Математический анализ, III семестр

Осень 2015, лектор: Храбров Александр Игоревич

Автор: Дмитрий Лапшин

Собрано: 11 февраля 2016 г. 12:04

Оглавление

Планы:

1. Кратные интегралы
2. Криволинейные интегралы
3. Ряды
4. Функциональные ряды
5. Несобственные интегралы (их могут попросить пораньше)

Глава 3

Кратные интегралы (продолжение)

3.5. Сведение кратного интеграла к повторному

Теорема 3.5.1. $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, $\Omega = E \times [a,b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (координаты: $(x_1, \dots, x_n, y)$). $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема на Ω, $\forall x \in E, \exists \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y \leftrightharpoons g(x)$. Тогда g интегрируема на E и

$$\int\limits_E g = \int\limits_\Omega f$$

▶ f интегрируема на Ω и интеграл равен I, значит

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \colon \forall \tau \colon |\tau| < \delta, \forall \xi, |S(f,\tau,\xi) - I| < \varepsilon$$

Тут $\tau = \{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$, $\operatorname{diam} \Omega_i < \delta$. Дальше мы будем интересоваться только некоторыми разбиениями Ω, построенными так: берётся разбиение E мелькостью менее $\frac{\delta}{2}$ и разбиение $[a,b]$ мелкостью менее $\frac{\delta}{2}$. Перемножая эти два разбиения, получаем разбиение Ω мелкостью менее δ.

Замечание 3.5.1. Каждое измеримое множество–фрагмент E декартово умножается на отрезок–фрагмент $[a,b]$, получаем измеримое.

Для доказательства теоремы надо показать, что g интегрируема и интеграл равен I. Зафиксируем ε, возьмём δ из интегрируемости f по Ω. Тепрь покажем, что любое достаточно мелкое разбиение E (а точнее — мелкости менее $\frac{\delta}{2}$) даст нам сумму g Римана со значением I с небольшой погрешностью. Возьмём произвольное разбиение $\tau = \{E_1, E_2, \dots\}$ мелкости менее $\frac{\delta}{2}$ и его оснащение $\{\eta_1, \eta_2, \dots\}$. Покажем из него, что

$$|S(g,\tau,\eta) - I| < 2\varepsilon$$

Мы знаем, что $g(\eta_i)$ существуют, значит, для каждого η_i можно расписать существование интеграла $g(\eta_i) = \int_a^b f(\eta_i, y)\mathrm{d}y$:

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{\delta}_{\eta_i} > 0 \colon \forall \underbrace{\tilde{\tau} \colon |\tilde{\tau}| < \delta_{\eta_i}}_{\text{разбиение } [a,b]}, \forall \{y_k\}, \left|g(\eta_i) - S(f|_{x=\eta_i}, \tilde{\tau}, y_k)\right| < \tilde{\varepsilon}$$

Возьмём в качестве $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\mu E}$. Теперь мы хотим найти такое разбиение отрезка $[a,b]$ мелкости $\tilde{\delta} < \frac{\delta}{2}$, что $g(\eta_i)$ хорошо приблизится суммой Римана одновременно во всех точках.

Действительно, в каждой точке η_i есть своё $\tilde{\delta}_{\eta_i}$, которое приближает $g(\eta_i)$ с точностью $\tilde{\varepsilon}$. Точек η_i у нас конечно, значит, существует такое $\tilde{\delta}$, которое меньше их всех и даже меньше $\frac{\delta}{2}$.

Значит, любое разбиение $[a, b]$ мелкости меньше $\tilde{\delta}$ подойдёт, чтобы приблизить $g(\eta_i)$ во всех точках. Пусть это разбиение имеет вид $\{I_1, I_2, \dots\}$ с оснащением $\{y_1, y_2, \dots\}$:

$$\forall i\colon \left|g(\eta_i) - \sum_j f(\eta_i, y_j)\mu I_j\right| < \tilde{\varepsilon}$$

Теперь возьмём исходное разбиение E_i и декартово умножим его на это разбиение I_j. Получим оснащённое разбиение Ω мелкостью не более δ:

$$\tau\colon \Omega_{ij} = E_i \times I_j \quad \xi\colon \xi_{ij} = (\eta_i, y_j)$$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{i,j} f(\eta_i, y_j)\mu(E_i \times I_j) = \sum_{i,j} f(\eta_i, y_j)\mu E_i \mu I_j = \sum_i \underbrace{\left(\sum_j f(\eta_i, y_j)\mu I_j\right)}_{\text{сумма для } \int_a^b f(\eta_i, y)\mathrm{d}x} \mu E_i > \cdots$$

$$\sum_j f(\eta_i, y_j)\mu I_j > \int_a^b f(\eta_i, y)\mathrm{d}y - \frac{\varepsilon}{\mu E} = g(\eta_i) - \frac{\varepsilon}{\mu E}$$

$$\cdots > \sum_i \left(\int_a^b f(\eta_i, y)\mathrm{d}y - \frac{\varepsilon}{\mu E}\right)\mu E_i = \sum_i g(\eta_i)\mu E_i - \frac{\varepsilon}{\mu E}\sum_i \mu E_i = \sum_i g(\eta_i)\mu E_i - \varepsilon$$

$$\sum_i g(\eta_i)\mu E_i < S(f, \tau, \xi) + \varepsilon < I + 2\varepsilon$$

Аналогично

$$\sum_i g(\eta_i)\mu E_i > I - 2\varepsilon$$

$$\left|\sum_i g(\eta_i)\mu E_i - I\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \int_E g = I$$

◀

Замечание 3.5.2. Пусть мы знаем, что f непрерывна на компакте, а значит и равномерно непрерывна. Тогда из определения равномерной непрерывности можно взять $\tilde{\delta}$ для $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\mu E}$. Оно без игр с $\tilde{\delta}_{\eta_i}$ подойдёт везде.

Следствие 3.5.1.1. Пусть есть $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, f интегрируема, $\forall x, f(x)$ интегрируема по y. Тогда

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f = \int\limits_{[a,b]} \left(\int\limits_{[c,d]} f\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Следствие 3.5.1.2. Пусть есть $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, f интегрируема, $\forall x, f(x)$ интегрируема по y, $\forall x, f(y)$ интегрируема по x. Тогда

$$\int\limits_{[a,b]} \left(\int\limits_{[c,d]} f\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{[c,d]} \left(\int\limits_{[a,b]} f\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Замечание 3.5.3. Без интегрируемости всей f на $[a, b] \times [c, d]$ неверно.

Пример 3.5.1.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\qquad \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{-\pi}{4}$$

Замечание 3.5.4. Вспоминаем, что такое элементарное множество: взяли $\varphi,\psi\colon \operatorname{cl}E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\varphi\leqslant\psi$.

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x\in E\wedge\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}$$

Теорема 3.5.2. Пусть X — элементарное множество, $f\colon X\to\mathbb{R}$, f интегрируема, $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ существует. Тогда

$$\int\limits_X f=\int\limits_E\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

▶ $a=\min\varphi(x)$, $b=\max\psi(x)$. Продлим функцию f нулями, применим предыдущую теорему:

$$h\colon E\times[a,b]\to\mathbb{R}$$

$$h(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & (x,y)\in X\\ 0 & (x,y)\notin X\end{cases}$$

◀

3.6. Замена переменной в интеграле

𝔇𝔢𝔣 3.6.1. $f\colon G\to\mathbb{R}$, f непрерывна. f непрерывно продолжаемая на замыкании, если существует непрерывная $g\colon \operatorname{cl}G\to\mathbb{R}$, что

$$g\Big|_G=f$$

𝔇𝔢𝔣 3.6.2. $f\colon \operatorname{cl}G\to\mathbb{R}$, G открыто. f называется непрерывно дифференцируемой k раз на $\operatorname{cl}G$, если f непрерывно дифференцируема на G и все происзодные непрерывно продолжаются на $\operatorname{cl}G$.

Глобальная цель: есть открытое измеримое $G\subset\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon \operatorname{cl}G\to\mathbb{R}^n$, $\varphi(G)=D$ — открытое, φ является биекцией между G и D, φ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{cl}G$, Якобиан

$$\mathcal{J}_\varphi(t)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n}\end{pmatrix}\neq 0$$

Тогда можно заменить переменную:

$$\int\limits_D f=\int\limits_G f(\varphi(t))\left|J_\varphi(t)\right|\mathrm{d}t$$

Всё похоже на одномерный случай, но тогда нам не нужна была биекция: если φ убежит вверх, то она так же убежит вниз, и уберёт избыток. Также, нам не нужен там был модуль, потому что важно было направление.

Замечание 3.6.1. **Тут была другая лемма, из прошлого семестра, про то, что мера графика ноль. Нам на следующей лекции уточнили, что нужна другая. Вот она.**

Лемма 3.6.1. $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ выпуклый компакт, $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на замыкании. Тогда $\mu f(K) = 0$.

▶

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Все координаты равномерно непрерывны, значит все частные производные непрерывны и ограничены. Тогда

$$\forall x, y, \|f(x) - f(y)\| \leqslant M\|x - y\|$$

Берём K, окружаем кубиком Q и режем на куски диаметра не более δ. Хотим, чтобы диаметр разбиения был не более δ, то есть сторона не более $\delta/\sqrt{n-1}$. Тогда образ каждого кусочка имеет диаметр не более $M\delta$. Значит $f(K_i)$ можно вписать в куб C_i с ребром не более $2M\delta$.

$$f(K) = \bigcup f(K_i) \subset \bigcup C_i$$
$$\mu f(K) \leqslant \left(\frac{a}{\delta/\sqrt{n-1}}\right)^{n-1} \cdot (M\delta)^n = const \cdot \delta$$

Получили, что можем оценить $\mu f(K)$ сколь угодно мало. ◀

Замечание 3.6.2. Выпуклость не так нужна, можно связные множества, а потом на связные куски разбить, но нам нужно только для куба.

Замечание 3.6.3. Без дифференцируемости неверно, можно привести какой-то пример. *Какой именно на лекции честно написать не получилось.*

Ещё раз формула замены переменной: $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто и измеримо, $\varphi\colon \operatorname{cl} G \to D \subset \mathbb{R}^n$ биективна, непрерывна и непрерывно дифференцируема на $\operatorname{cl} G$ (*), а также имеет нулевой Якобиан:

$$J_\varphi(t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

$\varphi(G) = D$ измеримо. Тогда для непрерывной $f\colon \operatorname{cl} D \to \mathbb{R}$.

$$\int\limits_D f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_G f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t$$

Лемма 3.6.2. $E_1 \subset E \subset G$ ограниченны, $\varphi\colon \operatorname{cl} G \to D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (*). Тогда

1. $\varphi(E \setminus E_1) = \varphi(E) \setminus \varphi(E_1)$
2. $\varphi(\operatorname{cl} E) = \operatorname{cl} \varphi(E)$
3. $\varphi(\operatorname{int} E) = \operatorname{int} \varphi(E)$
4. $\varphi(\delta E) = \delta\varphi(E)$

▶ 1. φ биективна.

2. $\supset$**:** $E \subset G$ ограниченно, значит $\operatorname{cl} E$ ограничено, значит $\operatorname{cl} E$ компакт, значит $\varphi(\operatorname{cl} E)$ непрерывный образ компакта, то есть компакт, то есть $\varphi(\operatorname{cl} E)$ замкнуто.

$$E \subset \operatorname{cl} E \Rightarrow \varphi(E) \subset \varphi(\operatorname{cl} E) \Rightarrow \operatorname{cl} \varphi(E) \subset \operatorname{cl} \varphi(\operatorname{cl} E) = \varphi(\operatorname{cl} E)$$

$\subset$**:** Возьмём $a \in \operatorname{cl} E$. Есть последовательность $\{a_n\} \subset E$, что $\lim a_n = a$. По непрерывности φ

$$\lim \varphi(a_n) = \varphi(\lim a_n) = \varphi(a)$$

откуда $\varphi(a) \in \operatorname{cl} \varphi(E)$.

3. $\subset$**:** $\operatorname{int} E$ открыто, значит $\varphi(\operatorname{int} E)$ открыто по теореме об обратной функции.

$$\operatorname{int} E \subset E \Rightarrow \varphi(\operatorname{int} E) \subset \varphi(E) \Rightarrow \underbrace{\operatorname{int} \varphi(\operatorname{int} E)}_{=\varphi(\operatorname{int} E)} \subset \operatorname{int}(\varphi E)$$

$\supset$**:** Возьмём $a \in \operatorname{int} \varphi(E)$. Есть шарик $B_r(a) \subset \varphi(E)$. Тогда можно взять шарик $B_\varepsilon(\varphi^{-1}(a)) \subset E$, образ которого помещается в $B_r(a) \subset \varphi(E)$. По биекции можно снять φ, и получили, что $\varphi^{-1}(a) \in \operatorname{int} E$.

