v_n}(v_1, \dots, v_n)$$
$$g = \sum_{v_1, \dots, v_n} \beta_{v_1, \dots, v_n}(v_1, \dots, v_n)$$
$$(f + g) = (\alpha_{v_1 \dots, v_n} + \beta_{v_1 \dots v_n})(v_1, \dots, v_n)$$
$f = 0 \Leftrightarrow$ все $\alpha_{v_1, \dots, v_n}$ равны 0.

2.3. Размерность тензорного произведения и базисы.

Лемма 2.3.1. Если среди $V_i, i = 1 \cdots n$ есть нулевое пространство, то $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ также нульмерно.

▶ Пусть $V_i = \{0\}$. Рассмотрим полилинейное отображение $\alpha \in \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_i, \cdots, V_n, K)$
Зафиксируем все элементы кроме i-ого: $\alpha(V_1, \cdots, ., \cdots, V_n) \colon V_i \to K$ $V_i = \{0\}$ линейные отображения 0-мерного пространства только 0-мерное отображение.

$$\Rightarrow \alpha(V_1, \cdots, 0, \cdots, V_n) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

То есть, если $V_i = \{0\}$, то

$$\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_n, K) = \{0\}$$

$= \mathcal{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, K) = (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*$ — двойствнное пространство.

$$\Rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n = \{0\}$$

Если бы $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ содеражло бы ненулевой элемент, скажем е, то тогда бы мы могли дополнить е до базиса, тензорного произведения и определим функционал e^* $e^*(e) = 1$, e(остальных базисных) $= 0$.
Противоресие с тем, что $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* = \{0\}$. ◀

Теорема 2.3.1. $V_1, \cdots, V_n$ — векторное пространство над K, $\dim V_i = d_i < \infty$, тогда $\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = d_1 \cdot \cdots \cdot d_n$

▶ 1. $\exists i, \dim V_i = 0$ очевидно по лемме.
2. Все $d_i \neq 0$ Размерность $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ совпадает с размерностью двойственного пространства $\mathcal{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)$, который в свою очередь изоморфен $\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_n, K)$. Это пространство и будем рассматривать.
$e_1^j, \cdots, e_{d_j}^j$ — базис V_j $(e_i^j)^*$ — элементы двойственного базиса (базиса в V_j^*)

$$(e_i^j)^*(e_k^j) = 1, i = k; 0, i \neq k$$

Рассмотрим все такие произведения:

$$(e_{i_1}^{(1)})^* \cdots (e_{i_n}^{(n)})^* \colon V_1 \times \cdots \times V_n \to K$$

$$(e_{i_1}^{(1)})^* \cdots (e_{i_n}^{(n)})^*((v_1, \cdots, v_n)) = (e_{i_1}^{(1)})^*(v_1) \cdots (e_{i_n}^{(n)})^*(v_n)$$

$$(e_{i_1}^{(1)})^* \cdots (e_{i_n}^{(n)})^* \in \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_n, K)$$

Таких произведений $d_1, \cdots, d_n$

$$\{(e_{i_1}^{(1)})^* \cdots (e_{i_n}^{(n)})^* \colon 1 \leqslant i_1 \leqslant d_1, \cdots, 1 \leqslant i_n \leqslant d_n$$

— базис пространства полилинейного отображени из $V_1 \times \cdots \times V_n$ в K.
$f \colon V_1 \times \cdots \times V_n \to K$, полилинейная.

$$f(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{i_1, \cdots, i_n} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n})(e_{i_1}^{(1)} \cdots (e_{i_n}^{(n)})^*)$$

$$f(v_1, \cdots, v_n) = f(\sum \alpha_i^{(1)} e_i^{(1)}, \cdots, \sum \alpha_i^{(n)} e_i^{(n)}) = \sum_{i_1, \cdots, i_n} \alpha_{i_1}^1 \cdots \alpha_{i_n}^{(n)} f(e_1, \cdots, e_n) =$$

$$= \sum_{i_1, \cdots, i_n} \alpha_i^{(1)} \cdots \alpha_{i_n}^{(n)} \cdot f(e_i^1, \cdots, e_{i_n}^{(n)})(e_{i_1}^{(1)})^*(e_{i_1}^{(1)}) \cdots (e_{i_n}^{(n)})^*(e_{i_n}^{(n)})$$

f однозначно определяется совими значениями на $f(e_{i_1}^{(1)}, \cdots, e_{i_n}^{(n)})$ f и правая часть формулы (1) принимают одинаковые значения на всех наборах $\{(e_{j_1}^{(1)}, \cdots, e_{j_n}^{(n)})\}$ В силу полилинейности f и правая часть(1) совпадают всюду.
Теперь нужно доказать, что наш предполагаемый базис линейно независимый.

$$0 = \sum_{i_1, \cdots, i_n} a_{i_1, \cdots, i_n} (e_{i_1}^{(1)})^* \cdots (e_{i_n}^{(n)})^*$$

Переберем в качестве аргументов все наборы $(e_{j_1}^{(1)}, \cdots, e_{j_n}^{(n)})$ Тогда спарава всегда 0, а слева останется одина аргумент $0 = a_{j_1, \cdots, j_n} \Rightarrow$ линейно независимые.
Доказали: $\dim \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_n, K) = d_1 \cdots, d_n$

$$\dim \mathcal{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, K) = d_1 \cdots d_n$$
$$\dim(V_1, \otimes \cdots \otimes V_n)^* = d_1 \cdots d_n$$
$$\dim(V_1, \otimes \cdots \otimes V_n) = d_1 \cdots d_n$$
$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) \subset (V_1, \otimes \cdots V_n)^{**} =$$
$$= ((V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*)^*$$

Все конечномерное

$$(V_1, \otimes \cdots \otimes V_n) = (V_1, \otimes \cdots \otimes V_n)^*$$

и размерности совпадают.

◀

Теорема 2.3.2. $V_1, \cdots V_n$ векторные пространства над K, $\dim V_i = d_i < \infty$ $\{e_i^{(j)}\}_{i=1}^{d_j}$ — базисы $V_1, \cdots, V_n$. Тогда $\{e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)}\}$ — базис $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

▶ Семейство образующих: $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ пораждаются разложимами тензорами

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = (\sum \alpha_{i_1} e_1^{(1)}) \otimes \cdots \otimes (\sum_{i_k} \alpha_i e_i^{(n)}) =$$
$$= \sum_{i_1 \cdots i_n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n} e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)}$$
$$\cdots \otimes (u + u') \otimes \cdots = \cdots \otimes u \otimes \cdots + \cdots \otimes u' \otimes \cdots$$
$$\cdots \otimes (au) \otimes \cdots = a(\cdots \otimes u \otimes \cdots)$$

Произвеление $e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)}$ в точности $d_1 \cdots d_n$ то есть в точности размерность пространства $\Rightarrow$ базис. ◀

Замечание 2.3.1. Теорема остается верной и для бесконечномерных пространств.

▶ Доказательство того, что это семейство образующих дословно повторяет рассуждение в конечномерном случае.

Линейная независимость в общем случае.

$$\sum_{i_1, \cdots i_n} \alpha_{i_1, \cdots, i_n} e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)} = 0$$

Лишь конечное число ненулевых коэффицентов. $\Rightarrow$ из каждого пространства присутствует лишь конечное число базисных векторв.

Рассмотрим соответсвующие (конечномерные) пространства $U_i \leqslant V_i$ порожденные этими базисными векторами.

Тогда лежить не только в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, а в $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$(конечномерные) $\Rightarrow$ по теореме эти $e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots e_{i_n}^{(n)}$ — линейно независимые в $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \Rightarrow \alpha_{i_1 \cdots i_n} = 0$ для всех $i_1 \cdots i_n$. ◀

2.4. Примеры

Пространства функций на декартовых произведениях

$\mathfrak{Def}$ 2.4.1. $S_1, \cdots S_n$ — конечные множества, K — поле.
$F(S_i)$ множества отображений из S_i в K.

На этом множестве вводится естественное векторное пространство с $+$ и $\cdot$:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2. $(\alpha g)(x) = \alpha g(x)$

Мы определили пространство функций.

Рассмотрим множество функций $F(S_1 \times \cdots \times S_n)$ со значениями в поле K.

Лемма 2.4.1. Существует каноническое отождествление $F(S_1 \times \cdots \times S_n) = F(S_1) \otimes \cdots \otimes F(S_n)$

▶ **Базис и размерность $F(S_i)$:**
$\dim_k F(S_i) = |S_i|$ — базис δ функций (характеристические функции одноэлементных подмножеств).

$$x \in S_i, \delta_x^{(i)} \colon S_i \to K$$

$$\delta_x(x) = 1$$

$$\delta_x(y) = 0, y \neq x$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta_i(x)$$

Так же дельта функции линейно независимые $\sum \alpha_i \delta_i(x) = 0$. Подставим вместо x все возможные x_i, получаем, что каждая конкретная $\alpha_i = 0$.

Совпадение размерностей двух пространств:
Размерности обоих пространств совпадают:

$$\dim(F(S_1 \times \cdots \times S_n)) = |S_1 \times \cdots \times S_n| = |S_1| \times \cdots \times |S_n| =$$
$$= \dim F(S_1) \times \cdots \times \dim F(S_n) = \dim(F(S_1) \otimes \cdots \otimes F(S_n))$$

Базисы двух пространств:

Базис $F(S_1 \times \cdots \times S_n)$:
$\delta_{x_1, \cdots, x_n} = \delta_{x_1} \cdot \cdots \cdot \delta_{x_n}$
$\delta_{x_1, \cdots, x_n}(y_1 \cdots, y_n) = \delta_{x_1}(y_1) \cdot \cdots \cdot \delta_{x_n}(y_n)$

Базис $F(S_1 \otimes \cdots \otimes S_n)$:
$\{\delta^1_{x_1}, \cdots, \delta^n_{x_n} | x_i \in S_i\}$, $\delta^1_{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta^n_{x_n}$.

Построение изоморфизма:
Изоморфизм сопоставляет: $\delta_{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_n} \to \delta_{x_1, \cdots, x_n}$.
$(\delta_{x_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_n})(x_{j_1}, \cdots, x_{j_n}) := \delta_{x_1}(x_{j_1}) \cdot \cdots \cdot \delta_{x_n}(x_{j_n})$
$= \delta_{x_1, \cdots, x_n}(x_{j_1}, \cdots, x_{j_n})$

Продолжаем по линейности на все тензоры.

Вопрос: что будет образом разложимых тензоров при таком изоморфизме?

$f_1, \cdots, f_n, f_i \in F(S_i)$

$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \to f_1(.) \cdot f_2(.) \cdots f_n(.)$

Образом является функция с разделяющимися переменными

$\mathfrak{Def}$ **2.4.2.** $g \in F(S_1 \times \cdots \times S_n)$ — функция с разделяющемися переменными, если $\exists f_1, \cdots, f_n | f_i \in F(S_i)\colon \forall x_1, \cdots x_n g(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n)$.

▶

$$f_i = \sum_{j=1}^{|S_i|} \alpha_j^i \delta_j^i$$

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = \otimes(\sum_{j=1}^{|S_i|} \alpha_j^i \delta_j^i) =$$

$$= \sum_{\substack{j_1, \cdots j_n \\ 1 \leqslant j_i \leqslant |S_i|}} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_n} \delta_{j_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{j_n}^n \to$$

$$\sum \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_n} \delta_{j_1}^1 \cdots \delta_{j_n}^n = \prod_{i=1^n} (\sum_{j=1}^{|S_i|} \alpha_j^i \delta_j^i) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(.)$$

Вот и получилась функция с разделяющимися переменными.

И наоборот, можено просто прочитать цепочку в другую сторону. ◀

◀

Подъем поля скаляров

$\mathfrak{Def}$ **2.4.3.** Пусть $K \subset L$ — поле

V_K — векторное пространство над K

Хотим построим новое векторное пространство V_L над L

Хотим, что бы V_L было как-то связано с V_K.

Хотим, что бы выполнялись следующие свойства:

1. $V_K \subset V_L$, точнее V_K можно отождествлить с некоторым подмножеством V_L и это подмножество изоморфны, как векторные пространства над K.
2. $\dim_L V_L = \dim_K V_K$

Процесс построения V_L называется подъем поля скаляров.

Замечание про связь базисов итоговой конструкции:

$\{e_i\}$ — базис V_K над K

Любой вектор можем записать как линейная комбинация $v \in V_K$, $v = \sum \alpha_i e_i$ и если посмотреть на теже вектора, но домножать на коэфиценты из L, то получится ровно наше новое веторное пространство. $V_L = \{\sum \beta_i e_i\}, \beta_i \in L$

Описание конструкции V_L:

Сейчас будет описано конструкция, которая будет удовлетворять всем описанным условиям.

Рассмотрим L как векторное пространтсво над K и зафиксируем базис l_j.