4.

$$\delta E = \operatorname{cl} E \setminus \operatorname{int} E$$
$$\varphi(\delta E) = \varphi(\operatorname{cl} E \setminus \operatorname{int} E) = \varphi(\operatorname{cl} E) \setminus \varphi(\operatorname{int} E) = \operatorname{cl} \varphi(E) \setminus \operatorname{int} \varphi(E) = \delta\varphi(E)$$

◀

𝔇𝔢𝔣 3.6.3. $\varphi \colon G \to \mathbb{R}^n$ дифферецируема в t_0. Напишем Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \mathrm{d}_{t_0}\varphi(t - t_0) + ...$$

Назовём эти первые два слагаемых линейной составляющей φ:

$$\varphi^{\mathrm{lin}}_{t_0}(t) \overset{\mathrm{Def}}{=} \varphi(t_0) + \left(d_{t_0}\varphi\right) \cdot (t - t_0)$$

Лемма 3.6.3. Если G ограничено и $\varphi \colon \operatorname{cl} G \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифферецируема на $\operatorname{cl} G$, то

$$S_\delta \leftrightharpoons \sup_{\substack{\|t - t_0\| \leqslant \delta \\ [t, t_0] \subset G}} \frac{\|\varphi(t) - \varphi^{\mathrm{lin}}_{t_0}(t)\|}{\|t - t_0\|} \xrightarrow{\delta \to 0+} 0$$

▶ $g(t) = \varphi(t) - \varphi^{\mathrm{lin}}_{t_0}(t)$, $g(t_0) = 0$. Переберём точки на $[t_0, t]$ вида $\theta t_0 + (1 - \theta)t$.
$h(\theta) = g(\theta t_0 + (1 - \theta)t)$ — векторная функция одной переменной, дифференцируема. Тогда по теореме Лагранжа для векторозначных функций

$$\|h(1) - h(0)\| \leqslant \|h'(\theta_0)\| \cdot (1 - 0)$$
$$\|h(1) - h(0)\| = \|g(t_0) - g(t)\| = \|g(t)\|$$

Мы только что оценили числитель дроби.

$$\mathrm{d}_{\theta_0} h = \left(\mathrm{d}_{\theta_0 t_0 + (1 - \theta_0)t} g\right) \cdot \left(\mathrm{d}_{\theta_0}(\theta t_0 + (1 - \theta)t)\right) = \left(\mathrm{d}_{\theta_0 t_0 + (1 - \theta_0)t} g\right) \cdot (t_0 - t)$$
$$u \leftrightharpoons \theta_0 t_0 + (1 - \theta_0)t$$
$$\mathrm{d}_u g = \mathrm{d}_u \varphi - \mathrm{d}_u \varphi^{\mathrm{lin}}_{t_0} = \mathrm{d}_u \varphi - \mathrm{d}_{t_0}\varphi$$
$$\|d_{\theta_0} h\| = \|(\mathrm{d}_u\varphi - \mathrm{d}_{t_0}\varphi)(t - t_0)\| \leqslant \|\mathrm{d}_u\varphi - \mathrm{d}_{t_0}\varphi\|\|t - t_0\|$$
$$\frac{\|\varphi(t) - \varphi^{\mathrm{lin}}_{t_0}(t)\|}{\|t - t_0\|} = \frac{\|g(t)\|}{\|t - t_0\|} \leqslant \frac{\|\mathrm{d}_{\theta_0} h\|}{\|t - t_0\|} \leqslant \frac{\|\mathrm{d}_u\varphi - \mathrm{d}_{t_0}\varphi\|\|t - t_0\|}{\|t - t_0\|} = \|\mathrm{d}_u\varphi - \mathrm{d}_{t_0}\varphi\|$$
$$S_\delta \leqslant \sup_{\substack{\|t - t_0\| \leqslant \delta \\ [t, t_0] \subset G}} \|\mathrm{d}_u\varphi - \mathrm{d}_{t_0}\varphi\| \leqslant \sup_{\|u - t_0\| \leqslant \delta} \|\mathrm{d}_u\varphi - \mathrm{d}_{t_0}\varphi\|$$

В конце написана матрица из разностей производных функции φ по разным координатам. Эта вещь целиком непрерывна, поэтому норма матрицы при стремящейся к нулю δ стремится к нулю. ◀

Теорема 3.6.1 (Геометрический смысл модуля Якобиана)**.** $\varphi\colon \operatorname{cl} G \to D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет (*). $t^* \in G$, $Q_h \leftrightharpoons \{t \mid t_i^* \leqslant t_i \leqslant t_i^* + h\}$ — куб на t^*. Тогда $\varphi(Q_h)$ измерима и

$$\frac{\mu\varphi(Q_h)}{\mu Q_h} \xrightarrow{h\to 0+} |J_\varphi(t^*)|$$

Более того,

$$\sup_{t^*\in G}\left|\frac{\mu\varphi(Q_h)}{\mu Q_h} - |J_\varphi(t^*)|\right| \xrightarrow{h\to 0+} 0$$

Замечание 3.6.4. Геометрический смысл тут такой: взяли маленький кубик, от воздействия на него φ-шкой его объём вырос примерно в Якобиан.

▶ **Покажем измеримость $\varphi(Q_h)$.** Покажем, что мера его границы ноль.

$$\delta\varphi(Q_h) = \varphi(\delta Q_h)$$

δQ_h — это $2n$ кубиков меньшей размерности. Образ таких кубиков — сужение графика f, то есть множество нулевой меры.

Доказательство формулы. $R_h = \varphi_{t^*}^{\text{lin}}(Q_h)$.

$$\frac{\mu R_h}{\mu Q_h} = |\det \mathrm{d}_{t^*}\varphi| = |J_\varphi(t^*)|$$

Теперь перейдём к $\varphi(Q_h)$.

$$\sigma(h) \leftrightharpoons \sup_{t^*\colon Q_h\subset G}\ \sup_{t\in Q_h} \|\varphi(t) - \varphi_{t^*}^{\text{lin}}(t)\|$$

$$t, t^* \in Q_h \Rightarrow \|t - t^*\| \leqslant \sqrt{n}h$$

$$\frac{\sigma(h)}{\sqrt{n}h} \leqslant S_h \to 0$$

Значит $\sigma(h) = o(h)$. Тогда посмотрим на $\varphi(Q_h)$ и R_h.

$$\forall t \in Q_h, \|\varphi(t) - \varphi_{t^*}^{\text{lin}}(h)\| \leqslant \sigma(h)$$

Тогда $\varphi(Q_h)$ содержится в R_h, раздутом на $\sigma(h)$ (обозначим $\tilde{R}_h$), а также содержит R_h, сдутый на $\sigma(h)$ (обозначим $\tilde{\tilde{R}}_h$).
Хотим получить следующее:

$$\tilde{\tilde{R}}_h \subset \varphi(Q_h) \subset \tilde{R}_h$$

$$\mu\tilde{R}_h = \mu R_h + o(h^n) \quad \mu\tilde{\tilde{R}}_h = \mu R_h + o(h^n)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu\varphi(Q_h)}{\mu Q_h} = \frac{\mu\varphi(Q_h)}{h^n} = \frac{\mu R_h + o(h^n)}{h^n} = \frac{\mu R_h}{\mu Q_h} + o(1) = |J_\varphi(t^*)| + o(1)$$

Теперь смотрим на R_h. Если мы его раздули на $\sigma(h)$.

$$0 \leqslant \mu R_h - \mu\tilde{R}_h \leqslant 2n\sigma(h)\mu(\text{грань кубика})$$

$$(\text{сторона грани}) \leqslant \|\mathrm{d}_{t^*}\varphi\|h \leqslant Mh$$

$$(\text{сторона увеличившейся грани}) \leqslant Mh + 2\sigma(h)$$

$$(\text{объём грани кубика}) \leqslant (Mh + 2\sigma(h))^{n-1} = o(h^{n-1})$$

◀

Лемма 3.6.4. $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset ... \subset G_n \subset ... \subset G$ — ограниченны и все измеримы. $f\colon \operatorname{cl} G \to \mathbb{R}$ непрерывна, $\mu(G \setminus G_n) \to 0$. Тогда

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{G_n} = \int\limits_{G} f$$

▶ G ограничена, значит на замыкании тоже, значит f непрерывна на комакте.

$$\int\limits_{G} f - \int\limits_{G_n} f = \int\limits_{G\setminus G_n} f$$

$$\left|\int\limits_{G} f - \int\limits_{G_n} f\right| = \left|\int\limits_{G\setminus G_n} f\right| \leqslant \int\limits_{G\setminus G_n} |f| \leqslant M\mu(G \setminus G_n) \to 0$$

◀

Теорема 3.6.2 (Замена переменной в кратном интеграле)**.** $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто и измеримо, $\varphi\colon \operatorname{cl} G \to D \subset \mathbb{R}^n$ биективна, непрерывна и непрерывно дифференцируема на $\operatorname{cl} G$, якобиан

$$J_\varphi(t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

$\varphi(G) = D$ измеримо. Тогда для непрерывной $f\colon \operatorname{cl} D \to \mathbb{R}$.

$$\int\limits_{D} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{G} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t$$

▶ $P \subset G$.

$$\int\limits_{\varphi(P)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{P} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t$$

Будем доказывать для разных P.

P — **куб со стороной** a**:** Оба интеграла существуют. τ_k — разбиение куба P на кубики со стороной $\frac{a}{k}$. Оснащение ξ_k возьмём точки, минимальные по каждой координате. $g(t) = f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|$.

$$S(g, \tau_k, \xi_k) \xrightarrow{k\to\infty} \int\limits_{P} g(t)\mathrm{d}t$$

$\tilde{\tau}_k$ — разбиение $\varphi(P)$ на $\varphi(P_i)$, на оснащение тоже подействуем. Надо бы понять, что $|\tilde{\tau}_k| \to 0$. Для этого хотим, что для любого $\varepsilon > 0$ с какого-то k мелкость τ_k меньше ε. Всопмним, что φ равномерно непрерывна:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\colon \forall t, s, \|t - s\| \leqslant \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leqslant \varepsilon$$

Значит, можно выбрать такое k, что P_i будут настолько малы, что и $\varphi(P_i)$ будут малы.

Осталось сравнить интегралы через суммы.

$$\sigma(g,\tau_k,\xi_k)-\sigma(f,\tilde{\tau}_k,\tilde{\xi}_k)=\sum g(\xi_{ki})\mu P_{ki}-\sum f(\tilde{\xi}_{ki})\mu\varphi(P_{ki})=$$

$$=\sum\left(f(\varphi(\xi_{ki}))|J_\varphi(\xi_{ki})|\mu P_{ki}-f(\varphi(\xi_{ki}))\mu\varphi(P_{ki})\right)=\sum f(\varphi(\xi_{ki}))\mu P_{ki}\left(|J_\varphi(\xi_{ki})|-\frac{\mu\varphi(P_{ki})}{\mu P_{ki}}\right)$$

$$\left|\sigma(g,\tau_k,\xi_k)-\sigma(f,\tilde{\tau}_k,\tilde{\xi}_k)\right|\leqslant\sum|f(\varphi(\xi_{ki}))|\,\frac{a^n}{k^n}\left||J_\varphi(\xi_{ki})|-\frac{\mu\varphi(P_{ki})}{\mu P_{ki}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\sum\frac{a^n}{k^n}\left||J_\varphi(\xi_{ki})|-\frac{\mu\varphi(P_{ki})}{\mu P_{ki}}\right|\leqslant Ma^n\sup_{t^*}\left||J_\varphi(t^*)|-\frac{\mu\varphi\left(Q_{\frac{a}{k}}\right)}{\mu Q_{\frac{a}{k}}}\right|\to 0$$

P — **конечное объединение кубов:** $P=\bigsqcup_{i=1}^m P_i$ — дизъюнктное объединение кубиков. Разложили на слагаемые и победа.

P — **измеримое и ограниченное:** Подгоняем множество кубами: всё множество лежит в кубе, режем его по серединам рёбер, и так далее. На каждом шаге есть объединение кубов G_n, целиком лежащих внутри P. Покажем, что оно стремится к P. Возьмём границу P и приблизим её множеством параллелепипедов (клеточным множеством) меры меньше ε. Возьмём любой параллелепипед, смотрим, сколько кубиков, его задевающих целиком. По мере измельчения объём задевающих стремится к объёму пареллелепипеда. Значит с какого-то момента кубики, покрывающие границу, будут иметь суммарную меру не более 2ε.