Рассмотрим тензорное произведение над полем K и обоазначим это множество как V_L:
$V_L = L \otimes_K V_K =< l \otimes v | l \in L, v \in V_K >$

Тогда базис V_L над полем K:$\{l_j \otimes e_i\}$

Проверка первого требования:

Проверим выполнение первого условия: $V_K \cong K \otimes V_K \subset L \otimes V_K$
Объясним, почему выполняется первый изоморфизм:
$\{1\}$ — базис K над K.
$\{1 \otimes e_i\}$ — базис $K \otimes V_K$ над К.
$\{e_i\}$ — базис V_k
Понятно, как отождествить базисные вектора, дальше продолжаем по линейности и понятно, почему это изоморфизм.

Зададим на V_L структуру векторного пространства над L:

Определим умножение на скаляр для некоторых векторов:

Нам нужно задать отображение $L \times V_L \to V_L$, которое удовлетворяет свойствам умножения на сколяр в векторном пространстве и сужение первого аргумента на K довало уже имеющиеся у нас умножение. Сложение у нас уже есть.

$$a(l \otimes v) = (al) \otimes v | a \in L$$

Мы определили умножение на семействе образующих, умножение для всего остального сейчас будем доопределять. Сейчас этим и займемся.

Доопределение:

$v \in L \otimes_K V_K \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{S} \alpha_i (l_i \otimes v_i)$
Теперь умножим произвольный вектор на β :
$\beta(\sum_{i=1}^{S} \alpha_i (l_i \otimes v_i)) = \sum \alpha_i \beta (l_i \otimes v_i) = = \sum \alpha_i (\beta l_i \otimes v_i)$.
Теперь нужно проверить корректность, то есть, что наше определение не зависит от разложения.

Проверим корректность определения:

$\sum_{i=1}^{S} \alpha_i (l_i \otimes v_i) = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j (l'_j \otimes v'_j)$
Нужно проверить, что после домножения на β получится одно и тоже.

Вспомним, как мы вообще определяли тензоры. Если два тензора равны, то мы можем из одного попасть в другой за конечное число преобразований вида($l \in L, k \in K, v_i \in V$): $(l_1 + l_2) \otimes v = (l_1 \otimes v) + (l_2 \otimes v)$
$l \otimes (v_1 + v_2) = (l \otimes v_1) + (l \otimes v_2)$
$kl_1 \otimes v = k(l \otimes v)$
$l \otimes kv = k(l \otimes v)$

И нам осталось проверить, что умножение слева и справа в смысле нашего умножения сохраняет тождества.
Проверяем: $\beta(\alpha l \otimes v) = (\beta \alpha l \otimes v)$
$= (\alpha \beta l \otimes v) = \alpha(\beta l \otimes v)$
$= \alpha\beta(l \otimes v) = (\alpha\beta)(l \otimes v) = \beta\alpha(l \otimes v)$
$\beta(l_1 + l_2) \otimes v = (\beta(l_1 + l_2) \otimes v) = (\beta l_1 + \beta l_2) \otimes v =$
$(\beta l_1) \otimes v + (\beta l_2) \otimes v = \beta(l_1 \otimes v) + \beta(l_2 \otimes v) = \beta((l_1 \otimes v) + (l_2 \otimes v))$

Проверка, что мы получили векторное пространство:

Теперь нужно проверить,что то, что мы определили дает структуру векторного пространства.

$L \times V_L \to V_L$

Нужно проверить 4 аксиомы, давай-те проверим какую-нибудь одну.

$\forall v \in V_L, 1_L \cdot V_L = V_L$

$1_L = 1_K$

Для 1_K это верно, значит и для 1_L

Ну или можем расписать это подробнее. $1v = 1 \sum \alpha_i(l_i \otimes v_i) =$
$1(\sum(\alpha_i l_i) \otimes v_i) = \sum(\alpha_i l_i) \otimes v_i =$
$= \sum(\alpha_i l_i \otimes v_i) = \sum \alpha_i(l_i \otimes v_i) = v$

Базис V_L для векторного пространтсва над полем L:

Если $\{e_i\}$ — базис V_K над K, то $\{1_L \otimes e_i\}$ — базис $L \otimes V_K$ над L.

Семейство образующих:

Как это увидеть. $v \in V_L$
$v = \sum \alpha_i(l_i \otimes v_i) = \sum \alpha_i(l_i \otimes \sum_j \beta_{ij} e_j) =$
$= \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_{ij}(l_i \otimes e_j) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_{ij} l_i(1 \otimes e_i)$

Линейная независимость:

Теперь надо понять, почему они линейно независимы над L. $\sum \beta_j(1 \otimes e_j) = 0$
$\{l_i\}$ — базис L над K
$\beta_j = \sum \gamma_{ij} l_i$
$\sum_j \sum_i \gamma_{ij} l_i(1 \otimes e_j) =$
$\sum_j \sum_i \gamma_{ij}(l_i \otimes e_j)$ — линейно независимы над K, так как образуют тензорный базис.
$\Rightarrow \gamma_{ij} = 0 \Rightarrow \beta_j = 0$

Переопределение оператора: Есть оператор $\mathcal{A} \in End_K(V_K)$, хотим построить $\mathcal{A} \in End_L(V_L)$, которые обладает следующими свойствами:

1. $\mathcal{A}_L$ — L-линейный оператор.
2. $\mathcal{A}_L|_{V_K} = \mathcal{A}$

Зададим его на базисе следующим образом $\mathcal{A}_L(l \otimes v) = (l \otimes \mathcal{A}v)$. Давай-те распространим это определение по линейности и вспомним, что $l(1 \otimes e_i) = (l \otimes e_i)$

Но мы не хотим что бы наше построение зависило от выбора базиса, но мы на это уже забили, но если вы все-таки не хотите, то следующие 50 строчек для вас.

$$\tilde{A} \colon M \to V_L$$

Расспространяем по K-линейности на все M.

$$\tilde{\mathcal{A}}((l, v)) = (l, \mathcal{A}v)$$

$\tilde{A}$ - L линейное отображение. $a \in L$

$$\tilde{\mathcal{A}}(a(l, v)) = \tilde{A}((al, v)) = (al, \mathcal{A}v) = a(l, \mathcal{A}v)$$

$$M_0 \subset ker\tilde{\mathcal{A}}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathcal{A}}((l_1+l_2,v)-(l_1,v)-(l_2,v)) = \\
= \tilde{\mathcal{A}}((l_1+l_2,v)) - \tilde{\mathcal{A}}((l_1,v)) - \tilde{\mathcal{A}}((l_2,v)) = \\
= (l_1+l_2,\mathcal{A}v) - (l_1,\mathcal{A}v) - (l_2,\mathcal{A}v) = \\
= (l_1+l_2)(1,\mathcal{A}v) - l_1(1,\mathcal{A}v) - l_2(1,\mathcal{A}v) = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}((l,v_1+v_2)-(l,v_1)-(l,v_2)) = \\
= (l,\mathcal{A}v_1+\mathcal{A}v_2) - (l,\mathcal{A}v_1) - (l,\mathcal{A}v_2) = \\
= l((1,\mathcal{A}v_1+\mathcal{A}v_2) - (1,\mathcal{A}v_1) - (1,\mathcal{A}v_2)) \in M_0
\end{gathered}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(M_0) \subset M_0$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ индуцирует L-линейный оператор на M/M_0, то есть на $L \otimes_K V$

$$\mathcal{A}_L \colon L \otimes_K V \to L \otimes V$$
$$\mathcal{A}_L|_{k\otimes v} \colon K \otimes V \to K \otimes V$$
$$\mathcal{A}_L((l,v)+M_0) = \tilde{\mathcal{A}}(l,v)$$

Независимость от выбора представителя $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}}(M_0) \subset M_0$

$$\mathcal{A}_L(x+M_0) = (\tilde{\mathcal{A}}x) + M_0, x \in M$$
$$x + M_0 = x' + M_0 \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}}(x) = \tilde{\mathcal{A}}(x') + M_0$$
$$x - x' \in M_0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(x-x') \in M_0$$

Упражнение: $[\mathcal{A}]_{\{e_i\}} = [\mathcal{A}_L]_{\{1\otimes e_i\}}$
Комплексификация:

$$V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$$

2.5. Некоторые стандартные изоморфизмы для тензорных произведений.

В этом параграфе все векторные пространства конечномерные.

Теорема 2.5.1. Ассоциативность

1. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$
2. Более общий случай, для любой правильной расстановки скобок.

$$(V_1 \otimes V_2)(\dots \otimes V_n) \cong V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

▶ Для любых пространств ограничемся первым случаем.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \times V_3 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"] & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \arrow[d, "\beta"] \\
& (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3
\end{tikzcd}$$

$\alpha = \beta \circ \varphi$
Необходимо показать, что α полилинейное отображение.

$$V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$$
$$(v_1, v_2) \to v_1 \otimes v_2$$

Данное отоброжение билинейное.

$$\alpha\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$

$$(v_1, v_2, v_3) \to (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$$

Значит отображение α полилинейное.

Из этого следует, что существует единственное полилинейное отображение β, которое по самой конструкции действует следующим образом:

$$\beta(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = \alpha(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$$

Теперь выберем базис у двух конструкций. Проверим, что базис переходит в базис и из этого будет следовать, что наше отображение изоморфизм.
$\{e_i\}$ — базис V_1
$\{f_j\}$ — базис V_2
$\{h_k\}$ — базис V_3

$$\beta(e_i \otimes f_j \otimes h_k) = (e_i \otimes f_j) \otimes h_k$$

β переводит базис в базис $\Rightarrow$ изоморфизм.

Второй способ:

$(e_i \otimes f_j) \otimes h_k$ — базис $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ и лежит в образе $\beta \Rightarrow \beta$ сюръективно.

$$\dim(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) = \dim V_1 \cdot \dim V_2 \cdot \dim V_3 =$$
$$= \dim(V_1 \otimes V_2) \cdot \dim V_3 = \dim((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3)$$

$\Rightarrow \beta$ — инъективно. $\Rightarrow$так как β биекция и полилинейно, значит β изоморфизм. ◀

Теорема 2.5.2. Коммутативность $V_1, \cdots, V_n$ — векторные пространства над полем K
$\sigma \in S_n$ — любая перестановка чисел от 1 до n
Существует изоморфизм $f_\sigma\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to V_{\sigma(1)} \otimes \cdots V_{\sigma(n)}$ и при этом $f_{\sigma\tau} = f_\sigma \circ f_\tau$

▶

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \cdots \times V_n & \stackrel{\varphi}{\to} & V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \\ & \stackrel{\alpha}{\searrow} & \downarrow \beta \\ & & V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)} \end{array}$$

α — полилинейная
$\beta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$
β переводит тензорный базис в тензорный базис $\Rightarrow$ изоморфизм.

$$f_{\sigma\tau}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma\tau(n)}$$
$$f_\tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}$$

$$f_\sigma \cdot f_\tau(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f_\sigma(v_{\tau(1)\otimes\dots\otimes v_{\tau(n)}}) =$$
$$= v_{\sigma\tau(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma\tau(n)}$$

◀

Теорема 2.5.3. Двойственность

$$\dim V_i < \infty \Rightarrow V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^* \cong (V_1 \otimes \dots \otimes V_n)^*$$

▶ То, что справа, изоморфно $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, K)$. Давайте сначала построим α:

$$\begin{array}{ccc} V_1^* \times \dots \times V_n^* & \overset{\varphi}{\rightarrow} & V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^* \\ & \overset{\alpha}{\searrow} & \downarrow \beta \\ & & \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, K) \end{array}$$

α будет отображать набор v_i в следующий функционал:

$$g_{v_1^* \dots v_n^*} : (u_1, \dots, u_n) \to v_1^*(u_1) \cdot \dots \cdot v_n^*(u_n), u_i \in V_i$$

При фиксации всех элементов в кортеже, кроме одного получается линейная функция, значит $g_{v_1^* \dots v_n^*} \in \mathcal{L}(v_1, \dots, V_n, K)$

$$\alpha\colon V_1^* \times \dots \times V_n^* \to \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, K)$$
$$\alpha(v_1^*, \dots, v_n^*) = g_{v_1^* \dots v_n^*}$$

α — каноническое отображение из $V_1^* \times \dots \times V_n^*$, α является полилинейным. Тогда можем достроить линейное отображение β (по универсальности тензорного произведения).

$$\beta : V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^* \to \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, K) \cong \mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, K) = (V_1 \otimes \dots \otimes V_n)^*$$
$$\beta(v_1^* \otimes \dots \otimes v_n^*)(u_1, \dots, u_n) = v_1^*(u_1) \dots v_n^*(u_n)$$

Осталось проверить, что β изоморфизм, то есть биективность β. Так как мы ограничиваемся только конечномерным случаем, то достаточно проверить только сюръективность и убедится, что размерности в обоих частях совпадают.

$$\dim(V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^*) = \Pi(\dim V_i^*) = \Pi(\dim V_i)$$
$$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)^* = \dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_n) = \Pi(\dim V_i)$$

Теперь проверим сюръективность.

$$f \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, K)$$
$$\{e_i^{(j)}\} \text{ — базис } V_i \Rightarrow$$
$$\{e_i^{(j)*}\} \text{ — базис } V_i^* \Rightarrow$$
$$e_{i_1}^{(1)*} \cdot \dots \cdot e_{i_n}^{(n)*} \text{— базис } \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, K)$$
$$f(.,\dots,.) = \sum f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) e_{i_1}^{(1)*}(.) \cdot \dots \cdot e_{i_n}^{(n*)}(.)$$
$$\beta(e_{i_1}^{(i)*} \otimes \dots \otimes e_{i_n}^{(n)*}) = e_{i_1}^{(1)*} \cdot \dots \cdot e_{i_n}^{(n)*}$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, K) \subseteq \operatorname{Im} \beta$$

То есть образующие лежат в образе, значит в образе лежит все пространство, значит, отображение сюръективно.

Значит отображение β изоморфизм, что и требовалось. ◀

2.6. Тензорное произведение и линейные отображения

Рассмотрим ещё одну интерпретацию тензорного произведения:

Теорема 2.6.1. U, V — конечномерные векторные пространства над K, тогда

$$U^* \otimes_K V \cong \mathcal{L}(U, V) \cong M(\dim V, \dim U, K)$$

▶

$$\begin{tikzcd} U^* \times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & U^* \otimes V \arrow[d, "\beta"] \\ & \mathcal{L}(U, V) \end{tikzcd}$$

Теперь расписываем: $\alpha(u^*, v)(x) = u^*(x) \cdot v$
$\alpha(u^*, v) \in \mathcal{L}(U, V), x \in U, u^* \in U^*, v \in V$

1. $\alpha(u^*, v)$ линейно по x
2. α — полилинейное отображение из $U^* \times V$

$$\beta : U^* \otimes V \to \mathcal{L}(U, V)$$
$$\beta(u^* \otimes v)(\cdot) = u^*(\cdot) \cdot v$$

Размерность области определения β и области назначения равны
Достаточно проверить, что β сюрьективно:
$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ — базис V
$e_1 \cdots, e_m$ — базис U
$e_1^*, \cdots, e_m^*$ — базис U^* двойственный к $e_1 \cdots, e_m$

$$\beta(e_i^* \otimes \varepsilon_j)(e_i) = 1 \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_j$$
$$\beta(e_i^* \otimes \varepsilon_j)(e_k) = 0 \cdot \varepsilon_j = 0, k \neq j$$
$$U_{e_1, \cdots, e_n} \to V_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n}$$
$$[\beta(e_i^* \otimes \varepsilon_j)] = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{в позиции } (j, i \text{ стоит единичка}$$

Так как такие матрицы образуют базис $\mathcal{L}(U, V)$, построенное отображение переводит базис в базис и является изоморфизмом. ◀

Замечание 2.6.1. про обозначения: Базис $U^* = e_i^* = e^i$

$\beta(e^i \otimes \varepsilon_j) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = e_j^i = e_{ji}$

Замечание 2.6.2. (замечане про отличие разложимых тензоров от неразложимых)
$U^* \otimes V$, где
$V = \sum_{j=1}^n a^j \varepsilon_j$
$U^* = \sum_{i=1}^m b_i e^i$

$$\beta(u^*\otimes v)=\beta((\sum_i b_ie^i)\otimes(\sum_j a^j\varepsilon_j))=\sum_i\sum_j b_ia^j\beta(e^i\otimes\varepsilon_j)=\sum_i\sum_j b_ia^je^i_j=\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}\cdot(b_1,\cdots,b_m),$$

$$\text{если } u^*\neq 0 \text{ и } v\neq 0$$

$\operatorname{rang}(\beta(u^*\otimes v))=1$ и наоборот, всякая матрица ранга 1 есть столбец на строку $\Rightarrow$ всякая матрица ранга 1 — образ разложимого тензора

$U^*\otimes V\cong M(n,m,K)$

$\mathfrak{Def}$ **2.6.1.** $v\in V_1\otimes\cdots\otimes V_n$

Тензорный ранг v — наименьшее m, что v сумма m разложимых тензоров

$n=2$: $U^*\otimes V\cong M_2(\dim U,K)$

$\mathfrak{Def}$ **2.6.2.** Тензорный ранг матрицы равен r, если у отвечающего ей при этом изоморфизме тензора тензорный ранг равен r

Тензорный ранг матрицы A равен наименьшему r, что A сумма r матриц ранга 1

Теорема 2.6.2. Тензорный ранг матрицы совпадает с обычным рангом

▶ 1. Тензорный ранг не больше обычного ранга $\operatorname{rang}A=r\Rightarrow\exists$ обратимые матрицы C и D, что: $C^-1AD=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}==\sum_{i=1}^r e^i_i$
тогда $A=\sum_{i=1}^n C(e^i_i)D{-}1$, где ранг каждого слагаемого 1, так как $\operatorname{rang}(FG)\leq\min(\operatorname{rang}F,\operatorname{rang}G)$
тензорный ранг $\leq r$
2. $\operatorname{rang}A\leq$ тензорный ранг A
$\operatorname{rang}(F+G)\leq\operatorname{rang}(F)+\operatorname{rang}(G)$
$A=A_1+\cdots+A_r$, тогда $\operatorname{rang}A\leq 1+\cdot+1=r$

◀

2.7. Тензорный ранг и алгоритм Штрассена

в этом параграфе будут нетензорные обозначение $a_i^j=a_{ij}$ (уточнить)
Будем пытаться что-то сказать про умножение матриц
Рассмотрим отображение:
$M_n(K)\times M_n(K)\to M_n(K)$ $(A,B)\mapsto AB$ — билинейное отображение

- $\{e_{ij}\}$ — базис $M_n(K)$
- ε_{ij} — базис $(M_n(K))^*$
- $A=(a_{ij}),\varepsilon_{ij}(A)=a_{ij}$

$$A=\sum_{i,j}\varepsilon_{i,j}(A)e_{ij}$$

$$B=\sum_{k,l}\varepsilon_{k,l}(B)e_{kl}$$

$$e_{ij}e_{kl}=\begin{cases}0 & i\neq k\\ e_{il} & j=k\end{cases}$$

$$AB=()()=\sum_{i,j,l}\varepsilon_{ij}(A)\varepsilon_{jl}(B)e_{il}=\sum_{i,j,l}\left(\varepsilon_{ij}(A)\varepsilon_{jl}\right)(B)e_{il},\text{здесть } n^3 \text{ умножений и } n^2(n-1) \text{ сложений}$$

теперь что значит это умножение с точки зрения тензоров

$$T \in M_n^*(K) \otimes M_n^*(K) \otimes M_n(K)$$
$$T = \sum_{i,j,l} \varepsilon_{ij} \otimes \varepsilon_{jl} \otimes e_{il} = \sum_{i,l} (\sum_j \varepsilon_{ij} \otimes \varepsilon_{jl}) \otimes e_{il}$$

T задаёт билинейное отображение $M_n(K) \times M_n(K)$ в $M_n(K)$

$$T(A,B) = \sum_{i,j,l} \varepsilon_{ij}(A)\varepsilon_{jl}(B)e_{il} = AB$$

Заметим, что тензорный ранг $T \leq n^3$, из этого можно извлечь выгоду, ведь на самом деле ранг может быть меньше

Предположим, что

$$(*) : T = \sum_{p=1}^{N} \underbrace{f_p}_{\in M_n^*(K)} \otimes \underbrace{g_p}_{\in M_n^*(K)} \otimes \underbrace{H_p}_{\in M_n(K)}$$

пусть все H_p матрицы с целыми коэффицентами, т.е. каждый коэффицент H_p это $1 + \dots + 1$ или $-(1 + \dots + 1)$ или 0

$$AB = T(A,B) = \sum_{p=1}^{N} f_p(A) g_p(B) H_p$$

Если такое разложение $(*)$, то для перемножения матриц нужно N умножений

Вопрос: верно ли, что тензорный ранг T может быть меньше, чем n^3 ?

Ответ: оказывается для матриц 2×2 ранг не 8 а 7

Собственно умножений для матриц 2×2 нужно делать 7 (Штрассен, 1969), сейчас построим формулу

$$e_{11} \quad a \quad\quad \varepsilon_{11} \quad \alpha e_{12} \quad b \quad\quad \varepsilon_{12} \quad \beta e_{21} \quad c \quad\quad \varepsilon_{21} \quad \gamma e_{22} \quad d \quad\quad \varepsilon_{22} \quad \delta$$
$$alpha \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} = a_{11}$$
$$e_{11} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

обычное умножение:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} b_{21} & b_{22} \end{matrix}$$
$$T = (\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma) \otimes a +$$
$$(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \delta) \otimes b +$$
$$(\gamma \otimes \alpha + \delta \otimes \gamma) \otimes c +$$
$$(\gamma \otimes \beta + \delta \otimes \delta) \otimes d =$$
$$(\alpha - \delta) \otimes (\alpha - \delta) \otimes (a + d) +$$
$$\delta \otimes (\alpha + \gamma) \otimes (a + c) +$$
$$(\alpha - \beta) \otimes \delta \otimes (a - b) +$$
$$\alpha \otimes (\beta + \delta) \otimes (b + d)$$

Итого тут мы делаем 7 умножений и 18 сложений

Мы докажем (т.к. чуть проще), что 7 умножений и 22 сложения

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} = \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix}$$

суммы:

смотрим на первую строчку: $(\alpha - \delta) \otimes (\alpha - \delta) \otimes (a + d)$

$$S_1 = a_{11} - a_{22}, S_2 = b_{11} - b_{22}$$

теперь на вторую строчку, далее аналогично

$$S_3 = b_{11} - b_{21}, S_4 = b_{11} - a_{12}$$
$$S_5 = b_{12} + b_{22}, S_6 = a_{21} - a_{22}$$
$$S_7 = a_{12} - a_{22}, S_8 = b_{21} - b_{22}$$
$$S_9 = a_{21} - a_{11}, S_{10} = b_{11} + b_{12}\text{произведения:}$$
$$P_1 = S_1 S_2$$
$$P_2 = a_{22} S_3$$
$$P_3 = S_4 b_{22}$$
$$P_4 = a_{11} S_5$$
$$P_5 = S_6 b_{11}$$
$$P_6 = S_7 b_{11}$$
$$P_7 = S_7 S_8$$
$$P_8 = S_9 S_{10}$$

результат:

$$c_{11} = P_1 + P_2 + P_3 + P_6, c_{12} = P_4 - P_3$$
$$c_{12} = P_2 + P_5, c_{22} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7$$

Заметим, что данное умножение справедливо и для матриц где значения — некоммутирующие переменные, т.к. порядок множителей здесь сохраняется (можно раскрыть скобки и увидеть, или понять, что a_i всегда раньше b_i)

Как можно перемножать блочные матрицы?

$A_{11}, A_{12}, \cdots, B_{22}$ — квадратные матрицы одного размера

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix} = \begin{matrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{matrix}$$

и теперь умножаем Штрассеном, где у нас будет 7 матричных умножений

Не трудно заметить, что мы научились быстро умножать матрицы размера $n = 2^k$ В таком случае для $n = 2^k$, число умножений:

$$2^k \le n \le 2^{k+1} \Rightarrow (2^{k+1})^{\log_2 7} \le (n^{1+\frac{1}{k}})^{\log_2 7} \sim n^{log_2 7 + O(1)}$$
$$7^k = (2^{\log_2 7})^k = (2^k)^{\log_2 7} = n^{\log_2 7} \sim n^{2.88}$$

Есть ещё один результат: Coppersmith Vilwgrad 1981

$O(n^{2.376})$ — но неприменимо из-за слишком большой константы

Есть ещё гипотеза Штрассена, но её уже стёрли с доски

2.8. Тензорное произведение операторов

$\mathfrak{Def}$ 2.8.1. $V_1, \cdots, V_n, W_1, \cdots, W_n$ — все конечномерные векторные пространства.
$A_1 : V_1 \to W_1, \cdots, A_n : V_n \to W_n$ — линейные отображения.

Тогда можно построить линейное отображение $A_1 \otimes \cdots A_n : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_n$ со следующим свойством: $(A_1 \otimes \cdots A_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = A_1 v_1 \otimes \cdots \otimes A_n v_n$ для всех $v_i \in V_i$

Называется тензорным произведением A_i.

Теорема 2.8.1. Такой оператор существует и единственный

▶ Доказываем, используя снова свойство универсальности, рисуем диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \arrow[d, "\beta"] \\
& W_1 \otimes \cdots \otimes W_n
\end{tikzcd}
$$

$$\beta = A_1 \otimes \cdots A_n$$

α — полилинейно, значит и β полилинейно.

Так же заметим, что если все отображения были изоморфизмами, то и тензорное произведение тоже будет изоморфизмом. ◀

Хотим найти матрицу $[A_1 \otimes \cdots A_n]$ в тензорном базисе.