◀

Следствие 3.6.2.1. $\varphi\colon \operatorname{cl}G\to\mathbb{R}^n$, $\varphi(G)=D$, φ биективна между $G\setminus e_1$ и $D\setminus e_2$, где $\mu e_1=\mu e_2=0$, φ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{cl}G$, $J_\varphi\neq 0$ на $G\setminus e_1$. Тогда если $f\colon \operatorname{cl}D\to\mathbb{R}$ непрерывна, то

$$\int\limits_G f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t=\int\limits_D f(x)\mathrm{d}x$$

▶

$$\int\limits_G f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t=\int\limits_{G\setminus e_1} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\mathrm{d}t=\int\limits_{D\setminus e_2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_D f(x)\mathrm{d}x$$

◀

Пример 3.6.1. $\varphi(t)=t+a$

$$\int\limits_G f(t+a)\mathrm{d}t=\int\limits_D f(x)\mathrm{d}x$$

$$D=\{x\mid x-a\in G\}=\{x+a\mid x\in G\}$$

Пример 3.6.2. $\varphi(t)=At$, $J_\varphi(t)=\det A$.

$$\int\limits_G f(At)\underbrace{|\det A|}_{const}\mathrm{d}t=\int\limits_D f(x)\mathrm{d}x$$

$$D=\{Ax\mid x\in G\}$$

Пример 3.6.3. Полярные координаты:

$$(r,\varphi)\to(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$$

$$J(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$$

$$r\in[0,+\infty)\varphi\in[0,2\pi)$$

Биекция и ненулевой якобиан убивают $r = 0$, но это всего одна точка. Но нужна ещё открытость, выкинем $\varphi = 0$ туда же.

$$\int\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = \int\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Пример 3.6.4. Сферические координаты: φ — долгота, ψ — широта.

$$(r,\varphi,\psi) \to (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)$$
$$r \in [0,+\infty) \quad \varphi \in [0,2\pi) \quad \psi \in [-\pi/2, \pi/2)$$
$$J(r,\varphi,\psi) = r^2\cos\psi$$

Опять-таки, выкинем кое-какое множество:

$$r \in (0,+\infty) \quad \varphi \in (0,2\pi) \quad \psi \in (-\pi/2, \pi/2)$$
$$\int\limits_G f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi) r^2\cos\psi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi = \int\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Пример 3.6.5.

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}$$

Почситаем его так:

$$\int\limits_{[-a,a]^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{[-a,a]^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{[-a,a]} e^{-x^2}\left(\int\limits_{[-a,a]} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left(\int\limits_{[-a,a]} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

Будем считать предел не на квадратике, а на кружочке, приближая квадрат кругом снаружи и иннутри.

$$\int\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \int\limits_{[-a,a]^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \int\limits_{x^2+y^2\leqslant 2a^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\int\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cdots$$
$$(r,\varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$\cdots = \int\limits_{r=0}^{a}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = 2\pi\int\limits_{r=0}^{a} e^{-r^2}r\mathrm{d}r = \pi\int\limits_{t=0}^{a^2} e^{-t}\mathrm{d}t = \pi(1-e^{-a^2}) \to \pi$$

Откуда

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Этот интеграл очень популярен. Например, в теории вероятностей любят

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Пример 3.6.6. Объём n-мерного шара.

$$\int\limits_{\sum x_i^2\leqslant r^2} 1\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = r^n \int\limits_{\sum t_i^2\leqslant 1} 1\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n = r^n C_n$$

где C_n — объём единичного шара. КАРТИНКА: Шар, горизонатльная проекция, радиус.

$$c_n = \int\limits_{\sum t_i^2\leqslant 1} \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n = \int\limits_{-1}^{1} c_{n-1}(\sqrt{1-\tau^2})^{n-1}\mathrm{d}\tau = c_{n-1}\int\limits_{0}^{\pi} \sin^n\varphi \mathrm{d}\varphi = I_n$$

А это у нас было!

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!\,!}{(2k)!\,!}\frac{\pi}{2} \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!\,!}{(2k+1)!\,!}$$

$$c_n = 2c_{n-1}I_n = 4c_{n-2}I_nI_{n-1} = \dots = 2^{n-1}\cdot \underbrace{c_1}_{=2} I_nI_{n-1}\dots I_2 = 2^n\prod_{i=2}^{n} I_i$$

$n = 2k$:

$$\prod_{i=2}^{n} I_i = \frac{(2k-1)!\,!}{2k!\,!}\frac{\pi}{2}\frac{(2k-2)!\,!}{(2k-1)!\,!}\frac{(2k-3)!\,!}{(2k-2)!\,!}\frac{\pi}{2}\dots = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k\frac{1}{(2k)!\,!} = \frac{\pi^k}{2^k\cdot 2^k k!}$$

$$c_n = \frac{\pi^k}{k!}$$

$n = 2k+1$:

$$\prod_{i=2}^{n} I_i = \frac{(2k)!\,!}{(2k+1)!\,!}\frac{(2k-1)!\,!}{(2k)!\,!}\frac{\pi}{2}\frac{(2k-2)!\,!}{(2k-1)!\,!}\dots = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k\frac{1}{(2k+1)!\,!} = \frac{\pi^k}{2^k\cdot(2k+1)!\,!}$$

$$c_n = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!\,!}$$

На этой торжественной ноте кратные интегралы закончились.

Глава 4

Криволинейные интегралы

4.1. Криволинейные интегралы I рода

Пусть есть кривая γ, на которой определена непрерывная функция $f\colon \gamma \to \mathbb{R}$. Физический смысл — плотность вдоль линии, хотим массу (заряд, ...).

𝔇𝔢𝔣 4.1.1. Есть гладкий путь $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ непрерывна.

$$\int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$$

Это не просто так напоминает формулу замены переменной, это она и есть.

Свойства:

1. Интеграл по кривой не зависит от параметризации

   ▶ Пусть $\gamma(\tau(x))$ — другая параметризация. τ строго монотонна, $\tau(\alpha) = a$, $\tau(\beta) = b$. Достаточно показать, что

   $$\int\limits_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta f(\gamma(\tau(x)))\|(\gamma\circ\tau)'(x)\|\mathrm{d}x = \cdots$$

   есть просто замена переменной.

   $$(\gamma\circ\tau)' = \begin{pmatrix} \gamma_1'(\tau(x))\tau'(x) \\ \vdots \\ \gamma_n'(\tau(x))\tau'(x) \end{pmatrix}$$
   $$\|(\gamma\circ\tau)'(x)\| = |\tau'(x)|\|\gamma'(\tau(x))\|$$
   $$\cdots = \int\limits_\alpha^\beta f(\gamma(\tau(x)))\underbrace{|\tau'(x)|}_{\operatorname{sign}\tau'\cdot\tau'(x)}\|\gamma'(\tau(x))\|\mathrm{d}x = \operatorname{sign}\tau'\int\limits_\alpha^\beta f(\gamma(\tau(x)))\tau'(x)\|\gamma'(\tau(x))\|\mathrm{d}x$$

   Этот знак разберётся с тем, возрастала или убывала ли τ. ◀

2. Интеграл не зависит от направления кривой.

3. Интеграл линеен.

4. Интеграл аддитивен по кривой:

$$\int\limits_{\gamma_1 \sqcup \gamma_2} f \mathrm{d}s = \int\limits_{\gamma_1} f \mathrm{d}s + \int\limits_{\gamma_2} f \mathrm{d}s$$

Имеется в виду две половинки одной кривой.

▶ $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Параметризируем:

$$\gamma_1 = \gamma\Big|_{[a,c]} \quad \gamma_2 = \gamma\Big|_{[c,b]}$$

Тупо подставляем в определение. ◀

5. γ — спрямляемая кривая, значит есть натуральная параметризация $\tilde{\gamma}\colon [0, S] \to \mathbb{R}^n$ и

$$\int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}s = \int\limits_0^S f(\tilde{\gamma}(s)) \mathrm{d}s$$

▶

$$\int\limits_0^t \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| \mathrm{d}\tau = l\left(\tilde{\gamma}\Big|_{[0,t]}\right) = t$$

$$\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}s = \int\limits_0^S f(\tilde{\gamma}(t)) \underbrace{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}_{1} \mathrm{d}t$$

◀

6.

$$\int\limits_{\gamma} \mathrm{d}s = l(\gamma)$$

7.

$$\left| \int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}s \right| \leqslant \max |f| l(\gamma)$$

▶

$$\left| \int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}s \right| = \left| \int\limits_0^S f(\tilde{\gamma}(t)) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int\limits_0^S |f(\tilde{\gamma}(t))| \, \mathrm{d}t \leqslant \max f S$$

◀

8.

$$f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}s \leqslant \int\limits_{\gamma} g \mathrm{d}s$$

▶

$$\int\limits_{\gamma} f\mathrm{d}s = \int\limits_{0}^{S} f(\tilde{\gamma}(t))\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_{0}^{S} g(\tilde{\gamma}(t))\mathrm{d}t = \int\limits_{\gamma} g\mathrm{d}s$$

◀

9. Аналог интегральной суммы:

$$\sum_{k=1}^{m} f(\gamma(\xi_k))l\left(\gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}\right)$$

Тогда для инеграла по пути

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0\colon \forall\tau\colon |\tau|<\delta, \forall\xi, \left|\int\limits_{\gamma} f\mathrm{d}s - \sum_{k=1}^{m} f(\gamma(\xi_k))l\left(\gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}\right)\right| < \varepsilon$$

▶

$$\int\limits_{\gamma} f\mathrm{d}s = \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$$

Пишем интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^{m} f(\gamma(\xi_k))\|\gamma'(\xi_k)\|(t_k-t_{k-1}) \fallingdotseq A$$

$$\sum_{k=1}^{m} f(\gamma(\xi_k))l\left(\gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}\right) = \sum_{k=1}^{m} f(\gamma(\xi_k))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t \fallingdotseq B$$

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t = \|\gamma'(\eta_k)\|(t_k-t_{k-1}) \quad \eta_k\in[t_{k-1},t_k]$$

$$A-B=\sum_{k=1}^{m} f(\gamma(\xi_k))\left(\|\gamma'(\xi_k)\|-\|\gamma'(\eta_k)\|\right)(t_k-t_{k-1})$$

$\|\gamma'\|$ непрерывна.

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\colon |x-y|<\delta\Rightarrow \big|\|\gamma'(x)\|-\|\gamma'(y)\|\big|<\varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^{m}\underbrace{f(\gamma(\xi_k))}_{\text{ограничена}}\underbrace{\left(\|\gamma'(\xi_k)\|-\|\gamma'(\eta_k)\|\right)}_{<\varepsilon}\underbrace{(t_k-t_{k-1})}_{\to(b-a)}$$

$$|A-B|\leqslant M\varepsilon(b-a)$$

◀

4.2. Криволинейные ингегралы II рода

Они же — интегралы дифференциальной формы.

𝔇𝔢𝔣 4.2.1. $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — гладкий путь, $f\colon (\gamma([a,b])) \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда

$$\int\limits_\gamma (f_1 \mathrm{d}x_1 + f_2 \mathrm{d}x_2 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n) \overset{\text{Def}}{=} \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\,\mathrm{d}t$$

Свойства:

1. Инетграл не зависит от параметров, сохраняющих ориентацию кривой.

▶ $\tau\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $\tau' > 0$, $\tau(\alpha) = a$, $\tau(\beta) = b$.

$$\int\limits_\alpha^\beta (f_1(\gamma(\tau(s))(\gamma_1(\tau(s)))' + \dots + f_n(\gamma(\tau(s)))(\gamma_n(\tau(s)))')\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta (f_1(\gamma(\tau(s))\gamma_1'(\tau(t)) + \dots + f_n(\gamma(\tau(s)))\gamma_n'(\tau(s)))\,\tau'(s)\mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\,\mathrm{d}t$$

◀

2. Смена направления на кривой меняет знак интеграла.

▶ $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$\int\limits_\gamma f_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n = \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\,\mathrm{d}t$$

$\tilde{\gamma} = \gamma(a+b-t)$ — обратная параметризация.