Рассмотрим $A_1 \otimes A_2 : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$

$\{e_i\}_{i=1\cdots n}$ — базис V_1

$\{f_i\}_{i=1\cdots k}$ — базис V_2

$\{\varepsilon_i\}_{i=1\cdots m}$ — базис W_1

$\{\chi_i\}_{i=1\cdots l}$ — базис W_w

тогда $e_i \otimes f_j$ — базис $V_1 \otimes V_2$ и $\varepsilon_r \otimes \mathrm{ch}_s$ — базис $W_1 \otimes W_2$

$[A_1]_{e,\varepsilon} = (a_{ij})$

$[A_2]_{f,\chi} = (b_{rs})$

$[A_1 \otimes A_2]_{e\otimes f, \varepsilon \otimes \chi}$ строки нумеруем парами (r, s), столбцы нумеруем парами (i, j)

$[(A_1 \otimes A_2))(e_i \otimes f_j)]_{(r,s)} = [A_1 e_i \otimes A_2 f_j]_{(r,s)} = a_{(r,i)} b_{(s,j)}$

$A_2\colon \dim W_2 \times \dim V_2$

$A_1\colon \dim W_1 \times \dim V_1$

$A_1 \otimes A_2\colon (\dim W_1 \cdot \dim W_2) \times (\dim V_1 \cdot \dim V_2)$

a_{ij} заменяем на $a_{ij}[A_2]$

$$\begin{pmatrix} a_{11}[A_2] & a_{12}[A_2] \\ a_{21}[A_2] & \cdots \end{pmatrix}$$

Такое произведение матриц называется кронекерово произведение.

2.9. Тензорная алгебра векторного пространства

𝔇𝔢𝔣 2.9.1. V — векторное пространство над K. $(\dim_K V < \infty)$

Рассмотрим $T_p^q = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q}$

Элементы $T_p^q(V)$ — тензоры на V типа (p, q) и валентности (или ранга) $p + q$. (p раз ковариантные, q раз контрвариантные)

Пример 2.9.1.

1. Удобно положить $T_0^0(V) = K$, то есть скаляры это тензоры ранга 0.

2. $T_0^1(V) = V$ (элементы T_0^1 — векторы)

3. $T_1^0(V) = V^*$ (элементы T_1^0 — ковекторы)

$$v^* \in T_1^0(V), v^* \colon V \to K$$

4. $T_1^1(V) = V^* \otimes V \cong \mathcal{L}(V,V) = End(V) \cong M_n(K)$ Можно понимать как матрица линейных отображений.

5. $T_2^0(V) = V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^* = \mathcal{L}(V \otimes V, K) \cong \mathcal{L}(V, V, K)$
Элементы $T_2^0(V)$ — билинейные формы на V.

2.9.1. Алгебра и их структурные константы

Def 2.9.2. Алгебра(A) над полем K — это алгебраическая структура, которая является векторным пространством над K и на котором задано «умножение», то есть билинейное отображение : $A \times A \to A$

$$+\colon A \times A \to A$$
$$\cdot\colon K \times A \to A$$
$$\circ\colon A \times A \to A$$

Def 2.9.3. Ассоциативная алгеьра: $\circ$ — ассоциативна и $(A, +, \cdot)$ — кольцо. $\forall a_1, a_2 \in A, \forall k \in K\colon (k \cdot a_1) \circ a_2 = a_1 \circ (k \cdot a_2) = k \cdot (a_1 \circ a_2)$

Пример 2.9.2.

1. $K[t]$ — алгебра многочленов.

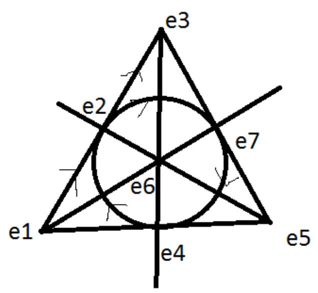
2. $M_n(K)$ — матричная алгебра.

3. $\mathbb{H}$ — 4-мерная алгебра над $\mathbb{R}$

4. $\mathbb{C}$ — 2-мерная алгебра над $\mathbb{R}$

   Замечание 2.9.1. $\mathbb{H}$ — веторное пространство над $\mathbb{C}$, но не алгебра.
   $i(jk) = (ij)k = -1$
   $j(ik) = j(-j) = 1 \neq i(jk)$ то есть форма не билинейная.

5. — восьмимерная неассоциативная алгебра октав. $1, e_1, \cdots, e_7$ — базис V



Идем по стрелке. Получается число, в которое мы пришли. Знак зависит от того, шли мы по стрелке или нет.

6. Алгебра Ли
   $[]\colon A \times A \to A$ — умножение
   $[X, X] = 0 \Rightarrow [X, Y] = -[Y, X]$ — кососимметричная

$$\forall X, Y, Z \in A\colon [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

A — алгебра.
$\circ\colon A \times A \to A$(билинейное отображение)

$$\mathcal{L}(A, A, A) \cong \mathcal{L}(A \otimes A, A) \cong (A \otimes A)^* \otimes A \cong A^* \otimes A^* \otimes A$$

Билинейное умножение на алгебре A соответствует тензорам $T_2^1(A)$.
$\{e_i\}$ — базис A

$$a = \sum_i a^i e_i$$

$$b = \sum_j b^j e_j$$

a^i — коэффицент a в базисе e_i

$$e_i e_j = \sum \gamma_{ij}^k e_k$$
$$ab = \sum_k (\sum_{ij} a^i b^j \gamma_{ij}^k) e_k$$

$\mathfrak{Def}$ 2.9.4. $\{\gamma_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры A.

Если умножение ассоциативно:

$$(e_i e_j) e_l = e_i (e_j e_l)$$
$$(e_i e_j) e_l = \sum_k \gamma_{ij}^k e_k e_l = \sum_k \sum_s \gamma_{ij}^k \gamma_{kl}^s e_s = \sum_s (\sum_k \gamma_{ij}^k \gamma_{kl}^s) e_s$$
$$e_i (e_j e_l) = e_i (\sum_r \gamma_{jl}^r e_r) = \sum_r \gamma_{jl}^r e_i e_r = \sum_s (\sum_r \gamma_{jl}^r \gamma_{ir}^s) e_s$$
$$\Rightarrow \forall i, j, l, s\colon \sum_k \gamma_{ij}^k \gamma_{kl}^s = \sum_r \gamma_{jl}^r \gamma_{ir}^s$$

В случае коммутативного умножения:

$$\forall i, j\colon e_i e_j = e_j e_i$$

$$\forall i, j, k\colon \gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k$$

Вернемся к общему случаю $T_p^q(V)$

$\mathfrak{Def}$ 2.9.5.

$$T(V) = \oplus_{p,q} T_p^q(V)$$

Тензорная алгебра пространства V.

$$\otimes \colon T(V) \times T(V) \to T(V)$$
$$\otimes \colon T_p^q(V) \times T_{p'}^{q'}(V) = T_{p+p'}^{q+q'}(V)$$

$$T_p^q = V^* \otimes \cdots \otimes V^* \otimes V \cdots \otimes V \cong \mathcal{L}(V^*, \cdots, V^*, V, \cdots, V, K)$$
$$\alpha \colon V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to K$$
$$\beta \colon V^* \times \cdots V^* \times V \times \cdots \times V \to K$$

Хотим построить полилинейное отображение

$$(\alpha, \beta) \colon V^* \times \cdots V^* \times V \cdots \times V \to K$$

Первых элемнетов $p + p'$, вторых $q + q'$

На первых p действует как α, на вторых p' как β, для q аналогично.

$$(\alpha, \beta)(v_1^*, \cdots, v_{p+q}^*, v_1, \cdots, v_{q+q'}) = \alpha(v_1^*, \cdots, v_p^*, v_1, \cdots, v_q)\beta(v_{p+1}^*, \cdots, v_{p+p'}^*, v_{q+1}, \cdots, v_{q+q'}^*)$$

То есть мы определили $\otimes$ для двух полилинейных отображений. Из данного определения видно, что $\otimes$ является билинейным и ассоциативным.

На самом деле можно все это получить пользуясь уже известными изоморфизмами:

$$T_p^q(V) \otimes T_{p'}^{q'}(V) \cong T_{p+p'}^{q+q'}(V)$$

Воспользуемся тем, что мы можем раскрывать скобки и переставлять элементы получим в точности $T_{p+p'}^{q+q'}$

2.10. Классическое определение тензоров

V — конечномерное векторное пространство. $e_1, \cdots, e_n$ — его базис. V^* — двойственное к V пространство. $e^1, \cdots, e^n$ — базис двойственного пространства, такой что $e^i(e_j) = 0$ если $i \neq j$, 1 если равны.

$$T \in T_p^q(V)$$
$$T = \sum_{i_1, \cdots i_p, j_1, \cdots, j_q} T_{i_1, \cdots, i_p}^{j_1, \cdots, j_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}$$

$e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}$ — это базис.

$T_{i_1, \cdots, i_p}^{j_1, \cdots, j_q} \in K$

Исторически, тензоры определяли как набор коэфициентов, который меняется по определенному правилу, при замени базисе. То есть тензоры это некоторое обобщение вектора.

e_i' — базис V

$(e^i)'$ — базис V^*

Матрица перехода от базиса к базису: $e_j' = \sum (A_j^i) e_i$

$$\begin{pmatrix} A_j^1 \\ A_j^2 \\ \vdots \\ A_j^n \end{pmatrix}$$

— j-й столбец матрицы перехода от $\{e\}$ к $\{e'\}$

$$(e^j)' = \sum_i B_i^j e^i$$

Как связаны матрицы A, B.

$$(e^j)'(e_i') = (\sum_k B_k^j e^k)(\sum_l A_i^l e_l) = \sum_k B_k^j A_i^k = \sum_k A_i^k B_k^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$(A_i^k)(B_k^j) = E$$

Закон преобразования тензоров:

$$T = \sum T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1, \cdots, j_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \cdots \otimes e_{j_q}$$

$$T = \sum {T_{k_1, \cdots, k_p}^{l_1, \cdots, l_q}}' {e^{k_1}}' \otimes \cdots \otimes {e^{k_p}}' \otimes {e_{l_1}}' \cdots \otimes {e_{l_q}}' =$$

$$= \sum_{k,l} T'^{l_1, \cdots, l_q}_{k_1, \cdots, k_p}((\sum_{i_1} B_{i_1}^{k_1} e^{i_1}) \otimes \cdots \otimes (\sum A_{l_q}^j e_{j_q}))$$

$$= \sum_{i, \cdots, i_p, j, \cdots, j_n} (\sum_{k_1, \cdots, k_p, l_1, \cdots, l_p} T'_{k_1, \cdots, k_p, l_1, \cdots, l_n} B_{i_1}^{k_1} \cdots B_{i_p}^{k_p} A_{l_1}^{j_1} \cdots A_{l_q}^{j_q}) e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}$$

$\Rightarrow T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1, \cdots, j_q} = \sum_{k_1, \cdots, k_p, l_1, \cdots, l_p} T'_{k_1, \cdots, k_p, l_1, \cdots, l_n} B_{i_1}^{k_1} \cdots B_{i_p}^{k_p} A_{l_1}^{j_1} \cdots A_{l_q}^{j_q}$

2.10.1. Свертка тензоров

Хотим построить линейное отображение. $T_p^q(V) \to T_{p-1}^{q-1}(V), p, q \geqslant 1$

Если тензор задан в классическом виде, то нам просто нужно задать координаты. $T_{i_1, \cdots, i_p}^{j_1, \cdots, j_q}$ Фиксируем i_k, j_l

𝔇𝔢𝔣 2.10.1. $T_{i_1, \cdots, i_{k-1}, i_{k+1}, \cdots, i_p}^{j_1, \cdots, \widetilde{j_{l-1}, j_{l+1}}, \cdots, j_q} = \sum_{i=1}^n T_{i_1, \cdots, i_{k-1}, i, i_{k+1}, \cdots, i_p}^{j_1 \cdots, j_{l-1}, i, \cdots, j_q}$ свертка тензора по паре индексов i_k, j_l $n = \dim V$

Пример 2.10.1.

1. $T \in T_1^1$ $\widetilde{T} = \sum_i T_i^i = tr(T)$
2. $T, S \in T_1^1(V)$ $A = T \otimes S \in T_2^2$ $A_{ik}^{jl} = T_i^j S_k^l$ Свертка по j и k: $\sum_{r=1}^n T_i^r S_r^l \in T_1^1(V)$ Произведение матриц T и S.

Глава 3

Теория групп (продолжение)

3.1. Вступление

𝔇𝔢𝔣 3.1.1.
G — группа, $\emptyset \neq A, B \subset G$. Произведение по Минковскому:

$$A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

𝔇𝔢𝔣 3.1.2.
Если $A = \{a\}$, будем писать aB или Ba вместо $\{a\}B$, $B\{a\}$.
В частности, если $B \leqslant G$,
aB — левый класс смежности по B,
Ba — правый класс смежности по B.

Следствие 3.1.0.1.

1. $(AB)C = A(BC) = \{abc \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$

2. Если $H \leqslant G$, то $H \cdot H = H$:
   $H \cdot H \leqslant H$ (замкнуто относительно умножения),
   $H = 1 \cdot H \leqslant H \cdot H$.

𝔇𝔢𝔣 3.1.3. $\emptyset \neq A \leqslant G$.
$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$
Если $H \leqslant G \Rightarrow H^{-1} = H$.

Замечание 3.1.1. Чаще всего будем использвать мультипликативную запись. Нейтральный элемент G — $1_G = 1$. Если будет встречаться аддитивная запись, то нейтральный элемент — 0.

𝔇𝔢𝔣 3.1.4. G, G_1 — группы. $\varphi\colon G \to G_1$ называется гомоморфизмом групп, если

$$\forall a, b \in G, \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

В частности $\varphi(1_G) = 1_{G_1}, \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

𝔇𝔢𝔣 3.1.5. Изоморфизм $\varphi\colon G \to G_1$ — это биекция и гомоморфизм.

3.2. Нормальные подгруппы

Теорема 3.2.1. Пусть $H \leqslant G$, тогда следующие условия равносильны:

1. $\forall g \in G\colon gHg^{-1} \leqslant H$
2. $\forall g \in G\colon gHg^{-1} = H$
3. $\forall g \in G\colon gH = Hg$

▶ **$2 \Rightarrow 1$:** Очевидно.

$1 \Rightarrow 2$: В силу произвольности g:

$$gHg^{-1} \leqslant H$$
$$g^{-1}Hg \leqslant H \Rightarrow H \leqslant gHg^{-1} \Rightarrow H = gHg^{-1}$$

$2 \Rightarrow 3$: Домножаем $gHg^{-1} = H$ на g справа.

$3 \Rightarrow 2$: Домножаем $gH = Hg$ домножаем на g^{-1} слева.

◀

𝔇𝔢𝔣 3.2.1. Подгруппа $H \leqslant G$, удовлетворяющий любому из свойств, перечисленных в теореме 1, называется нормальной подгруппой. Обозначение: $H \trianglelefteq G$.

Следствие 3.2.1.1. Если $H \trianglelefteq G$, то левые классы смежности по H совпадают с правыми классами смежности.

Пример 3.2.1.

1. $\{1\} \trianglelefteq G$, $G \trianglelefteq G$:
$$g\{1\} = \{g\} = \{1\}g$$

2. $G = S_3$:
$$\langle(123)\rangle \trianglelefteq S_3$$
$$\langle(12)\rangle \ntrianglelefteq S_3$$

3. $$SL(n, K) \trianglelefteq GL(n, K)$$
$GL(n, K)$ — все обратимые матрицы $n \times n$ над K, $SL(n, K) = \{g \in GL(n, K) \mid \det g = 1\}$.

4. $$[G : H] = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$$
$[G : H]$ — индекс подгруппы H в G.
индекс подгруппы — количество классов смежности.
Классов смежности два, H и $G \setminus H$:
$$G = \bigcup gH$$
   - Если $g \in H$, то $gH = H = Hg$.
   - Если $g \neq H$, то $gH = G \setminus H = Hg$.

$$g_1H = g_2H \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H$$
Возьмите $g_2 = 1$:
$$g_1H = H \Leftrightarrow g_1 \in H$$

𝔇𝔢𝔣 3.2.2.

$$\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{1_{G_1}\}) = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1_{G_1}\}$$

Теорема 3.2.2. Пусть $\varphi\colon G \to G_1$, φ — гомоморфизм, тогда $\ker\varphi \trianglelefteq G$.

▶ $\ker\varphi \leqslant G$ — упражнение.
$g \in G$, $h \in \ker\varphi$. Покажем, что $ghg^{-1} \in \ker\varphi$:

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)1_{G_1}\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(1) = 1_{G_1}$$

◀

Пример 3.2.2.

1. $A_n \trianglelefteq S_n$ — группа чётных перестановок.

$$\varphi\colon S_n \to \{\pm 1\} \quad \varphi(\sigma) = (-1)^{\#\sigma}$$

Ядро — это чётные перестановки.

$$\ker\varphi = A_n$$

2.

$$\varphi\colon GL(n,K) \to K^* \quad \varphi(g) = \det g$$
$$\ker\varphi = SL(n,K) \trianglelefteq GL(n,K)$$

K^* — обратимые элементы, то естьв данном случае K без 0.

Лемма 3.2.1. $\varphi\colon G \to G_1$ — гомоморфизм.
Если $H = \ker\varphi$, то смежные классы по H — это в точности $\varphi^{-1}(\{b\})$, где $b \in \varphi(G)$.
Другими словами,$\forall g \in G\colon gH = \{\varphi^{-1}(\varphi(g))\}$

▶ Покажем, что $gH = \varphi^{-1}(\{\varphi(g)\})$ $(b = \varphi(g))$:

$\subset$:

$g_1 \in gH$, $g_1 = gh$:

$$\varphi(g_1) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g) \Rightarrow g_1 \in \varphi^{-1}(\{\varphi(g)\})$$

$\supset$:

$g_1 \in \varphi^{-1}(\{\varphi(g)\})$:

$$\varphi(g_1) = \varphi(g)$$
$$\varphi(g^{-1}g_1) = 1 \Rightarrow g^{-1}g_1 \in \ker\varphi = H$$
$$g_1 = gg^{-1}g_1 \in gH$$

◀

3.3. Факторгруппы

$G, H \trianglelefteq G$. X — множество (левых) смежных классов по H. Определим операцию умножения.

$$g_1Hg_2H = g_1g_2H$$

Теорема 3.3.1. Множество X с так введенной операцией является группой.

▶ **Шаг 1: Корректность.** Пусть $g_1H = g_1'H, g_2H = g_2'H$ Нужно проверить, что $g_1g_2H = g_1'g_2'H$.

$$(g_1g_2)^{-1}g_1'g_2' \in H$$
$$(g_1g_2)^{-1}g_1'g_2' = g_2^{-1}g_1^{-1}g_1'g_2' = \underbrace{g_2^{-1}g_2'}_{\in H} \underbrace{(g_2')^{-1} \underbrace{g_1^{-1}g_1'}_{\in H} g_2'}_{\in H, H \trianglelefteq G} \in H$$

Шаг 2: Проверим ассоциативность. Еще одна интерпритация умножения:

$$g_1Hg_2H = g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H = g_1g_2(HH) = g_1g_2H$$

Ассоциативность умножения в X следует из ассоциативности умножения по Минковскому.

Шаг 3: Нейтральный элемент.

$$1_X = H = 1_GH$$
$$HgH = gHH = gH$$
$$gHH = gH$$

Шаг 4: Для любого смежного класса найдется обратный.

$$(gH)^{-1} = g^{-1}H$$
$$gHg^{-1}H = gg^{-1}HH = 1H = H$$
$$g^{-1}HgH = g^{-1}gHH = 1H = H$$

◀

𝔇𝔢𝔣 3.3.1. Группа, построенная в предыдущей теореме называется факторгруппой G по нормальной подгруппе H. Обозначение: G/H.

Теорема 3.3.2. G — группа, $H \trianglelefteq G$,
$\varphi\colon G \to G/H$,
$\varphi(g) = gH$.
Тогда φ сюръективный гомоморфизм групп и $\ker\varphi = H$.

▶ **Гомоморфизм:**

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2) = g_1Hg_2H = g_1g_2H = \varphi(g_1g_2)$$

Сюръективность

очевидна.

Проверяем $\ker\varphi = H$.

$\supset$**:**

$h \in H$

$$\varphi(h) = hH = H = 1_{G/H} \Rightarrow H \subset \ker\varphi$$

$\subset$**:**

$h \in \ker\varphi$

$$hH = \varphi(h) = 1_{G/H} = H$$
$$\Rightarrow h \cdot 1 \in H \Rightarrow h \in H$$
$$\Rightarrow \ker\varphi \subset H$$

◀

Следствие 3.3.2.1. Нормальные подгруппы — это в точности ядра гомоморфизмов.

3.4. Первая теорема о гомоморфизме

Теорема 3.4.1. $\psi\colon G \to G_1$ — гомомрфизм, $H = \ker\psi$
Тогда $G/H \cong \psi(G)$

▶ $\psi(G)$— подгруппа в G_1 (группа)
$\psi(G) \leqslant G_1$
$\varphi(G) = G/H$ (тут φ — эпиморфизм, задающий G/H, $\varphi(g) = gH$)
Хотим построить изоморфизм $\sigma\colon \psi(G) \to G/H$

Зададим на элементе b: $b \in \psi(G) \Rightarrow \exists g \in G, \psi(g) = b$
$\sigma(b) = \varphi(g) = gH$

Корректность

$g_1, g_2 \in \psi^{-1}(\{b\})$
$\psi(g_1) = \psi(g_2) \Rightarrow \psi(g_2^{-1}g_1) = 1_{G_1}$
$g_2^{-1}g_1 \in \ker\psi = H$
$\Rightarrow g_1H = g_2H \Rightarrow \sigma$ не зависит от выбора конкретного элемента в $\psi^{-1}(\{b\})$

σ — **гомоморфизм**

$b_1, b_2 \in \psi(G)$
$b_i = \psi(g_i), i = 1, 2$
$b_1b_2 = \psi(g_1)\psi(g_2) = \psi(g_1g_2)$
$\sigma(b_1b_2) = g_1g_2H$
$\sigma(b_1)\sigma(b_2) = g_1Hg_2H = g_1g_2HH = g_1g_2H$
$\Rightarrow \sigma(b_1b_2) = \sigma(b_1)\sigma(b_2)$

σ — **сюръективно**

$gH = \sigma(\psi(g))$

σ— **инъективно**

$b_1, b_2 \in \psi(G), \sigma(b_1) = \sigma(b_2)$
$b_1 = \psi(g_1), b_2 = \psi(g_2)$
$\sigma(b_1) = g_1H$
$\sigma(b_2) = g_2H$
$\Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in H = \ker\psi$
$\psi(g_2^{-1}g_1 = 1) \Rightarrow \psi(g_2) = \psi(g_1) \Rightarrow b_2 = b_1$

◀

Замечание 3.4.1. $\sigma(\psi(g)) = Gh = \varphi(g)$
$\sigma \circ \psi = \varphi$

Пример 3.4.1.

1. $(\mathbb{R}, +)$
   $(\mathbb{Z}, +)$
   $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
   $\psi\colon \mathbb{R} \to S$

$x \to e^{2\pi ix} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$
$\psi(\mathbb{R}) = S$
$\ker\psi = \mathbb{Z}$
$S = \psi(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}/\ker\psi = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

2. $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
   $U_n = \{z \in S \mid z^n = 1\} = \{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \mid k = 0, \cdots, n-1\}$
   $S/U_n \cong S$
   $\psi\colon S \to S$
   $z \to z^n$
   $\psi(S) = S$
   $\ker\psi = U_n$
   $S = \psi(S) \cong S/\ker\psi = S/U_n$

3. $SL_2(\mathbb{Z}), SL_n(\mathbb{Z})$
   $n \geqslant 5$ Какая из двух групп больше? С одной стороны можем всегда SL_2 вложить в SL_n.
   $\varphi\colon SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{Z})$
   При $n \geqslant 5 \exists H \trianglelefteq SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Z})/\mathbb{H} \cong SL_n(\mathbb{Z})$

3.5. Произведение подгрупп

Теорема 3.5.1. $A, B \leqslant G$. Следующие условия равносильны.

1. $AB \leqslant G$

2. $AB = BA$
   $\{ab \mid a \in A, b \in B\} = \{b_1a_1 \mid b_1 \in B, a_1 \in A\}$

Замечание 3.5.1. $AB = BA$ не влечет, что A и B коммутируют по элементам.

▶ $2 \Rightarrow 1$ $(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = AB$
AB замкнуто относительно умножения
$x \in AB, x = ab, a \in A, b \in B$
$x^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$
$\Rightarrow x^{-1} \in AB$
AB замкнуто относительно взятия обратных.
$AB \neq 0$
$1 = 1 \cdot 1 \in AB$

$1 \Rightarrow 2$ **Первое включение:** показываем, что
$BA \subset AB, b \in B, a \in A$
$ba = (a^{-1}b^{-1})^{-1}$
$a^{-1}b^{-1} \in AB \Rightarrow (a^{-1}b^{-1}) \in AB \Rightarrow ba \in AB$

Второе включение: показываем, что
$AB \subset BA$
Знаем $(BA) \subset AB$

$(BA)^{-1} \subset (AB)^{-1}$
$AB = A^{-1}B^{-1} \subset B^{-1}A^{-1} = BA$
$\Rightarrow AB = BA$

$(BA)^{-1} = \{g = (ba)^{-1} \mid b \in B, a \in A\}$
$(AB)^{-1} = \{g = (ab)^{-1} \mid a \in A, b \in B\}$

◀

Следствие 3.5.1.1. G — группа, $A \trianglelefteq G, B \leqslant G \Rightarrow AB \leqslant G$

▶ $\forall g \in G\colon gA = Ag$
$\Rightarrow \forall b \in B\colon bA = Ab$

$BA = \cup_b bA$
$AB = \cup_b Ab$
$\Rightarrow BA = AB$ по теореме $AB \leqslant G$
◀

3.6. Вторая теорема о гомоморфизме

G — группа, $H \trianglelefteq G, K \leqslant G$
$HK = KH \leqslant G$
$H = H \cdot 1 = 1 \cdot H \leqslant HK, \leqslant KH$

$H \leqslant HK \leqslant G$
$\forall g \in G, gHg^{-1} \in H$
$\forall g \in HK, gHg^{-1} = H$
$H \trianglelefteq KH$

Теорема 3.6.1. $H \trianglelefteq G, K \leqslant G \Rightarrow H \trianglelefteq KH$ и $KH/H \cong K/(K \cap H)$

▶ $\psi\colon K \to KH/H$
$\psi(k) = kH$
$\psi(k_1)\psi(k_2) = k_1Hk_2H = k_1k_2H = \psi(k_1k_2)$

Класс смежности в KH по H.
$khH = k(hH) = kH$
$khH = \psi(k), \psi$ — сюръективный гомоморфизм.