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}} f_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int\limits_a^b (f_1(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}_1'(t) + \dots + f_n(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}_n'(t))\,\mathrm{d}t)$$

$$= -\int\limits_a^b (f_1(\gamma(a+b-t))\gamma_1'(a+b-t) + \dots + f_n(\gamma(a+b-t))\gamma_n'(a+b-t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_b^a (f_1(\gamma(s))\gamma_1'(s) + \dots + f_n(\gamma(s))\gamma_n'(s))\,\mathrm{d}(s)$$

$$= -\int\limits_\gamma f_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n$$

◀

3. Пусть $\vec{\sigma}$ — единичный касательный вектор, сонаправленный направлению обхода. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n = \int\limits_{\gamma} \langle f, \sigma \rangle \,\mathrm{d}s$$

▶ $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Единичный касательные вектор будет выглядеть

$$\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \quad \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \langle f, \sigma \rangle \,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b \langle f(\gamma(t)), \sigma(\gamma(t)) \rangle \, \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t = \int\limits_a^b \left\langle f(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)) \,\mathrm{d}t$$

◀

4. Линейность по функции.
5. Аддитивность по кривой при сохранении ориентации: $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1 = \gamma\big|_{[a,c]}$, $\gamma_2 = \gamma\big|_{[c,b]}$

$$\int\limits_{\gamma} f_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n = \int\limits_{\gamma_1} \dots + \int\limits_{\gamma_2} \dots$$

6. $$\left| \int\limits_{\gamma} f_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n \right| \leqslant \int\limits_{\gamma} \|f|\| \mathrm{d}s \leqslant \max \|f\| l(\gamma)$$

▶

$$\left| \int\limits_{\gamma} f_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n \right| = \left| \int\limits_{\gamma} \langle f, \sigma \rangle \,\mathrm{d}s \right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |\langle f, \sigma \rangle| \,\mathrm{d}s \leqslant \int\limits_{\gamma} \|f\| \, \underbrace{\|\sigma\|}_{1} \,\mathrm{d}s$$

Последнее неравенство — Коши-Буняковский. ◀

7. Интегральная сумма

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_j(\gamma(\xi_k))(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}))$$

Догадайтесь, что дальше:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon \forall \tau\colon |\tau| < \delta, \forall \xi, \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_j(\gamma(\xi_k))(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})) - \int\limits_{\gamma} (f_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + f_n \mathrm{d}x_n) \right| < \varepsilon$$

▶

$$\gamma_j(t_n) - \gamma_j(t_{n-1}) = \gamma_j'(\eta_{jk})(t_k - t_{k-1})$$
$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_j(\gamma(\xi_k))(\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(\gamma(\xi_k))\gamma_j'(\eta_{jk})\right)(t_k - t_{k-1})$$

Дальше опять рассуждаем про то, что γ_j' равномерно непрерывны. ◀

Замечание 4.2.1. Оба эти криволинейных интеграла можно доопределить на кусочногладких функциях: делим на гладкие куски, считаем интеграл на кусках, складываем.

𝔇𝔢𝔣 4.2.2. Первообразная дифференциальной формы $f_1\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n\mathrm{d}x_n$ — такая дифференцируемая функция F, что

$$\mathrm{d}F = f_1\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n\mathrm{d}x_n$$

Теорема 4.2.1. Если F — первообразная дифференциальной формы и γ — кривая, соединяющая точки A и B, то

$$\int\limits_\gamma f_1\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n\mathrm{d}x_n = F(B) - F(A)$$

▶

$$\int\limits_\gamma f_1\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n\mathrm{d}x_n = \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\gamma(t))\gamma_n'(t)\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_a^b (F\circ\gamma)'(t)\mathrm{d}t = (F\circ\gamma)(b) - (F\circ\gamma)(a) = F(B) - F(A)$$

◀

Следствие 4.2.1.1. Если у формы есть первообразная, то от пути интеграл не зависит. Физический смысл: поле, заданное этой формой, потенциальное.

𝔇𝔢𝔣 4.2.3. $G \subset \mathbb{R}^n$ называется областью, если G открыто и линейно связно.

Теорема 4.2.2. G — область, $f_1, \dots, f_n \colon G \to \mathbb{R}$ непрерывны. Тогда $f_1\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n\mathrm{d}x_n$ имеет первообразную тогда и только тогда, когда интеграл по любому замкнутому пути равно нулю.

▶ **⇒:** Следует из предыдущей теоремы.

⇐: Возьмём произвольную точку a и переберём точки x. Построим

$$F(x) = \int\limits_{\gamma(a,x)} f_1\mathrm{d}x_1 + \dots + f_n\mathrm{d}x_n$$

В силу того, что по замкнутому контуру ноль, любая γ даст одно и то же значение интеграла. Таким образом, F корректная функция.

Проверим, что оно подходит:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_1+h,x_2,\dots,x_n)-F(x_1,x_2,\dots,x_n)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int\limits_{[x,(x_1+h,x_2,\dots,x_n)]} f_1\mathrm{d}x_1+\dots+f_n\mathrm{d}x_n}{h} =$$

$$\gamma\colon [0,h]\to[x,(x_1+h,x_2,\dots,x_n)] \quad t\mapsto\begin{pmatrix}x_1+t\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\int\limits_0^h f_1(x_1+t,x_2,\dots x_n)\mathrm{d}t}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hf_1(x_1+\theta h,x_2,\dots,x_n))\mathrm{d}t}{h} = f_1(x) \quad \theta\in[0,1]$$

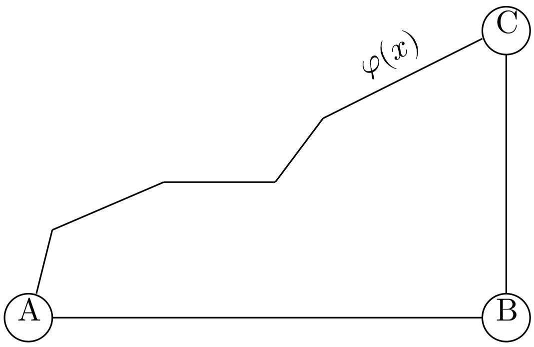
◀

Теорема 4.2.3 (формула Грина)**.** $G\subset\mathbb{R}^2$ — область, граница которой состоит из конечного чилса не(само)пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых, $P,Q\colon G\to\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Тогда

$$\int\limits_{\delta G} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = \int\limits_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Направления обхода: идём по границе так, чтобы G была слева.

▶ Покажем, что формула верна для хорошей фигурки G: снизу ограничена горизонтальным отрезком (x-координата от a до b), справа — вертикальным, а сбоку — монотонно возрастающей функцией φ.



То есть функция идёт из точки $A=(a,\varphi(a))$ в $C=(b,\varphi(b))$ и ограничивает что-то чуть проще элементарного множества с «углами» A, $B=(b,\varphi(a)$

$$\int\limits_G\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(x)}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b(P(x,\varphi(x))-P(x,\varphi(a)))\mathrm{d}x =$$

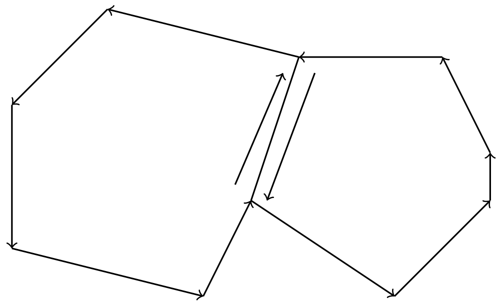
$$= \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))\mathrm{d}x - \int\limits_a^b P(x,\varphi(a))\mathrm{d}x = -\int\limits_{C\to A}P\mathrm{d}x - \int\limits_{[A,B]}P\mathrm{d}x =$$

$$= -\int\limits_{C\to A}P\mathrm{d}x - \int\limits_{[A,B]}P\mathrm{d}x - \int\limits_{[B,C]}P\mathrm{d}x = -\int\limits_{\delta G}P\mathrm{d}x$$

Аналогично можно показать

$$\int\limits_G\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{\delta G}Q\mathrm{d}y$$

После этого можно заметить, что при разрезе области кривой на две, если доказаны формулы для половинок, то получим для целой фигурки: обход этой кривой войдёт два раза с разными знаками, то есть они дают нулевой вклад.



G простая, если она криволинейная с гладкой верхушкой и экстремумов конечное число. Режем её по экстремумам, потом до треугольников доводим.

Можно доказать, что уловие на экстремумы не требуется, но это трудно. Даже дифференцируемости не требуется. ◀

Пример 4.2.1. Порасуждаем про интеграл:

$$\int\limits_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$P = \frac{y}{x^2+y^2} \quad Q = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$P = \frac{\partial \operatorname{arctg} \frac{x}{y}}{\partial x} \quad Q = \frac{\partial \operatorname{arctg} \frac{x}{y}}{\partial y}$$

arctg — первообразная, значит, если замкнутая кривая не касается $y = 0$, то интеграл ноль. Покажем, что если кривая на $\mathbb{R}^2$ не касается всего лишь нуля, то интеграл ноль:

$$\int\limits_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cdots$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\cdots = 0$$

А теперь по окружности:

$$x = r\cos t \qquad y = r\sin t$$

$$x' = -r\sin t \quad y' = r\cos t$$

$$\int\limits_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r\sin t}{r^3}(-r\sin t) + \frac{-r\cos t}{r^3} r\cos t\right)\mathrm{d}t = -2\pi$$

Следствие 4.2.3.1. Для фигурок из теоремы Грина

$$\mu G = \int\limits_{\delta G} x\mathrm{d}y = -\int\limits_{\delta G} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\delta G}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$$

▶
1. $Q = x$, $P = 0$
2. $P = -y$, $Q = 0$
3. $Q = x/2$, $P = -y/2$

◀

Глава 5

Несобственные интегралы

5.1. Несобственные интегралы

𝔇𝔢𝔣 5.1.1. $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in C[a, b)$. Если существует предел

$$\lim_{B \to b-0} \int\limits_a^B f(x)\mathrm{d}x$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \lim_{B \to b-0} \int\limits_a^B f(x)\mathrm{d}x$$

𝔇𝔢𝔣 5.1.2. $-\infty \leqslant a < b + \infty$, $f \in C(a, b]$. Если существует предел

$$\lim_{A \to a+0} \int\limits_A^b f(x)\mathrm{d}x$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \lim_{A \to a+0} \int\limits_A^b f(x)\mathrm{d}x$$

Замечание 5.1.1. Если $f \in C[a, b]$, то определение не даёт ничего нового:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^B f(x)\mathrm{d}x + \underbrace{\int\limits_B^b f(x)\mathrm{d}x}_{\to 0}$$

Далее свойства про верхнюю точку, про нижнюю всё то же самое.

Теорема 5.1.1 (Критерий Коши сходимости интеграла)**.** $f \in C[a, b)$. Тогда сходимость ингеграла

$$\int\limits_a^b f$$

равносильна

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c < b \colon \forall A, B \colon c < A, B < b, \left| \int\limits_A^B f \right| < \varepsilon$$

▶

$$F \leftrightharpoons \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Тогда

$$\int\limits_a^B f = F(B) - F(a) = F(B)$$

и наличие предела $\lim_{B\to b-0} \int\limits_a^B f$ равносильно наличию предела у $\lim_{B\to b-0} F(B)$, что уже равносильно

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c < b\colon \forall A, B > c, |F(B) - F(A)| < \varepsilon$$

◀

Замечание 5.1.2. Обычно этот критерий, что характерно, используют для доказательства расходимости интеграла. Если существуют $A_n, B_n \to b_{-0}$, что

$$\int\limits_{A_n}^{B_n} > \varepsilon$$

то интеграл расходится.

Замечание 5.1.3. Пусть F — первообразая f на $[a, b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f = \lim_{B\to b-0} F(B) - F(a)$$

Сходимость интеграла равносильна тому, что F непрерывно продолжается на $[a, b]$.

Пример 5.1.1.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_1^B \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \cdots$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \ln x & p = 1 \\ -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} & p \neq 1 \end{cases}$$

$$\cdots = \begin{cases} \lim_{B\to+\infty} \ln B & p = 1 \\ \lim_{B\to+\infty} \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{B^{p-1}}\right) & p \neq 1 \end{cases}$$

При $p > 1$ интеграл сходится и равен $\frac{1}{p-1}$, иначе не сходится.

Пример 5.1.2.

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{A\to0+} \int\limits_A^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{A\to0+} -\ln A & p = 1 \\ \lim_{A\to0+} \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{A^{p-1}}\right) - 1) & p \neq 1 \end{cases}$$

При $p < 1$ интеграл сходится и равен $\frac{1}{1-p}$, иначе не сходится.

Свойства несобственных интегралов:

1. $c \in (a, b)$. Следующие два интеграла сходятся или расходятся одновременно:

$$\int\limits_a^b f \quad \int\limits_c^b f$$

причём в случае сходимости

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$$

▶

$$\lim_{B \to b-0} \int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \lim_{B \to b-0} \int\limits_c^B f$$

◀

2. Если $\int_a^b f$ сходится, то

$$\lim_{c \to b-0} \int\limits_c^b f = 0$$

▶ Из предыдущего пункта

$$\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f \to \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$$

◀

3. Линейность: если на $[a, b)$ сходятся интегралы от f и g, то

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

▶

$$\lim_{B \to b-0} \int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \lim_{B \to b-0} \left(\alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g \right) = \alpha \lim_{B \to b-0} \int\limits_a^B f + \beta \lim_{B \to b-0} \int\limits_a^B g$$

◀

Замечание 5.1.4. Сумма сходящегося и расходящегося интегралов будет расходиться.

▶ Пусть сходятся, тогда и разность $\int_a^b (f + g) - f$ будет сходиться. ◀

Замечание 5.1.5. Сумма двух расходящихся интегралов может и сходиться:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \int\limits_1^{+\infty} -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

4. Монотонность: если $f \leqslant g$ и их интегралы сходится, то

$$\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$$

Замечание 5.1.6. Вместо сходимости можно потребовать существование в $\bar{\mathbb{R}}$.

5. Интегрирование по частям: пусть $f, g \in C^1[a,b)$.

$$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

Для существования любого слагаемого достаточно существования других двух.

6. Замена переменной: $\varphi\colon [\alpha,\beta) \to [a,b)$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta)$, $\lim_{t\to\beta_{-0}} \varphi(\beta) = c \in \bar{\mathbb{R}}$, $f \in C[a,b)$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\mathrm{d}x$$

Существование одного даёт существование другого.

▶ Пусть существует левый интеграл. Покажем, что есть правый и равен.

$$\varPhi(\gamma) \leftrightharpoons \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \exists \lim_{\gamma\to\beta-0} \varPhi(\gamma)$$

$$\int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} f(x)\mathrm{d}x$$

$$F(y) \leftrightharpoons \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{y\to b-0} F(y) = \lim_{\gamma\to\beta-0} F(\varphi(\gamma)) = \lim_{\gamma\to\beta-0} \varPhi(\gamma) = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Пусть существует правый интеграл.

$$F(y) \xRightarrow{y\to c} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f \Rightarrow F(\varphi(\gamma)) \xRightarrow{\gamma\to\beta-0} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f$$

$$F(\varphi(\gamma)) = \varPhi(\gamma)$$

◀

Замечание 5.1.7. Вместо сходимости можно потребовать существование в $\bar{\mathbb{R}}$.

Замечание 5.1.8.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$\varphi(t) = b - \frac{1}{t}$, φ'

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

5.2. Интеграл знакопостоянной функции

Знакопостоянство, не умаляя общности, считаем неотрицательностью.

Теорема 5.2.1 (Признак сравнения)**.** $f, g \in C[a,b)$, $0 \leqslant f \leqslant g$. Тогда

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то и $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то и $\int_a^b g$ расходится.

▶ 1. $F(B) = \int\limits_a^B f(x)\mathrm{d}x$ и $G(B) = \int\limits_a^B g(x)\mathrm{d}x$ монотонно возрастают. Но G имеент предел, значит ограничена. Но тогда F возрастает и ограниченна, значит имеет предел.
2. От противного по пункту 1.

◀

Следствие 5.2.1.1. Если $f, g \in C[a,b)$, $f, g \geqslant 0$, $f = O(g)$ и $\int_a^b g$ сходится, то и $\int_a^b f$ сходится.

Следствие 5.2.1.2. Если $f, g \in C[a,b)$, $f, g \geqslant 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$, то интегралы f и g ведут себя одинаково.

Следствие 5.2.1.3. Если $f \in C[a,+\infty)$ и $f = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Следствие 5.2.1.4. Если $f \in C[a,+\infty)$ и $f \geqslant \frac{c}{x}$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f$ расходится.

Замечание 5.2.1. Из того, что интеграл сходится, не следует то, что функция стремится ноль. Не следует даже, что функция ограничена.

Пример 5.2.1. Функция вида: везде ноль, но есть галочки:

- на отрезке $[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}]$ галочка до 1,
- на отрезке $[2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}]$ галочка до 2,
- ...
- на отрезке $[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}]$ галочка до n,

Проверим, что первообразная ограничена, то есть сумма площадей треугольничков ограничена:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2}^i}}_{\leqslant C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^i} < \frac{C}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

5.3. Несобственные интегралы от знакопостоянной функции

𝔇𝔢𝔣 5.3.1. $f \in C[a, b)$. Интеграл $\int_a^b f$ сходится абсолютно, если сходтися интеграл её модуля.

Теорема 5.3.1. $f \in C[a, b)$. Из абсолютной сходимости следует простая сходимость.

▶ $\int_a^b f$ абсолютно сходится, значит $\int_a^b |f|$ сходится. По критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c < b \colon \forall A, B, \left|\int\limits_A^B |f|\right| < \varepsilon$$

Но

$$\varepsilon > \left|\int\limits_A^B f\right| = \int\limits_A^B |f| \leqslant \left|\int\limits_A^B |f|\right|$$

(у нас же тут интегралы собственные); получили критерий Коши для $\int_a^b f$. ◀

Пусть есть функции $f \in C[a, +\infty)$, $g \in C^1[a, +\infty)$, хотим исследовать сходимость интеграла:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Два признака сходимости:

Теорема 5.3.2 (Признак Дирихле)**.** 1. $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ ограниченная функция

2. $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Теорема 5.3.3 (Признак Абеля)**.** 1. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ сходится

2. $g(x)$ монотонна и ограничена

▶

$$\int\limits_a^A f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_a^A - \int\limits_a^A F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Знаем, что $F(x)$ ограниченная, а $g(x)$ стремится к нулю, значит первое слагаемое сходится. Для второго покажем, что сходится абсолютно:

$$\int\limits_a^{+\infty} |F(x)| \cdot |g'(x)|\mathrm{d}x$$

$|F(x) \leqslant M|$, g монотонна, значит g' знакопостоянна. Не умаляя общности, пусть $g' \geqslant 0$.

$$|F(x)| \cdot |g'(x)| \leqslant Mg'(x)$$

$$\int\limits_a^{+\infty} Mg'(x)\mathrm{d}x = Mg(x)\Big|_a^{+\infty} = -Mg(a)$$

Таким образом, всё сходится. ◀

▶

$$F(x) \xrightarrow{x\to+\infty} \int\limits_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

Значит $F(x)$ ограничена. $g(x)$ монотонна и ограничена, значит существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} g(x) = K$. $\tilde{g}(x) = g(x) - K$. Применим признак Дирихле для интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)\mathrm{d}x$$

Он сойдётся.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)\mathrm{d}x + K\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Второй сходится по условию. ◀

Замечание 5.3.1. Непрерывная дифференцируемость g не нужна, но без неё сложно.

Следствие 5.3.3.1. f непрерывна и T-периодична, $g \in C^1[a, +\infty)$ и монотонно стремится к нулю. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x < \infty \Leftarrow \int\limits_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

а если второй интеграл не 0, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow \int\limits_a^{\infty} g(x) < \infty$$

▶ Хотим сказать, что если интеграл по периоду ноль, то

$$\int\limits_a^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{a+kT}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{x-kT} f(t)\mathrm{d}t = F(x-kT)$$

где $k = \lfloor \frac{x-a}{T} \rfloor$. Отсюда $\max|F(x)| = \max_{a\leqslant x<a+T}|F(x)| \leqslant M$.

Обратно: пусть интеграл периода не нулевой и равен c. Рассмотрим $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{c}{T}$. Воспользуемся уже доказанным направлением следствия.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}(x)g(x)\mathrm{d}x + \frac{c}{T}\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

Средний интеграл сходится, значит, сходимость первого и последнего равносильны. ◀

Пример 5.3.1. $p > 0$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$$

$g(x) = 1/x^p$, $g \downarrow 0$, sin периодическая и интеграл по периоду есть 0. Значит интеграл сходится.

Теперь рассмотрим абсолютную сходимость при $p > 0$. Интеграл модуля синуса по периоду не ноль, и интеграл сойдётся тогда и только тогда, когда сойдётся

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

то есть при $p > 1$. А при $0 < p \leqslant 1$ абсолютной сходимости нет.

При $p \leqslant 0$ не сходится:

$$\int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Не сходится по критерию Коши.

5.4. Несобственные кратные интегралы

𝔇𝔢𝔣 5.4.1. $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто. G_i монотонно исчерпывет G, если G_n открыто, $G_k \supset \operatorname{cl} G_{k-1}$ и $G = \bigcup G_k$.

Теорема 5.4.1. $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто. Тогда существует последовательность G_i открытых измеримых монотонно исчерпывающих G множеств.

▶ Нарежем $\mathbb{R}^n$ на замкнутые кубики с единичной стороной. Беру те, что целиком влезли в G, беру внутренность выбранного множества как G_1. Продолжим алгоритм с кубиками со стрононами $1/2$, $1/4$ и так далее. Получим множества, открытые, измеримые, также покрывающие в конце G.

Покажем, что для каждого k есть m, что $\operatorname{cl} G_k \subset G_m$. Возьмём граничную точку G_k. Его граничная точка лежит в открытом G, при каком-то m_1 эту точку накроет. Теперь покажем, что можно выбрать m сразу для всех точек $\operatorname{cl} G_k$. Рассмотрим фнукцию расстояния от точки $\operatorname{cl} G_k$ до ∂G. Она непрерывна на компакте и больше нуля, значит есть минимум, больший нуля. Подгоним m под него. ◀

𝔇𝔢𝔣 5.4.2. $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, интегрируема на любом измеримом $D \subset G$, таких что $\operatorname{cl} D \subset G$, G открыто.

$$\int\limits_{G} f(x)\mathrm{d}x = A$$

если для любой последовательности измеримых G_k монотонно исчерпывающих G

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{G_k} f(x)\mathrm{d}x = A$$

Замечание 5.4.1. Для $n = 1$ определение <u>**совсем**</u> другое. Оно слабее: там мы брали интегралы только из начальной точки до некоторой, а тут можем брать интегралы по вообще любым объединениям отрезков. Тогда, например, в примере 5.3.1 у нас сходимости при $0 < p < 1$ не получилось: можем в G_k брать $2k$ «пиков» синусов и k «провалов», тогда интегралы будут увеличиваться, но мы, тем не менее, всё покроем.

Теорема 5.4.2. $f \geqslant 0$, $f\colon G \to \mathbb{R}$, G открыто. Тогда для каждой последовательности G_k предел существует: конечный или бесконечный, и не зависит от выбора G_k.

▶ Так как $G_k \subset G_{k+1}$, то $\int_{G_k} f \leqslant \int_{G_{k+1}} f$. Эта последовательность монотонно растёт, значит есть предел (возможно, не конечный).

Едиснтвенность: пусть есть другая последовательность G'_k. Замыкание конечного измеримого множества есть компакт.

$$\operatorname{cl} G'_m \subset \bigcup G_k = G$$

Компакт $\operatorname{cl} G'_i$ покрыт конечным числом открытых, можно выбрать конечное подпокрытие, но они все вложенны, значит лежит в самом большом:

$$G'_m \subset \operatorname{cl} G'_m \subset G_l$$

Значит множества G'_k зажаты G_k-ыми, значит интералы зажаты, значит у $\int_{G'_i} f$ предел такой же, как у $\int_{G_i} f$. ◀

Следствие 5.4.2.1 (Признак сравнения). $f \geqslant g \geqslant 0$, $f, g\colon G \to \mathbb{R}$, G открыто.

1. Если $\int_G f$ сходится, то и $\int_G g$ сходится.
2. Если $\int_G g$ расходится, то и $\int_G f$ расходится.

▶ Перейдём к последовательностям, там знаки сохранятся. ◀

$\mathfrak{Def}$ 5.4.3. Интеграл функции абсолютно сходится, если сходится интеграл модуля.

Теорема 5.4.3. Для $n > 1$ абсолютная сходимость равносильна сходимости.

▶ **$\Leftarrow$:** Рассмотрим

$$f_\pm = \frac{|f| \pm f}{2}$$

Для них справедливо, что $0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$. Если $\int_G |f|$ сходится, то сходятся $\int_G f_\pm$, а

$$\int\limits_G f = 2\int\limits_G f_+ - \int\limits_G |f|$$

что тоже тогда сходится.

$\Rightarrow$: От противного: пусть $\int_G |f|$ расходится. Тогда

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\bar{G}_k} |f| = +\infty \qquad \int\limits_{\bar{G}_k} |f| \uparrow \qquad \textbf{TODO}$$

Прорядим последовательность так, чтобы

$$\int\limits_{\bar{G}_{k_{j+1}}} |f| > 3\int_{\bar{G}_{k_j}} |f| + 2j$$

Переобозначим до

$$\int\limits_{G_{k+1}} |f| > 3\int_{G_k} |f| + 2k$$

$A_k = G_{k+1} \setminus \operatorname{cl} G_k$ — открытое.

$$\int\limits_{A_k} f_+ + \int\limits_{A_k} f_- = \int\limits_{A_k} |f| > 2\int_{G_k} |f| + 2k$$

Отсюда $\int_{A_k} f_+ > \int_{G_k} |f| + k$ или[1] $\int_{A_k} f_- > \int_{G_k} |f| + k$, отдельно для каждого k.
Не умаляя общности, пусть $\int_{A_k} f_+ > \int_{G_k} |f| + k$. Рассмотрим суммы Римана для $\int_{A_k} f_+$. Тогда существует такое δ, что при любом разбиении A_k на E_j мелкости не более δ и любом выборе $\xi_j \in E_j$ имеем:

$$\sum f_+(\xi_j)\mu E_j > \int\limits_{G_k} |f| + k$$

Выберем такие ξ_j, чтобы все E_j, где как-то достигается ноль f_+, он был достигнут. Теперь выкинем все такие E_j и все E_j нулевой меры, сумма не изменится. Обозначим объединение внутренностей всех E_j, что остались, за B_k. $B_k \subset A_k$, B_k — открытое, при этом на B_k имеем $f_+ = f > 0$ (так как там, где $f \leqslant 0$ у f_+ достигался ноль и мы их выкинули).

$$\int\limits_{B_k} f = \int\limits_{B_k} f_+ > \int\limits_{G_k} |f| + k \geqslant -\int\limits_{G_k} f + k$$

$C_k = B_k \cup G_k \subset G_{k+1}$ — открытое.

$$\int\limits_{C_k} f = \int\limits_{B_k} f + \int\limits_{G_k} f > k$$

Получили последовательность C_k, что $G_k \subset C_k \subset G_{k+1}$ и $\operatorname{cl} C_{2k} \subset \operatorname{cl} G_{2k+1} \subset G_{2k+2} \subset C_{2k+2}$. Теперь C_{2k} монотонно исчерпывает G, и при этом $\int_{C_{2k}} f > 2k$, что противоречит сходимости f.