$k \in \ker\psi$
$\psi(k) = 1_{KH/H} = H$
$kH = H \Rightarrow k \in H$
$k \in K$
$\Rightarrow k \in K \cap H$

$\ker\psi \subset K \cap H$
$K \cap H, \psi(k) = kH = H1 \Rightarrow k \in \ker\psi$

$\Rightarrow k \cap H \subset \ker \psi$
$\ker \psi = K \cap H$

$K/(K \cap H) = K/\ker \psi \cong \psi(K) = KH/H$ ◀

3.7. Третья теорема о гомоморфизме

Теорема 3.7.1. $\psi_1 \colon G \twoheadrightarrow G_1$
$\psi_2 \colon G \twoheadrightarrow G_2$
ψ_1, ψ_2 — эпиморфизмы (гомоморфизм и сюръекция)
$\ker \psi_1 \subset \ker \psi_2$
Тогда существует $\sigma \colon G_1 \twoheadrightarrow G_2$, такое, что $\sigma \circ \psi_1 = \psi_2$

▶ $b \in G_1, \exists g \colon \psi_1(g) = b$
$\sigma(b) = \psi_2(g)$

1. Корректность.
   Пусть $g, g_1 \colon \psi_1(g) = \psi(g_1) = b$
   $\psi_1(g_1^{-1}g) = b^{-1}b = 1_G$
   $g_1^{-1}g \in \ker \psi_1 \subset \ker \psi_2$
   $\psi_2(g_1^{-1}g) = 1_G \Rightarrow \psi_2(g) = \psi_2(g_1)$

   $\psi_2(g) = \sigma(\psi_1(g)) = \psi_2(g)$
   для всех $g \in G_1$
   $\sigma \circ \psi_1 = \psi_2$
   ψ_2 — сюръективный $\Rightarrow \sigma$ — сюръективный

   σ — гомоморфизм
   $b_1 = \psi_1(g_1)$
   $b_2 = \psi_1(g_2)$
   $b_1 b_2 = \psi_1(g_1 g_2)$

   $\sigma(b_1) = \psi_2(g_1), \sigma(b_2) = \psi_2(g_2)$
   $\sigma(b_1)\sigma(b_2) = \psi_2(g_1)\psi_2(g_2) = \psi_2(g_1 g_2) = \sigma(b1b2)$

◀

Замечание 3.7.1.
Пусть $K \leqslant G$ и $H \trianglelefteq K$, $H \trianglelefteq G$. Тогда если взять фактор по H, то первое неравенство не нарушится, то есть:

$$K/H \leqslant G/H$$

Теорема 3.7.2. $G, H_1 \trianglelefteq G, H_2 \trianglelefteq G$
$H_1 \leqslant H_2$
$G/H_1, H_2/H_1$
H_2/H_1 — нормальная в G/H_1
$(G/H_1)/(H_2/H_1) \cong G/H_2$

▶ $\varphi_1\colon G \to G/H_1$
$\varphi_2\colon G \to G/H_2$
$\ker\varphi_1 = H_1$
$\ker\varphi_2 = H_2$
$\ker\varphi_1 \subset \ker\varphi_2$
$\exists\sigma\colon G/H_1 \to G/H_2$(по третей теореме о гомоморфизме) $\sigma\circ\varphi_1 = \varphi_2$
$\sigma(gH_1) = 1_{G/H_2}$
$gH_2 = \sigma(gH_1) = H_2 \Rightarrow g \in H_2$

$gH_1 \in \ker\sigma \Rightarrow g \in H_2$
$gH_1 \in H_2/H_1$
$\ker\sigma \subset H_2/H_1$

$g \in H_2, gH_1$
$\sigma(gH_1) = \varphi_2(g) = gH_2 = H_2 = 1_{G/H_2}$
gH_1, где $g \in H_2$, лежит в $\ker\sigma$
$H_2/H_1 \subset \ker\sigma$
$H_2/H_1 = \ker\sigma$

По первой теореме о гомоморфизме $G/H_2 = \sigma(G/H_1) \cong (G/H_1)/\ker\sigma = (G/H_1)/(H_2/H_1)$

◀

3.8. Внешнее прямое произведение

$H_1, \cdots, H_n$ — группы.
$G = H_1\times\cdots\times H_n$ (как множество). Зададим умножение на G. $(h_1, \cdots, h_n)(g_1, \cdots, g_n) = (h_1g_1, h_2g_2, \cdots, h_ng_n)$
Упражнение G с такой операцией — это группа. $1_G = (1_{H_1}, \cdots, 1_{H_n})$
$(h_1, \cdots, h_n)^{-1} = (h_1^{-1}, \cdots, h_n^{-1})$

𝔇𝔢𝔣 3.8.1. G с так введенной операцией называется прямым произведением групп $H_1, \cdots, H_n$
$H_1 \times \cdots \times H_n$
$\sigma\colon H_i \to G$
$h_i \to (1, \cdots, h, \cdots, 1)$
σ — инъективный гомоморфизм из H_i в G
$\widetilde{H_i} = \sigma_i(H_i) = (1, \cdot, H_i, 1, \cdots, 1)$

Следствие 3.8.0.1.

1. $i \neq j \Rightarrow \widetilde{H_i}, \widetilde{H_j}$ коммутируют поэлементно

   ▶ $(1, \cdots, h_i, 1, \cdots)(1, \cdots, h_j, \cdots, 1) = (1, \cdots, h_i, 1 \cdots, h_j, \cdots, 1)$
   $(1, \cdots, h_j, 1, \cdots)(1, \cdots, h_i, \cdots, 1) = (1, \cdots, h_i, 1 \cdots, h_j, \cdots, 1)$

   В частности, раз они коммутируют поэлментно, то $\widetilde{H_i}\widetilde{H_j} = \widetilde{H_j}\widetilde{H_i}$ ◀

2. $\widetilde{H_i} \trianglelefteq G$

▶ $g \in G$
$g = (h_1, \cdots, h_n)$
$f \in \widetilde{H_i}$
$f = (1, \cdots, f_i, \cdots, 1) \in \widetilde{H_i}$
$gfg^{-1} = (h_1 1 h_1^{-1}, \cdots, h_i f_i h_i^{-1}, \cdots, h_n 1 h_n^{-1}) = (1, \cdots, h_i f_i h_i^{-1}, \cdots, 1)$
$h_i f_i h_i^{-1} \in H_i$
Это доказывает нормальность. ◀

3. $\widetilde{H_i} \cap (\widetilde{H_1} \cdots \widetilde{H_{i-1}} \widetilde{H_{i+1}} \cdots \widetilde{H_n}) = \{1_G\}$

▶ $g = (1, \cdots, h_i, 1, \cdots, 1) \in \widetilde{H_i}$
$g = (h_1, \cdots, h_{i-1}, 1, \cdots, h_n) \in (\widetilde{H_1} \cdots \widetilde{H_{i-1}} \widetilde{H_{i+1}} \cdots \widetilde{H_n})$
Если g попал в обе группы, то это возможно только, когда $h_i = 1_H$, то есть пересечение тривиально. ◀

Замечание 3.8.1. Справедлив следующий результат. $G, H_1, \cdots, H_n \leqslant G$
Причем

1. $\forall i \neq j H_i$ и H_j поэлментно коммутируют.
2. $\forall i \colon H_i \trianglelefteq G$
3. $\forall i \colon H_i \cap (H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n) = \{1_G\}$
4. $H_1 \cdots H_n = G$

Тогда $G \cong H_1 \times \cdots \times H_n$

Упражнение на практику.

Пример 3.8.1. Пример использования замечания.
Рассмотрим цикличискую группу $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^+$ порядка 6. $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$
$H_1 = \{\bar{0}, \bar{3}\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^+$
$H_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^+$
Это сумма по Минковскому, так как H_1 и H_2 подгруппы G и операция была записана аддетивно.
$G = H_1 + H_2$
$\Rightarrow (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^+ \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^+ \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^+$

Более того, можем обобщить для любых взаимно простых n и m
$(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^+ \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^+ \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^+$

3.9. Действия групп на множествах

G — группа, X — множество.

𝔇𝔢𝔣 3.9.1. G действует на X если задано отображение $\cdot \colon G \times X \to X$
со следующими свойствами:

1. аналог ассоциотивности $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X \colon g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$
   Умножения разные в $g_1 g_2$.
2. $\forall x \in X \colon 1_G x = x$

Пример 3.9.1.

1. $G = GL_n(K), X = K^n$ действие групп матриц на вектор.
2. S_n — перестановка действует на $\{1, 2, \cdots, n\}$

𝔇𝔢𝔣 3.9.2. G действует на X, то X называют G-оператором множества(левым G-оператором множества)

$G \times X \to X$
Фиксируем g $\varphi_g \colon X \to X$
$\varphi_g(x) = gx$

$Sym(X)$ — множество всех биекций на X(группа относительно композиций)

Лемма 3.9.1.

1. В этих обозначениях $\varphi_g \in Sym(X)$.
2. $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$

▶ 1. Что бы показать, что это биекция, нужно найти обратное отображение. φ_g
По второму пункту $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_{gg^{-1}} = \varphi_{1_G} = id_X$
$1_G(x) = x$ по второму свойству определения действия
$\varphi_{g^{-1}}\varphi_g = id_x$
$\varphi_{g^{-1}} = (\varphi_g)^{-1}$
φ_g — обратимо, значит, биекция

2. Возьмем $x \in X$ хотим проверить что оба отображения на него действуют одинаково
$(\varphi_g \circ \varphi_h)(x) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = g(h(x)) = (gh)(x) = \varphi_{gh}(x)$

◀

Подведем итоги $\Phi \colon G \to Sym(X)$
$g \to \varphi_g$

$\Phi(g_1 g_2) = \varphi_{g1g2} = \varphi_{g_1}\varphi_{g_2} = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$
Φ — гомоморфизм из G в $Sym(X)$

И наоборот, всякий гомоморфизм $\Phi \colon G \to Sym(X)$ задает действие группы G на множество X
$G \times X \to X$
$gx = \Phi(g)(x)$

Докажем, что то, что мы определили действие: первое свойство:
$(gh)(x) = \Phi(gh)(x) = (\Phi(g)\Phi(h))(x) = \Phi(g)(\Phi(h)(x)) = ghx$
так как Φ — гомоморфизм
Второе свойство:
$\Phi(1_G) = 1_{Sym(X)} = id_X$
$1_G x = id_X(x) = x$

То есть мы можем смотреть на действие как на перестановку на множестве

$\mathfrak{Def}$ 3.9.3. Действие G на множестве x называется точным, если $\forall g \in G((\forall x \in X\colon gx = x) \Rightarrow g = 1_G)$
точность $\equiv \ker \Phi = \{1_G\}$
в частности $\Phi(G) \cong G$

$\mathfrak{Def}$ 3.9.4. Действие G на множестве X называется транзитивным, если $\forall x, x' \in X \exists g \in G\colon gx = x'$

$\mathfrak{Def}$ 3.9.5. Пусть $a \in X$, тогда орбитой a называется множество $Ga = \{ga \mid g \in G\}$

НА орбиты можно смотреть с двух сторон На X введем $\sim$
$x \sim x'$ если $\exists g \in G\colon gx = x'$

$\sim$ — отношение эквивалентности

▶ $x \sim x, 1x = x$
$x \sim x' \Rightarrow x' \sim x$
$\exists g\colon gx = x'$
$g^{-1}x' = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = 1x = x$

$x \sim x', x' \sim x''$
$\exists g$ и g':
$x' = gx$
$x'' = g'x'$
$\Rightarrow x'' = g'gx \Rightarrow x'' \sim x$
◀

$\sim$ отношение эквивалентности
Рассмотрим множества классов эквивалентности $X/\sim = X/G$
$a \in X$
$[a] = \{x \mid x \sim a\} = \{x \mid \exists g\colon x = ga\} = Ga$

Таким образом второе определение орбиты это классы эквивалентности X/G. Будем обозначать множество всех орбит как X/G.