◀

Тут кончился материал на коллоквиум. Вроде бы.

[1]математическое

Глава 6

Ряды

6.1. Числовые ряды

$\mathfrak{Def}$ **6.1.1.** Конструкция $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд.

Замечание 6.1.1. Начинаться может с любого целого индекса.

$\mathfrak{Def}$ **6.1.2.** Частичная сумма ряда $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$.

$\mathfrak{Def}$ **6.1.3.** Если есть предел $\lim_{n\to\infty} S_n \in \bar{\mathbb{R}}$, то суммой ряда называют

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\mathfrak{Def}$ **6.1.4.** Ряд сходится, если его сумма конечна. Соотвественно, ряд расходится, когда его сумма бесконечна или не сущесвтует.

Пример 6.1.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \quad S_n = n$$

Расходится, сумма есть $+\infty$.

Пример 6.1.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad S_n = n \bmod 2$$

Расходится, сумма не существует.

Пример 6.1.3 (Геометрическая прогрессия). $q \in (0, 1)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$$

Сходится к $\frac{1}{1-q}$.

Пример 6.1.4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

Сходится к 1.

Пример 6.1.5 (Гармонический ряд).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln n$$

Расходится, сумма бесконечна.

Свойства:

1. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ сходятся одновременно.
2. $\sigma_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ — остаток (хвост) ряда. Если ряд сходится, то остаток стремится к нулю.
   ▶
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to S$$
   $$S_n - S_m \xrightarrow{n\to\infty} S - S_m$$
   $S_n - S_m$ — частичная сумма для остатка, значит $\sigma_m = S - S_m \to S$. ◀
3. Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся, то $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ сходится и
   $$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
   ▶ Следует из свойств пределов. ◀
4. Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и $a_n \leqslant b_n$, то $\sum a_n \leqslant \sum b_n$

   $\mathfrak{Def}$ 6.1.5. Если $a_n \in \mathbb{C}$, то $\sum_{k=1}^{n} a_k \in \mathbb{C}$. Ряд сходится в $\mathbb{C}$, если существует предел $\lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{C}$.

   Замечание 6.1.2. Сходимость комплексного ряда равносильна сходимости вещественной и мнимой частей ряда как вещесвтенных рядов.

Теорема 6.1.1 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.

▶
$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$$
◀

Теорема 6.1.2 (Критерий Коши)**.** $\sum_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n \geqslant m > N \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

▶ $\sum_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся частичные суммы, а для них есть критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n \geqslant m > N \; |S_n - S_m| < \varepsilon$$

◀

Def 6.1.6. Группировка членов ряда:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + \dots$$
$$\underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)}_{A_1} + \underbrace{(a_4 + a_5)}_{A_2} + \underbrace{a_6}_{A_3} + \underbrace{(}\, a_7 + a_8)_{A_4} + \underbrace{(a_9 + a_{10})}_{A_5} + \dots$$

Свойства:

1. Если ряд имеет сумму в $\bar{R}/\mathbb{C}$, то группировка имеет ту же сумму.

   ▶ Частичные суммы для A_n есть подпоследовательность частичных сумм для a_n. ◀

   Замечание 6.1.3. Обратное неверно:

   $$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

2. Если $a_n \to 0$ и в каждой группе не более M членов, то из сходимости сгрупированного ряда следует сходимость исходного.

   ▶ Пусть S_{n_m} — подпоследовательность частичных сумм, которую даёт сгрупированный ряд. $S_{n_m} \to S$.

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall m > N\, |S_{n_m} - S| < \varepsilon$$

   Если $n_m \leqslant n < n_{m+1}$, то

   $$S_n = S_{n_m} + \underbrace{a_{n_m+1} + a_{n_m+1} + \dots}_{\text{не более } M \text{ штук}}$$

   Мы знаем, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1 \colon \forall k > N_1, |a_k| < \varepsilon$ Возьмём $n > \max\{N_1, n_N\}$, тогда

   $$|S_n - S| \leqslant |S_n - S_{n_m}| + |S_{n_m} - S| < M\varepsilon + \varepsilon = (M+1)\varepsilon$$

   ◀

3. Если при группировке ряда в каждой группе члены одного знака и группировка сходится, то сходится и исходный ряд.

   ▶ Пусть S_{n_m} — подпоследовательность частичных сумм, которую даёт сгрупированный ряд. $S_{n_m} \to S$.
   Если $n_m \leqslant n < n_{m+1}$, то

   $$S_n = S_{n_m} + \underbrace{a_{n_m+1} + a_{n_m+1} + \dots}_{\text{одного знака}}$$

   Если они положительны, то $S_{n_m} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{m+1}}$. Иначе знаки противоположны. Отсюда S_n зажато S_{n_m} и $S_{n_{m+1}}$, а они сходятся к S, значит $S_n \to S$. ◀

6.2. Знакопостоянные ряды

Теорема 6.2.1. $a_n \geqslant 0$. $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда частичные суммы ограниченны.

▶ S_n — монотонная последовательность. ◀

Теорема 6.2.2 (Признак сравнения)**.** $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

1. Если $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится.
2. Если $\sum a_n$ расходится, то $\sum b_n$ расходится.

▶ A_n, B_n — частичные суммы, $0 \leqslant A_n \leqslant B_n$, $A_n, B_n \uparrow$. Теперь если сошлась B_n, сойдётся и A_n. Если A_n не сошлась, то B_n тоже стремится к бесконечности. ◀

Следствие 6.2.2.1. Если $a_n, b_b \geqslant 0$ и $a_n \sim b_n$, то их ряды ведут себя одинакого.

▶

$$a_n \sim b_n \Rightarrow \exists N \colon \forall n > N \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon \to a_n < (1+\varepsilon)b_n \land b_n < \frac{a_n}{1+\varepsilon}$$

◀

Теорема 6.2.3 (Признак Коши)**.** $a_n \geqslant 0$.

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится.
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится.
3. Пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q^*$. Тогда
   (a) Если $q^* < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится.
   (b) Если $q^* > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится.
   (c) Если $q^* = 1$, то бывает и так, и так.

▶ 1.

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q \Rightarrow a_n \leqslant q^n$$

Значит a_n зажата нулём и геометрической прогрессией.

2.

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \Rightarrow a_n \geqslant 1 \Rightarrow a_n \nrightarrow 0$$

3. $q^* = \lim_{n\to\infty}$. Пусть $q^* < 1$. Тогда начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \frac{1+q^*}{2} = q < 1$. Пусть $q^* > 1$. Тогда начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} > 1$.

◀

Пример 6.2.1. $\sum 1$ расходится, а $\sqrt[n]{1} = 1$. В то же время для $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\ \underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\to 1}} \to 1$$

Теорема 6.2.4 (Признак Даламбера)**.** $a_n > 0$.

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то $\sum a_n$ сходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то $\sum a_n$ рассходится.
3. Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Тогда
   (a) Если $d^* < 1$, то ряд сходится.
   (b) Если $d^* > 1$, то ряд расходится.
   (c) Если $d^* = 1$, то бывает и так, и так.

Замечание 6.2.1. D'Alembera Cauchy

▶ 1.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d \Rightarrow a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots \leqslant d^n a_1$$

2.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \Rightarrow a_{n+1} \geqslant a_n$$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$. Пусть $d^* < 1$. Тогда с некоторого места $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+d^*}{2} = d < 1$. Пусть $d^* > 1$. Тогда с некоторого места $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$.

◀

Замечание 6.2.2. Подходят те же примеры.

Пример 6.2.2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$a_n = \frac{x^n}{n!}$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1$$

Ряд сходится. Мы даже знаем, что это на самом деле e^x.

Теорема 6.2.5. $a_n > 0$. Если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^*$, то $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d^*$.

▶
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (\ln a_{n+1} - \ln a_n) = \ln d^*$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d^* \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \ln d^*$$

Применим ко второму теорему Штольца:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n - \ln a_{n-1}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} (\ln a_n - \ln a_{n-1}) = d^*$$

◀

Есть ещё бесконечное количество признаков. Они появлялись, когда для нужного кому-нибудь ряда не хватало уже существовавших, и из доказательства его сходимости получался новый признак. Их можно в справочниках найти в огромных количествах.

Теорема 6.2.6. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ неотрицательна и монотонна, $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда
$$\left| \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \max\{f(a), f(b)\}$$

▶ **TODO** Картинка.

Рассмотрим случай убывания.
$$\sum_{k=a+1}^{b} f(k) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

Вычтем из $\sum_{k=a}^{b} f(x)$ все слагаемые:
$$0 \leqslant f(b) \leqslant \sum_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(a)$$

◀

Замечание 6.2.3. Если нет неотрицательности, то

$$\left|\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$$

Замечание 6.2.4. Посмотим на случай убывания ещё раз. КАРТИНКААА.

$$c_b = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Она ограничена сверху $f(a)$ и растёт. Значит есть предел

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + C + o(1)$$

Пример 6.2.3.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{n^p} + \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^p} + C_p + o(1) = \frac{1}{n^p} + \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^n + C_p + o(1) = \frac{n^{1-p}}{1-p} + \tilde{C}_p + o(1)$$

Теорема 6.2.7 (Интегральный признак сходимости)**.** $f \geqslant 0$ и монотонно убывает. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ведут себя одинакого.

▶ $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$$\left|S_n - \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant f(1)$$

$$S_n \leqslant \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x + f(1)$$

$$\int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_n + f(1)$$

◀

Пример 6.2.4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

При $p \leqslant 0$ не сходится, потому что $1/n^p \nrightarrow 0$. При $p > 0$ функция убывает, и ряд ведёт себя так же, как и интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

а мы уже знаем, что он сходится только при $p > 1$.

Следствие 6.2.7.1. Положительный ряд сходится, если он оценивается $\frac{c}{n^p}$ при $p > 1$.

Следствие 6.2.7.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$f(x) = 1/(x \ln x)$ когда-нибудь начнёт убывать. Значит ряд и

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$$

ведут себя одинакого, а он

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty$$

6.3. Знакопеременные ряды

Def 6.3.1. Ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

Свойства:

1. Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно, то абсолютно сходится и $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$.
2. Для вещественных рядов: если ряд абсолютно сходится, то сходятся и $\sum(a_n)_+$ и $\sum(a_n)_-$, где
$$(a_n)_+ = \max\{0, a_n\} \quad (a_n)_- = \max\{0, -a_n\}$$
3. Если ряд абсолютно сходится, то он просто сходится и
$$\left|\sum a_n\right| \leqslant \sum |a_n|$$
4. Для комплексных рядов: если ряд абсолютно сходится, то абсолютно сходятся и $\sum \operatorname{Re} a_n$ и $\sum \operatorname{Im} a_n$.

▶ 1.

$$|\alpha a_n + \beta b_n| \leqslant |\alpha||a_n| + |\beta||b_n|$$

2.

$$0 \leqslant (a_n)_\pm \leqslant |a_n|$$

4

$$0 \leqslant |\operatorname{Re} a_n| \leqslant |a_n|$$
$$0 \leqslant |\operatorname{Im} a_n| \leqslant |a_n|$$

3 В вещественном случае: мы уже знаем, что $\sum(a_n)_\pm$ сходятся, значит $\sum a_n = \sum\left((a_n)_+ - (a_n)_-\right)$ тоже сходится.
В комплексном случае: мы уже знаем, что $\sum \operatorname{Re} a_n$ и $\sum \operatorname{Im} a_n$ абсолютно сходятся, значит по предыдущему абзацу они просто сходятся. Отсюда $\sum a_n = \sum(\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n)$ тоже сходится.
Неравенство: мы уже знаем, что пределы частичных сумм существуют, поэтому просто перейдём к пределу в

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |a_n|$$

◀

Замечание 6.3.1. Абсолютная сходимость ряда равносильна абсолютной сходимости вещесвтенной и мнимой части.

▶

$$|a_n| \leqslant |\operatorname{Re} a_n| + |\operatorname{Im} a_n|$$

◀

Замечание 6.3.2. Абсолютная сходимость ряда равносильна абсолютной сходимости $(a_n)_\pm$.

▶

$$|a_n| = (a_n)_+ + (a_n)_-$$

◀

𝔇𝔢𝔣 6.3.2. Ряд, который сходится, но не сходится абсолютно, называется условно сходящимся.

Теорема 6.3.1 (Преобразование Абеля)**.** $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $A_0 = 0$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Некоторый аналог интегрирования по частям.

Пример 6.3.1.

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot H_n = nH_n + \sum_{k=1}^{n-1} k(H_k - H_{k+1}) =$$
$$= nH_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = nH_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k+1} - 1\right) + (n-1) =$$
$$= nH_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + (n-1) = (n+1)H_n - n$$

Теорема 6.3.2 (Признак Дирихле)**.** $\left|\sum_{k=1}^{n} a_n\right| \leqslant M$, b_k монотонно стремятся к нулю. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

▶

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{A_n}_{\leqslant M} \underbrace{b_n}_{\to 0} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Хотим показать, что абсолютно сходится $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |\underbrace{b_k - b_{k+1}}_{\text{одного знака}}| = M|\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})| = Mb_1$$

Получили. ◀

Пример 6.3.2. $p > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$$

Оно всегда сходится:

$$a_n = \sin n \quad b_n = \frac{1}{n^p}$$

$$A_n = \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \operatorname{Im}(e^i + e^{2i} + \dots + e^{ni}) = \operatorname{Im}\left(e_i \frac{e^{ni}-1}{e^i-1}\right)$$

$$|A_n| \leqslant \left|e_i \frac{e^{ni}-1}{e^i-1}\right| = \frac{|e^{ni}-1|}{|e^i-1|} \leqslant \frac{2}{|e^i-1|}$$

Абсолютная сходимость: при $p > 1$ оценивается сходящимся рядом $\sum 1/n^p$. Иначе не сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^p} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n}{n^p} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n^p}$$

Первое слагаемое расходится, второе сходится по Дирихле.

Теорема 6.3.3 (Признак Абеля)**.** $\sum_{k=1}^{n} a_n$ сходится, b_k монотонна и ограниченна. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

▶ Существует предел $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_b = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) + b \sum_{i=1}^{\infty} a_n$$

Второе слагаемое сходится, а первое попадает под условие Дирихле: $b_n - b$ монотонно сходится к нулю. ◀

Теорема 6.3.4 (Признак Лейбница)**.** $b_k \geqslant 0$ монотонны. Тогда ряд $\sum(-1)^{n-1} b_n$ сходится тогда и только тогда, когда $b_n \to 0$.

▶ **Простое доказательство:** $a_n = (-1)^{n-1}$, смотрим на признак Дирихле.

Прямое доказательство: Мы, вообще говоря, знаем, что b_n убывает.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_k$$
$$S_{2n+2} = S_{2n} + b_{2n+1} - b_{2n+2} \geqslant S_{2n}$$
$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + b_{2n} - b_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$$
$$[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset \dots$$

Длины отрезков равны $b_{2n+1} \to 0$. Значит границы отрезков стремятся к единственной общей точке всех этих отрезков, и частичные суммы сходятся.

◀

Замечание 6.3.3.
$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$$

Пример 6.3.3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$
сходится при $p > 0$.

Пример 6.3.4 (Ряд Лейбница).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$
Он сходится, это уже знаем.
$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\right) = H_{2n} - H_n = \ln(2n) - \ln n + o(1) = \ln 2 + o(1)$$

Пример 6.3.5.
$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \ldots$$
Это в точности предыдущий ряд с изменённым порядком элементов. Покажем, что оно сойдётся нетуда:
$$\tilde{S}_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} =$$
$$= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_{2n} = \frac{1}{2}(H_{2n} - H_n) = \frac{1}{2}(\ln 2 + o(1))$$
Ой.

𝔇𝔢𝔣 6.3.3. $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция. Перестановкой ряда $\sum a_n$ называется ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Теорема 6.3.5. Если ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится и $\sum a_n = S \in \bar{\mathbb{R}}$, то любая его перестановка сходится к S.

Замечание 6.3.4. Ряд из неотрицательных элементов при перестановке ведёт себя также.

▶ Пусть $a_n \geqslant 0$. Докажем, что $\sum a_{\varphi(n)} = S \in \bar{\mathbb{R}}$.
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(n)}$$
$$\forall n\, \exists m\colon \bar{S}_n \leqslant S_m \quad m = \max\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)\}$$
$$\bar{S}_n \leqslant \lim_{n\to\infty} S_m = S$$
$$\bar{S} = \lim_{n\to\infty} \bar{S}_n \leqslant \lim_{n\to\infty} S_m = S$$
$$\bar{S} \leqslant S$$

Применив обратную перестановку, получим $\bar{S} \geqslant S$.

Общий случай: раз $\sum a_n$ абсолютно сходятся, значит $\sum (a_n)_\pm$ сходятся. Там мы можем переставлять, а потом сложим их после перестановки, получим то, что нужно.

А если был ещё и комплексный ряд, разбить его на вещественную и мнимую части. ◀

Замечание 6.3.5. Если ряд условно сходится, то $\sum(a_n)_+$ и $\sum(a_n)_-$ расходятся.

▶ $\sum|a_n| = \sum(a_n)_+ + (a_n)_-$ расходится, а $\sum a_n = \sum(a_n)_+ - (a_n)_-$ сходится. ◀

Теорема 6.3.6 (Римана)**.** Ряд $\sum a_n$ условно сходится. Тогда для всех $s \in \bar{\mathbb{R}}$ существует перестановка $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$$

Также существует перестановка, для которой $\sum a_{\sigma(n)}$ расходится (не имеет никакого предела).

▶ Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_+ \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_-$$

Они имеют бесконечную сумму. Вспомним, что

$$\sum(a_n)_+ - \sum(a_n)_- = \sum a_n$$
$$\sum(a_n)_+ + \sum(a_n)_- = \sum|a_n| = +\infty$$

Рассмотрим $\sum b_n$ — ряд $\sum a_n$, из которого стёрли все $a_n < 0$, и $\sum c_n$ — ряд $\sum a_n$, из которого стёрли все $a_n \geqslant 0$. Они вместе составляли $\sum a_n$.

$$\sum b_n = \sum(a_n)_+ = +\infty$$
$$\sum c_n = -\sum(a_n)_- = -\infty$$

Мы уже знаем, что $\sum a_n$ сходится, откуда $\lim a_n = 0$, значит также $\lim b_n = \lim c_n = 0$.

Случай $0 \leqslant S < +\infty$**:** Будем брать b_i до тех пор, пока сумма не перевалит за S. Это возможно, так как сумма $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ бесконечна.

$$\underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n_1-1}}_{\leqslant S} + b_{n_1} > S$$

Затем будем брать c_i до тех пор, пока сумма не станет меньше S: Это также возможно, так как сумма $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ бесконечна.

$$\underbrace{b_1 + \dots + b_n + c_1 + c_2 + c_3 + \dots c_{m_1-1}}_{\geqslant S} + c_{m_1} < S$$

Потом снова b_i, потом снова c_i, и так далее. Получили перестановку, так как каждый элемент мы возьмём ровно один раз. Покажем, что сумма ряда действительно S. Мы знаем, если сгруппировать ряд так, что в каждой скобке будет один знак, то его сумма равна сумме исходного. Сгруппируем так, как добавляли:

$$(b_1 + \dots + b_{n_1}) + (c_1 + \dots + c_{m_1}) + (b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2}) + (c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2}) + \dots$$

Обозначим за t_n частичную сумму из первых n скобок. Надо показать, что $t_n \to S$. Мы знаем, что

$$t_{2k-1} > S > t_{2k} \quad t_{2k-1} - b_{n_k} \leqslant S \leqslant t_{2k} - c_{m_k}$$
$$S < t_{2k-1} \leqslant \underbrace{S + b_{2k}}_{\to S} \quad \underbrace{c_{m_k} + S}_{\to S} \leqslant t_{2k} < S$$

Случай $-\infty < S < 0$**:** Начнём с c_i, потом b_i и так далее.

Случай $S = +\infty$: Аналогично берём b_i: чтобы перевалило через 1, 2, 3 и так далее, между ними по одной c_i:

$$\underbrace{(b_1 + \dots + b_{n_1})}_{>1} + c_1 + \underbrace{(b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2})}_{>2} + c_2 + \dots$$

Как видно, частичные суммы достигают как угодно большие значения, и не сильно просидает вниз.

Случай $S = -\infty$: Аналогично, только c_i сначала берём.

Расходится: Берём b_i до 1, c_i до -1, потом b_i до 2, c_i до -2, и так далее.

◀

Теорема 6.3.7 (Коши)**.** Два ряда $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ сходятся абсолютно. Рассмотрим ряд, состоящий из всевозможных $a_i b_j$ в произвольном порядке. Этот ряд абсолютно сходится, и сумма его равна AB.

▶ Покажем для какого-то одного порядка, что ряд сходится абсолютно. Тогда для любой перестановки будет доказано автоматически.

Ряд такой:

$$\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & a_4b_1 \\ b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & a_4b_2 \\ b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_4b_3 \\ b_4 & a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{array}$$

Сначала возьмём всё из квадратика 1×1, потом слой из квадратика 2×2, потом 3×3 и так далее. За S_n обозначим сумму модулей на квадратике $n \times n$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < +\infty$$

Также посчитаем $\tilde{S}_n$ — сумму без модулей.

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \to A \cdot B$$

Теперь надо понять, что остальные частичные суммы не сильно выбиваются из $\tilde{S}_n$. Мы или не зашли за угол:

$$\tilde{S}_n + (a_n b_1 + a_n b_2 + \dots a_n b_k)$$

или зашли за угол

$$\tilde{S}_n + (a_n b_1 + a_n b_2 + \dots a_n b_n + a_{n-1} b_n + \dots + a_k b_n)$$

Оценим добавку:

$$|a_n(b_1 + \dots + b_k)| \leqslant |a_n|(|b_1| + \dots + |b_k|) \leqslant \underbrace{|a_n|}_{\to 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|}_{<\infty} \to 0$$

◀

𝔇𝔢𝔣 6.3.4. Произведением рядов $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_n$, где c_n — сумма на диагонали:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$$

Замечание 6.3.6. Зачем так? Возьмём кусок формулы Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

И ещё один кусок Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

И перемножим их. При x_n получим как раз нужный коэффициент:

$$\frac{1}{0!} \cdot \frac{2^n}{n!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{2^n}{0!}$$

Теорема 6.3.8 (Мертенса)**.** Ряд $\sum a_n = A$ абсолютно сходится, ряд $\sum b_n = B$ сходится. Тогда ряд–произведение $\sum c_n$ сходится к AB.

Замечание 6.3.7. Порядок менять нельзя. Абсолютной сходимости не обещаем.

Доказывать не будем. Она сложная и ненужная ©Храбров.

Упражнение 6.3.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Его «квадрат» не сходится.

6.4. Функциональные последовательности и ряды

𝔇𝔢𝔣 6.4.1. Есть последовательность $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ и $f\colon E \to \mathbb{R}$. f_n поточечно сходится к f, если

$$\forall x \in E, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

𝔇𝔢𝔣 6.4.2. Есть последовательность $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ и $f\colon E \to \mathbb{R}$. f_n равномерно сходится к f, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$$

Перепишем на кванторах первое определение:

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Отличие в том, что $\forall x \in E$ в первом снаружи, а во втором внутри. Из-за этого в первом случае N выбирается для x и ε, а во втором для ε и сразу всех x.

Замечание 6.4.1. Из равномерной сходимости следует поточечная.

Замечание 6.4.2. Если есть обе сходимости, то пределы равны.

Пример 6.4.1. $E = (0,1)$, $f_n(x) = x^n$. Они поточечно сходятся к 0.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N, \forall x \in (0,1), |x_n| < \varepsilon$$

Заметим, что при фиксированном n мы можем выбрать x_n сколь угодно близко к 1. Отсюда равномерной сходимости нет.

Теорема 6.4.1.

$$f_n \rightrightarrows_E f \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

▶ **Случай $\Rightarrow$:**

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n > N, \underbrace{\forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Случай $\Leftarrow$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n > N, \underbrace{\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|}_{\geqslant |f_n(x) - f(x)|} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$$

◀

Следствие 6.4.1.1. Если $\forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$ и $\lim a_n = 0$, то $f \rightrightarrows E$.

▶

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n \to 0$$

◀

Следствие 6.4.1.2. Если существует последовательность $x_n \in E$, что $f_n(x_n) - f(x_n) \nrightarrow 0$, то $f_n \not\rightrightarrows f$.

▶

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \nrightarrow 0 \Rightarrow \forall k, \left|f_{n_k}\left(x_{n_k}\right) - f\left(x_{n_k}\right)\right| > \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|\right| > \varepsilon$$

◀

𝔇𝔢𝔣 6.4.3. f_k равномерно ограничены M, если $|f_n(x)| \leqslant M$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in E$.