Можем предстваить X как $\cup_{A \in X/G} A$ — объединение орбит
$A = Ga$ — орбита

Рассмотрим сужение действия на орбиту $G \times A \to A$

Такое сужение задает действие G на A. Почему это будет действие?

1. первая при сужение сохраняется
2. ...

Или что то же самое, орбита сама является G-операторным множеством.

При сужение на орбиту действие всегда становится транзитивным, поэтому ими удобно пользоваться.

$\mathfrak{Def}$ 3.9.6. G действует на X, $a \in X$
Стабилизатор a $\mathrm{St}_a = \{g \in G \mid ga = a\}$

Лемма 3.9.2. $\mathrm{St}_a \leqslant G$

▶ Докажем, что St_a является подгруппой

1. $1_G \in \mathrm{St}_a$ то есть множество не пусто.
2. Коммутирует $g_1 a = a, g_2 a = a$
   $(g_1 g_2)a = g_1(g_2(a)) = g_1 a = a \Rightarrow g_1 g_2 \in \mathrm{St}_a$
3. обратоные элемент $ga = a$
   $g^{-1}a = g^{-1}(ga) = (g^{-1}g)a = 1a = a \Rightarrow g^{-1} \in \mathrm{St}_a$

◀

Пример 3.9.2.

1. $GL_n(K)$ на K^n точное только единичная матрица сохраняет все множетсво, не транзитивное
   $A_1 = \{0\}$
   $A_2 = K^n \setminus \{0\}$

   Докажем, что A_2 орбита. $0 \neq x \in K^n, 0 \neq x' \in K^n$
   Дополним x до базиса K^n
   Дополним x' до другого базиса K^n
   $\exists g \in GL_n(K)$ которая первый базис переводит во второй В частности $gx = x'$

2. $G = GL_n(K)$
   $X = M_n(K)$
   $G \times X \to X$
   $g \cdot m \to gmg^{-1}$ — действие
   Докажем, что выполнены аксиомы действия
   $(gh)m = ghm(gh)^{-1} = g(hmh^{-1})g^{-1} = g(hm)$
   $1m = m$

   Рассмотрим, является ли это действие точным Для каких g $gmg^{-1} = m$ для всех m, то есть $\forall m gm = mg$
   то есть g коммутирует с любой матрицей, значит g имеет вид $g = \lambda E, \lambda \in K^*$
   И всякая матрица такого вида действует сопряжением тождественно

   Итог: это действие $GL_n(K)$ — точное $\Leftrightarrow K^* = \{1\} \Leftrightarrow K = F_2$

3. G — группа
   $H \leqslant G$ — подгруппа
   Рассмотрим множество левых классов $X = \{gH\}$
   $G \times X \to X$
   $fgH \to (fg)H$
   Упражнение: проверить две аксиомы действия и корректность.

   Проверяем, что действие будет транзитивным, то есть что $(g'g^{-1})gH = g'H$ действие транзитивно.

   ToDo

4. Частный случай предыдущего: есть G, пусть $H = \{1_G\}$ и $X = G$. Каждый элемент задает свой класс смежности. То есть действие задается как $G \times G \to G$

Проверим точность $\forall hgh = h$(возьмем $h = 1_G$, получаем, что $g = 1_G$)
$\Rightarrow$ действие точное

Следствие 3.9.0.2. Всякая конечная группа изоморфна некотрой подгруппе группы перестановок.

$|G| < \infty$
$\varPhi\colon G \to Sym(G) \cong S_{|G|}$
$S_{|G|}$ — перестановка. Так как действие точно, $\varPhi(G) \cong G$
$\varPhi(G) \leqslant Sym(G) \cong S_{|G|}$

Исследование подгрупп групп можно свести к иследованию подгрупп перестановок.

Замечание 3.9.1. В одну орбиту входят матрицы с одинаковой жардановой формой

5. G — группа, $X = G$

   Действие сопряжением: $G \times G \to G$
   $g \cdot h = ghg^{-1}$
   Когда такое действие точное: $g\colon g\forall h\colon ghg^{-1} = h$
   $\forall h\colon gh = hg$
   $\{g \mid \forall hgh = hg\}$ — центр группы G обозначается $Z(G)$.

   Действие точное $\Leftrightarrow Z(G) = \{1_G\}$.

   Будет ли это действие транзитивным?

   У нас есть единичный элемент, значит если в центр группы входит что-то еще (то есть $|G| > 1$ то есть больше одной орбиты), то действие не транзитивно, так как есть орбита из $\{1_G\}$

   Орбита в этом действие называется классами сопряженности.

   Например, в S_n кассы сопряженности состоят из перестановое с одинм цикловым типом.

6. Рассмотрим единичный куб и рассмотрим две группы G — группа изометрий $\mathbb{R}^3$ переводящая куб в себя.(группа самосовмещения куба). $H \leqslant G$ подгруппа собственных(то есть сохраняющих ориентацию) самосовмещений куба.

   G и H действует на вершинах куба. $G \to S_8$.

   На гранях $G \to S_6$
   на ребра $G \to S_{12}$
   На диагоналях $G \to S_4$

   Аналогично для H.

   Упражнения. Какие из указанных действий для G (для H) транзитивные, какие точные.

3.10. Теорема об орбитах и стабилизаторах

Напоминание, когда G действует на X, мы говорили, что X — G-операторное множество

𝔇𝔢𝔣 3.10.1. G — группа, X, X' — два G-операторных множества.
X изоморфно X' как G-операторное множество, если существует биекция $\psi\colon X \to X'$, такая что $\forall g \in G, \forall x \in X\colon \psi(gx) = g\psi(x)$

Группа G действует на множество X, тогда множество X распадается на орбиты и в прошлый раз мы выяснили, что что бы изучить действие группы на множестве достаточно изучить действия грууппы на орбиты.

Теорема 3.10.1. Орбита Ga, как G-операторное множество изоморфна множеству левых классов смежности группы G на подгруппе St_a

▶ $\operatorname{St}_a = \{g \in G \mid ga = a\}$
Ga орбита точки из X
$X' = \{g \operatorname{St}_a \mid g \in G\}$ — множество смежных классов по подгруппе стабилизатора.
$\psi \colon Ga \to X'$
$ga \to g \operatorname{St}_a$

Корректность: Нужно проверить, что если $g_1 a = g_2 a$, то результат отображения будет один и тот же.
$g_1 a = g_2 a \Rightarrow g_2^{-1} g_1 a = a \Rightarrow g_2^{-1} g_1 \in \operatorname{St}_a$
$\Rightarrow g_2^{-1} g_1 \operatorname{St}_a = \operatorname{St}_a \Rightarrow g_1 \operatorname{St}_a = g_2 \operatorname{St}_a$

Инъективность: $\psi(g_1 a) = \psi(g_2 a)$
$g_1 \operatorname{St}_a = g_2 \operatorname{St}_a$
$g_2^{-1} g_1 \operatorname{St}_a = \operatorname{St}_a$
$g_2^{-1} g_1 \in \operatorname{St}_a$
$g_2^{-1} g_1 a = a$
$g_1 a = g_2 a$
Мы взяли два элемента орбиты и предположили, что ψ переводит их в один и тот же класс и из этого сделали вывод, что это один и тот же элемент.

Сюръективность: Класс $g \operatorname{St}_a$ есть $\psi(ga)$

Гомоморфизм: $h \in G$, $ga \in Ga$
Хотим проверить, что $\psi(hga) = h\psi(ga)$
$\psi(hga) = \psi((hg)a) = hg \operatorname{St}_a = h(g \operatorname{St}_a) = h\psi(ga)$

◀

Следствие 3.10.1.1. (Orbit Stabilizer theorem)
G конечная группа и как группа действует на X
$|Ga| = \frac{|G|}{|\operatorname{St}_a|}$
$|Ga| |\operatorname{St}_a| = |G|$

▶ Ga и множество левых смежных классов на St_a изоморфно, как G-оператор множества.
$|Ga|$ = число левых классов смежности на St_a = по определению индекс подгруппы = $[G \colon \operatorname{St}_a] = \frac{|G|}{|\operatorname{St}_a|}$ по теореме Лагранжа. ◀

Замечание 3.10.1. для бесконечных G
$|Ga| = [G \colon \operatorname{St}_a]$

Следствие 3.10.1.2. $|\operatorname{St}_a|$ делит $|G|$
$|Ga|$ делит $|G|$

Пример 3.10.1. G — группа самосовмещений куба и H — подгруппа собственных самосовмещений куба(сохраняющие ориентацию).
Рассмотрим действие на множестве вершин.
x — вершина куба.
G и H действуют транзитивно на множестве вершин.
То есть каждую наперед заданую вершину можем перевести в другую наперед заданую вершину.
По теореме о стабилизаторах $|G| = |Gx||\operatorname{St}_x|$
Длина орбиты из-за транзитивности действия это 8 ($|Gx| = 8$)
St_x — стабилизатор в G. Мы зафиксировали одну вершину и она неподвижна, тогда St_x действует на множестве смежных с ней вершинах (a, b, c)
$|\operatorname{St}_x^G| = |\operatorname{St}_x^G a||\operatorname{St}_{x,a}^G|$
$|\operatorname{St}_x a| = 3$ — размер орбиты вершины а в группе стабилизатора x
$\operatorname{St}_{x,a}^G$(фиксируем одновременно точки x и a) действует транзитивно на $\{b, c\}$
$|\operatorname{St}_{x,a}^G| = |\operatorname{St}_{x,a}^G \cdot b||\operatorname{St}_{x,a,b}| = 2$
$G = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$
Что изменится если мы группу G заменим на группу H? $H = |Hx||\operatorname{St}_x^H| = |Hx||\operatorname{St}_x^H \cdot a||\operatorname{St}_{x,a}^H| = 24$
$|\operatorname{St}_{x,a}^H| = 1$ не можем поменять местами последнее ребро в силу жесткости конструкции.

3.11. Центр p-группы

𝔇𝔢𝔣 3.11.1. G-группа
$Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga\colon \forall g \in G\}$ — центр группы.
В честности $Z(G) \trianglelefteq G(\forall a \in Z(G)\colon \forall g \in G, gag^{-1} = a)$

𝔇𝔢𝔣 3.11.2. p-простое число
Конечная группа G, порядок которой есть p^k называется p-группой $(k \in \mathbb{N})$

Пример 3.11.1.

1. $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ — циклическая группа порядка p^k, она абелева.

2. $\mathbb{Z}/(p^{k_1}\mathbb{Z}) \times \dots \times \mathbb{Z}/(p^{k_s}\mathbb{Z})$ тоже абелева p-группа (но не циклическая, если $s \geqslant 2$)

3. Подгруппу группы матриц над конечным полем, состоящую из верхних треугольных метриц с 1 на главной диагонали. Порядок этой группы $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ тоже p-группа, но уже не абелева, если $n \geqslant 3$.

Теорема 3.11.1. G — p-группа $\Rightarrow |Z(G)| > 1$

▶ Рассмотри действие G на G сопряжением.
$G \times G \to G$
$g, x \to gxg^{-1}$

Орбита x состоит из 1 элемента $\Leftrightarrow \forall g\; gxg^{-1} = x$
$\Leftrightarrow \forall g, gx = xg \Leftrightarrow x \in Z(G)$

Давай-те посчитаем порядок группы G двумя разными способами.
$p^k = |G| = \sum_{A-\text{класс сопряженности}} |A| = \sum_{|A|=1} |A| + \sum_{|A|>1} |A| = |Z(G)| + \sum_{|A|>1} |A|$

Класс сопряженности = орбита в действие G на G сопряжением.
$|A|||G|$
$|G| = p^k$
$|A| > 1$
$p||A|$
$|Z(G)| = p^k - \sum_{|A|>1} |A|$
$|Z(G)| \vdots p$
$1_G \in Z(G)$
$|Z(G)| > 0$
$\Rightarrow |Z(G)| > 1$
◀
Группа порядка p может быть только циклическая.
Можно показать, что группа $|G| = p^2$ абелева группа и тут возможно два варианта $G \cong \mathbb{Z}/(p^2\mathbb{Z})$ или $\mathbb{Z}/(pZ) \times (\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}))$

Для $|G| = p^3$ есть не абелевы p-группы.

3.12. Лемма Бернсайда

$\mathfrak{Def}$ 3.12.1.
G действует на X
$g \in G$
$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ — множеством неподвижных точек.

Теорема 3.12.1. (лемма Бернсайда)
X/G — множество орбит.
$|G| < \infty, |X| < \infty$, G действует на X.
$|X/G| = \frac{\sum_{g\in G} |X^g|}{|G|}$

▶ Посчитаем число стоящие в числителе двумя разными способами.
$\sum_{g\in G} |X^g| = \sum_{g\in G} \sum_{a\in X, \{(g,a)|ga=a\}} 1 =$
$= \sum_{a\in X} (\sum_{g\,:\,ga=a} 1) = \sum_{a\in X} |\operatorname{St}_a| = \sum_{a\in X} \frac{|G|}{|Ga|} =$
$= \sum_{A\in X/G} \sum_{a\in A} \frac{|G|}{|Ga|} = \sum_{A\in X/G} \sum_{a\in A} \frac{|G|}{|A|} = \sum_{A\in X/G} \frac{|G|}{|A|} \sum_{a\in A} 1 =$
$= \sum_{A\in X/G} \frac{|G|}{|A|} |A| = \sum_{A\in X/G} |G| = |G| \sum_{A\in X/G} 1 = |G||X/G|$

$|X/G| = \frac{\sum_{g\in G} |X^g|}{|G|}$
◀

Пример 3.12.1. Подсчет количества цветных ожерелий.
Сколько различных ожерелий можно составить из n бусин k цветов.
Различных с точностью до поворотов и отрожений.
$n = 6, k = 3$

X — n бусин, нумеруем и ставим по кругу, бусины раскрашены в k цветов.
$|X| = k^n$

D_{2n} — группа совмещений правильного n-угольника, диэдральная группа порядка 2n.
В одну орбиту попадают не различимые ожирелья, поэтому число ожерелий = число орбит в действие D_{2n} на X.

D_{12} действует на X
по лемме Бернсайда $|X/D_{12}| = \frac{\sum_{g\in D_{12}} |X^g|}{12}$

Давай-то посмотрем,какие бывают преобразования.

1. $g = id$
   $X^{id} = X$
   $|X^g| = 3^6$

2. Поворот на π нужно, что бы противоположные бусины имели одинаковый цвет. $|X^g| = 3^3$

3. Поворот на $\pm\frac{2\pi}{3}$ $|X^g| = 3^2$

4. Поворот на $\pm\frac{\pi}{3}, |X^g| = 3$

5. Теперь отражения. Два случая. Если через вершинку проходит ось симметрии. $|X^g| = 3^4$

6. Если для стороны, то $|X^g| = 3^3$

$|X/G| = \frac{3^6+3^3+2\cdot 3^2+2\cdot 3+3\cdot 3^4+3\cdot 3^3}{12} = 92$

3.13. Свободная группа

$A \neq 0$ — множество (алфавит).
$A = \{a_i\}_{i\in I}$
$\bar{A} \cap A = 0$
$\bar{A} = \{\bar{a_i}\}_{i\in I}$ биекция между A и $\bar{A}$
Каждой букве сопоставляем обратную $a_i \to \bar{a}_i$
Нащ алфавит это объединение двух частей $A \cup \bar{A}$
$W =$ множество всех слов в алфавите $A \cup \bar{A}$
(то есть множество конечных носителей букв из $A \cup \bar{A}$)
Λ — пустое слово.
На W задаем операцию умножения слов $w_1, w_2 \to w_1w_2$(конкатинация двух слов)
Ассоциативность $w_1(w_2w_3) = (w_1w_2)w_3$
Роль нейтрального элемента играет пустое слово $\Lambda w_1 = w_1 = w_1\Lambda$

Проблема, для создания группы нехватает обратных элементов. Поэтому вместо множетсва W рассмотрим некоторое фактор множество.

$\sim$: w_1 и w_2 эквивалентны, если одно из них можно получить из другого применением (возможно, неоднократного) операций следующего вида:

1. Операция вставки. В любое место можно вставить $a\bar{a}$ или $\bar{a}a$
   $w_1w_2 \sim w_1a\bar{a}w_2$
   $w_1w_2 \sim w_1\bar{a}aw_2$

2. Операция вычеркивания. Если в слове есть $a\bar{a}$ или $\bar{a}a$, то их можно вычеркнуть. $w_1a\bar{a}w_2 \sim w_1w_2$
$w_1\bar{a}aw_2 \sim w_1w_2$
То есть это обратное действие к вставке.

Упражнение: $\sim$ отношение эквивалентности.
Для доказательства рефликсивности вообще ничего не надо делать. Что бы доказать симметричность, надо проделать все операции в обратном порядке заменяя операции на противоположные. Транзитивность, тоже понятно. Просто нужно проделать две цепочки преобразований.
$W/\sim$ — множество классов эквивалентности.

Можно ввести умножение класов. $[w_1][w_2] = [w_1w_2]$

Теперь необходимо проверить, что введеная операция корректна, то есть не зависит от выбора представителя. $w_1 \sim u_1$
$w_2 \sim u_2$
$w_1w_2 \sim u_1u_2$
Если есть цепочка преобразований из w_1 в u_1, то можем ее проделать и после конкатинации. Так же со вторым, значит, после перемножения оказались в одном классе.
Умножение классов — ассоциативно.

После факторизации класс пустого слова будет нейтральным. $\Lambda w = w$
$[\Lambda w] = [w]$
$[\Lambda][w] = [w]$

Как быть с обратными?
Для букв введем обозначение: $a \in A$
$a^1 = a$
$a^{-1} = \bar{a}$
Тогда произвольное слово в нашем алфавите может быть записано как: $w = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}$
$\varepsilon_i = \pm 1$
Что логично предложить в качестве обратного элемента $[w]$?
$\bar{w} = \prod_{i=1}^{n} a_{n+1-i}^{-\varepsilon_i}$ — перевернем слово и заменим элементы на обратные.
$w\bar{w} = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \cdot a_1^{-\varepsilon_1} \sim a_1^{\varepsilon_1}a_1^{-\varepsilon_1} \sim \Lambda$
$[w][\bar{w}] = [\Lambda]$
$[\bar{w}][w] = [\Lambda]$

Таким образом множество классов эквивалентностей $W/\sim$ превратилась группу.
Эта группа обозначается F_A и называется свободная группа с алфавитом A. F от слова free group.

Пример 3.13.1. $A = \{a\}$
a, $\bar{a}$
Классы эквивалентности $[\Lambda], [a]^n, [\bar{a}]^n = [a]^{-n}$
$F_{\{a\}} \cong (\mathbb{Z}, +)$

С целым классом работать сложно, класс большой. Нам удобнее выбрать в каждом классе какого-нибудь канонического представителя.

𝔇𝔢𝔣 3.13.1. Слово w называется несократимым, если в нем нет вхождений aa^{-1} или $a^{-1}a$, $a \in A$

Теорема 3.13.1. В W в каждом классе эквивалентности есть ровно одно несократимое слово.

Замечание 3.13.1. О свободной группе можно думать как о множестве несократимых слов. Но теперь после перемножения слов нужно сократить результат. Если последний символ первого слова обратен в каком-то смысле первому символу второму, то сокращаем и повторяем действие пока можем.

▶ **Существование.** $w_1 = \prod_{i=1}^{w} a_i^{\varepsilon_i}$
n — длина слова.
Если w не является несократимым есть aa^{-1}, либо $a^{-1}a$, значит можем провести операцию сокращения, но при этом длина уменьшится. Продолжаем операцию пока можем.
Так как длина конечна, процесс когда-нибудь оборвется.

Единственность. w_1 и w_2 — несократимые слова из одного класса тогда нужно проверить, что это просто одно слово.
Так как слова эквивалентны, то существует цепочка преобразований,которая переводит одно слово в другое. $A_0 = w_1 \sim A_1 \sim \dots \sim A_k \sim w_2 = A_{k+1}$
На каждом шаге одна операция либо вставки либо вычеркивания. В частности первая операция может быть только вставки, последняя только вычеркивания.
Введем параметр l — суммарная длина промежуточных слов по которому будем вести индукцию.
Так как слова эквивалентны, то хотя бы одна цепочка нашлась, значит множество суммарных длин не пусто. Тогда найдем цепочку, с наименьшим значением l.
Если $l = 0$, то $w_1 \sim w_2 \Rightarrow w_1 = w_2$ операция не может быть ни вставкой, ни сокращением.
Если $l \neq 0$, то можно найти цепочку преобразований с меньшей суммарной длинной промежуточных слов.
$w_1 = A_0 \sim A_1 \sim \dots \sim A_{i-1} \sim A_i \sim A_{i+1} \sim \dots \sim A_n = w_2$
Пусть A_i слово наибольшей длины. Значит перед этим была вставка, а после этого будет вычеркивание.
Дальше все зависит от того, какие именно вставки и вычеркивания были. Придется разобрать несколько случаев.

1. Вставим $a\bar{a}$ и на следующем шаге это же вхождение вычеркивание.
   $w_1 = A_0 \dots \sim \dots A_{i-1} \sim A_{i+2} \dots \sim A_n$
   Но тогда мы вообще могли обойтись последовательностью более короткой длины без A_i, даже после этого придется выкинуть A_{i-1} или A_{i+2}, ну или разрешить ничего не делать, кроме того, что бы вставлять и вычеркивать.
2. $\bar{a}a$ и вычеркнули $\bar{a}a$. Здесь рассуждения совершенно аналогичные.
3. Вставили $a\bar{a}$, сократили $\bar{a}a$, где $\bar{a}$ тот же самый символ. $a \to a\bar{a}a \to a$
   $A_{i-1} = A_{i+1}$ Но опять, одно промежуточное слово можем выкинуть.
4. аналогичный случай, когда вставляли $\bar{a}a$, сокращали $a\bar{a}$, с тем же самым вхождением a.
5. Вставили $a\bar{a}$ сократили $b\bar{b}$ Вхождения a и b не совпадают и никак не пересекаются. Можем сначала сократить $b\bar{b}$ а потом вставим $a\bar{a}$. Суммарная длина промежуточных слов уменьшилась на 4.

◀

Замечание 3.13.2. $|A| \geqslant 2, F_A$ — неабелева.
$a, b \in A$
$ab(ba)^{-1} = aba^{-1}b^1 \neq 1 \Rightarrow ab \neq ba$

$A \subset B \Rightarrow F_A \subset F_B$
Упражнение: $F_{\{a,b\}}$ содержит подгруппу, изоморфную $F_{\{a,b,c\}}$ как следствие, и с любым конечным числом образующих.

$\forall n \colon \exists H \subset F_{\{a,b\}} \colon H \cong F_{\{x_1,\cdots,x_n\}}$

Теорема 3.13.2. $G =< x_1, \cdots, x_n >$ — группа с конечным числом образующих
$\Rightarrow \exists$ гомоморфизм из $F_{a_1,\cdots,a_n}$ на G, такое что $a_1 \to x_1, \cdots, a_n \to x_n$

Другими славами, всякая группа с конечным числом образующих может быть реализована, как фактор группа свободной группы.

▶ $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, $\bar{A}$
W слова в алфавите $A \cup \bar{A}$
Сначала постороим отображение из W в G.
$\psi \colon W \to G$
$a_i \to x_i$
$\prod a_i^{\varepsilon_i} \to \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$
$\psi(w_1 w_2) = \psi(w_1)\psi(w_2)$

Теперь нужно проверить, что отображение на эквивалентных словах принимает одинаковое значение. Если $w_1 \sim w_2$, то $\psi(w_1) = \psi(w_2)$
$u_1 u_2 \sim u_1 a_i \bar{a}_i u_2$
$\psi(u_1)\psi(u_2) = \psi(u_1) x_i x_i^{-1} \psi(u_2)$
ψ индуцирует отображение из $W/\sim$ в G.
То есть получили отображение из F_A в G и это гомоморфизм. ◀

3.14. Группы, заданные образующими и соотношениями

$|A| < \infty$, $A \cup \bar{A}$
Есть какой-то набор слов в алфавите из этих символов $w_1, \cdots, w_n \in W$
Рассмотрим F_A и рассмотрим H — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая классы слов $w_1, \cdots, w_n$, не умоляя общности можем считать, что эти слова несократимые.

Почему такая подгруппа существует? Мы ее можем определить так $H = \cap_{G \trianglelefteq F_A} G$. Пересечние любого количества нормальных групп вновь нормально, с другой стороны, пересекаемое множество не пусто пересечение содержит нужные нам элементы.

Раз H нормальная подгруппа, то мы можем рассмотреть факторгруппу. $F_A/H =< a_1, \cdots, a_k | w_1 = 1, \cdots, w_n = 1 >$
Вторая половина это обозначение, перечисляются образующие, перечисляются соотношения. То есть, после факторизации все наши слова будут нейтральными.

У нас есть горморфизм $\varphi \colon F_A \to F_A/H$
$w_i \to 1$
Эта группа еще называется: группа — образующими $a_1, \cdots, a_k$ и соотношениями $w_1, \cdots, w_n$

Такую группу мы можем задать другим способом. Начинаем со слов W, теперь мы разрешаем вставки/вычеркивание $aa^{-1}, a^{-1}a, w_1, \cdots, w_n$. То есть завили новые классы эквивалентности.
$W/\sim$ изоморфно F_A/H. Это мы оставим без доказательства.

Пример 3.14.1. $< a, b | aba^{-1}b^{-1} = 1 > \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$aa^{-1}, bb^{-1}, \cdots, aba^{-1}b^{-1}$

В каждом классе ровно 1 представитель вида $a^n b^m$
$u_1 bau_2 = u_1 aba^{-1}b^{-1}bau_2 = u_1 abu_2$

$a^n b^m = a^{n'} b^{m'} \Rightarrow n = n', m = m'$

w посчитаем суммарное вхождения a и суммарное вхождения b. При данных преобразованиях количество вхождений не меняется.