Теорема 6.4.2. f_n равномерно ограниченно на E, $g_n \rightrightarrows 0$ на E. Тогда $f_n g_n \rightrightarrows 0$.

▶

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) g_n(x) - 0| \leqslant M \sup_{x\in E} |g_n(x)|$$

◀

Теорема 6.4.3 (Критерий Коши)**.** $f_n \rightrightarrows f$ на E для некоторой f тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n, m > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

▶ **Случай $\Rightarrow$:** Как обычно,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$$

Случай $\Leftarrow$: Заметим, что при любом заданном $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ фундаментальна. Значит у неё есть какой-то предел $f(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Устремим $m \to \infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

То, что нужно.

◀

Теорема 6.4.4. $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, $a \in E$, f_n непрерывны в a, $f_n \rightrightarrows f$ на E. Тогда и f непрерывна в a.

▶ Надо показать:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f_a| < \varepsilon$$

Для $\varepsilon > 0$ есть N, что

$$\forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Возьмём одно такое n.

Далее, вспомним непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$$

Отсюда

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon \text{ по выбору } n} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{< \varepsilon \text{ по выбору } \delta} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{< \varepsilon \text{ по выбору } n} \leqslant 3\varepsilon$$

◀

Пример 6.4.2. Если равномерную сходимость убрать, то всё ломается. $f_n(x) = x^n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$.

$$f_n(x) \to \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

Это уже разрывная.

Следствие 6.4.4.1. $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, f_n равномерно сходятся на E, a — предельная точка E и предел $\lim_{x \to a} f_n(x)$ существует и конечен. Тогда оба предела ниже существуют, конечны и равны:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

▶ Определим функции g_n:

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \neq a \\ \lim\limits_{t \to a} f_n(t), & x = a \end{cases}$$

Все они непрерывны в точке a.

Покажем, что $g_n(x)$ имеют равномерный предел по критерию Коши. Очевидно, в $E \setminus \{a\}$ они равномерный предел имеют (так как его имеют f_n):

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\colon \forall n, m > N,\ \forall x \in E \setminus \{a\},\ |g_n(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $|g_n(x) - g_m(x)|$ непрерывна в точке a, то значение $|g_n(a) - g_m(a)|$ можно приблизить точкой $x \in E \setminus \{a\}$ с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$, т.о. критерий Коши автоматически выполняется и для всего E. Значит, $g_n(x)$ сходятся равномерно, пусть $g_n \rightrightarrows g$. Тогда по теореме знаем, что g непрерывна в точке a, т.е.:

$$g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

При этом из равномерной сходимости следует поточечная:

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} g_n(a) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty} f_n(x)$$

◀

𝔇𝔢𝔣 6.4.4. K — компакт. $C(K)$ — пространство непрерыных функций на K с нормой

$$\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K}|f(x)|$$

Теорема 6.4.5. $C(K)$ — полное нормированное пространство.

▶ $\| \ \|_{C(K)}$ — норма:

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$
$$\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$$
$$\|f\| \geqslant 0 \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$$

Проверим полноту. Пусть f_k фундаментальна. Это по определению:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n,m > N, \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Но так как $\forall x, \|f_n - f_m\| \geqslant |f_n(x) - f_n(x)|$, таким образом $\{f_n(x)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, а значит есть предел $f(x)$. Покажем, что $\|f_n - f\| \to 0$:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n,m > N, \forall x\in K, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \xRightarrow{m\to\infty}$$
$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N, \forall x \in K, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\| = \max|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Получили

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n > N, \|f_n - f\| \leqslant \varepsilon$$

Это определение предела для f_n в $C(K)$. Теперь, раз мы знаем, что $f_n \rightrightarrows E$, то мы знаем, что f непрерывна и лежит в $C(K)$. ◀

𝔇𝔢𝔣 6.4.5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно/равномерно, если частичные суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

сходятся поточечно/равномерно.

𝔇𝔢𝔣 6.4.6. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно, то остатком (хвостом) называют

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

Теорема 6.4.6. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E тогда и только тогда, когда его остаток равномерно стремится к нулю на E.

▶

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$
$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

Отсюда ряд равномерно сходится тогда и только тогда, когда $S_n \rightrightarrows S$, что равносильно $r_n = S - S_n \rightrightarrows 0$. ◀

Следствие 6.4.6.1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E, то $u_n \rightrightarrows 0$.

▶

$$u_n = r_{n+1} - r_n \rightrightarrows 0 - 0 = 0$$

◀

Теорема 6.4.7 (Критерий Коши для равномерной сходимости)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall m, n > 0, \forall x \in E, \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

▶ Применим критерий Коши для равномерной сходимости частичных сумм

$$S_m(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)$$

◀

Замечание 6.4.3. Если $x_n \in E$, и $u_n(x_n) \nrightarrow 0$, то ряд не сойдётся равномерно:

$$u_n(x) \nrightarrow 0 \Rightarrow \sup_{x \in E} |u_n(x)| \nrightarrow 0 \Rightarrow u_n \not\rightrightarrows 0$$

Но из того, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$ расходится, ничего не следует.

Пример 6.4.3. $u_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in (\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}] \\ 0 \end{cases}$$

$$u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(\frac{1}{n}\right) \text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{сходится} \Leftarrow |r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \to 0$$

Теорема 6.4.8 (Признак сравнения)**.** $\forall x \in E, |u_n(x)| \leqslant v_n(x)$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится, то равномерно сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

▶

$$\sum v_n(x) \text{ равномерно сходится} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall m, n > N, \forall x \in E, \left|\sum_{k=n}^{m} v_n(x)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |u_n(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{m} v_n(x) = \left|\sum_{k=n}^{m} v_n(x)\right|$$

Значит $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E. ◀

Следствие 6.4.8.1 (Признак Вейерштрасса). Пусть $\forall x \in E, |u_n(x)| \leqslant c_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

▶ $v_n(x) = c_n$. Для численных рядов поточечная и равномерная сходимость — одно и то же, так как от x ничего не зависит. ◀

Следствие 6.4.8.2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ тоже сходится равномерно.

▶ $v_n(x) = |u_n(x)|$. ◀

Теорема 6.4.9 (Признак Дирихле)**.** Если

1. $\exists M\colon \forall n, \forall x \in E, \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M$ (частичные суммы ограниченны)
2. Для каждого x функция $b_n(x)$ монотонна.
3. $b_n \rightrightarrows 0$ на E.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E.

▶ Преобразуем по Абелю:

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_n(x)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x) = A_n(x) b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_n(x) \left(b_k(x) - b_{k+1}(x)\right)$$

Первое слагаемое — произведение раномерно ограниченной на равномерно стремящуюся к 0, значит равномерно сходится к 0. Второе слагаемое — возьмём $v_n(x) = M|b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ и покажем, что $\sum v_n$ равномерно сходится.

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = M \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|b_k(x) - b_{k+1}(x)|}_{\text{для каждого } x \text{ одного знака}} = M \left| \sum_{k=1}^{n} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| = M|b_1(x) - \underbrace{b_{n+1}(x)}_{\rightrightarrows 0}| \rightrightarrows M|b_k(x)|$$

◀

Теорема 6.4.10 (Признак Абеля)**.** Если

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на E.
2. Для каждого x функция $b_n(x)$ монотонна.
3. b_n равномерно ограниченна.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E.

▶

Замечание 6.4.4. Признак Дирихле по аналогии с численным случаем использовать не будем — не получится, так как если положить $b_n(x) = x^n$ на $(0, 1)$, то у нас получится подходящее под условие b_n, но без равномерной сходимости, которая потребуется в доказательстве.

На консультации попросили вывести доказательство, не получилось, из билетов доказательство выкинута, формулировка осталась, она верная.

◀

Теорема 6.4.11 (Признак Лейбница)**.** $b_n(x) \geqslant 0$, $b_n \rightrightarrows 0$, $b_n(x)$ убывают для каждого x. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n(x)$ равномерно сходится.

▶ Возьмём $a_n(x) = (-1)^n$ и признак Дирихле. ◀

6.5. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 6.5.1. $u_n\colon E \to \mathbb{R}$, u_n непрерывно в $a \in E$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится. Тогда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в a.

▶ $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывна в a. Отсюда по аналогичной теореме про последовательности S непрерывна в a. ◀

Теорема 6.5.2. $f_n \in C[a,b]$, $c \in [a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_c^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$$

Более того,

$$\int\limits_c^x f_n(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$$

(равномерно по x)

▶ Мы знаем, что f непрерывна, значит её интеграл корректен.

$$F_n(x) \leftrightarrow \int\limits_c^x f_n(t)\mathrm{d}t \quad F(x) \leftrightarrow \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int\limits_c^x (f_n(t) - f(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant \int\limits_c^x |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant |x-c| \max_{t\in[c,x]} |f_n(t) - f(t)| \leqslant (b-a) \max_{t\in[a,b]} \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow |F_n - F| \rightrightarrows 0 \Rightarrow F_n \rightrightarrows F$$

◀

Следствие 6.5.2.1. $u_n \in C[a,b]$, $c \in [a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^x u_n(t)\mathrm{d}t$$

▶ $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_n(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_c^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_c^x \sum_{k=1}^{n} u_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_c^x u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_c^x u_n(t)\mathrm{d}t$$

◀

Пример 6.5.1. Важна равномерная сходимость f_n.

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$
$$\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$
$$\int\limits_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 nte^{-nt^2}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-nt^2}}{2}\Bigg|_{t=0}^1 = \frac{1-e^{-n}}{2} \to \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$
$$\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 0\mathrm{d}t = 0$$
$$\frac{1}{2} \neq 0$$

Можно дополнительно удостовериться, что $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ действительно не сходятся равномерно на $[0,1]$, взяв последовательность:

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{e} \to +\infty \Rightarrow \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to +\infty$$

Теорема 6.5.3. $f_n \in C^1[a,b]$, $c \in [a,b]$, $f_n' \rightrightarrows g$ на $[a,b]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(c)$ существует и конечен. Тогда

1. $f_n \rightrightarrows h$ на $[a,b]$.
2. h — дифференцируемая функция, и $h' = g$

То есть

$$\Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{h(x)}\Bigg)' = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n'(x)}_{g(x)}$$

▶

$$\int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int\limits_c^x f_n'(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(c)) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(c)$$

Отсюда $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ существует и конечен (на самом деле, этим фактом мы дальше не пользуемся — сразу доказываем равномерную сходимость). Но из предыдущей теоремы мы также знаем, что

$$f_n(x) - f_n(c) = \int\limits_c^x f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t$$

откуда $f_n(x) - f_n(c)$ равномерно сходится на $[a,b]$, а так как $f_n(c)$ равномерно сходится (потому что от x не зависит), то $f_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$.

Назовём этот предел h. Тогда посмотрим на равенства выше:

$$h(x) - h(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(c) = \int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = h(c) + \int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t$$

g непрерывна как равномереный предел непрерывных функций, значит $\int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t$ дифференцируема и

$$h'(x) = g(x)$$

◀

Следствие 6.5.3.1. $u_n \in C^1[a,b]$, $c \in [a,b]$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ сходится. Тогда

1. $\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ равномерно сходится к дифференцируемой функции.
2. $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

▶

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) \rightrightarrows \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \leftrightarrow g(x) \Rightarrow f_n' \rightrightarrows g$$

$f_n(c)$ имеет конечный предел, теперь все условия теоремы выполнены:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_k'(x)$$

◀

Пример 6.5.2. Условие на равномерную сходимость ряда производных нужно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \text{ — равномерно сходится по Вейерштрассу}$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \text{ — расходится при } x = 2\pi k$$

6.6. Степеннные ряды

𝔇𝔢𝔣 6.6.1. $a_n \in \mathbb{C}$, $z, z_0 \in C$. Степенной ряд — это

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Замечание 6.6.1. Далее считаем, что $z_0 = 0$.

Теорема 6.6.1 (первая теорема Абеля)**.** Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_0$, то он абсолютно сойдется и при всех z, что $|z| < |z_0|$.

▶ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ сходится, значит $a_n z_0^n$ сходятся и ограниченны, откуда

$$|a_n z_0^n| \leqslant M \Rightarrow |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Но ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ сходится, так как это геометрическая прогрессия с основанием, меньшим 1. Отсюда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ сходится, а $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно. ◀

Следствие 6.6.1.1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится при $z = z_0$, то он разойдется и при всех z, что $|z| > |z_0|$.

Пример 6.6.1. Важно строгое неравенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

При $z = 1$ расходится, а при $z = -1$ сходится.

𝔇𝔢𝔣 6.6.2. Радиус сходимости степенного ряда — такое $R \in [0, \infty]$, что этот ряд сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

𝔇𝔢𝔣 6.6.3. Круг сходимости — открытый круг радиуса R.

Теорема 6.6.2.
1. Радиус сходимости всегда существует.
2. Если R — радиус сходимости и $0 \leqslant r < R$, то в круге $|z| \leqslant r$ ряд равномерно абсолютно сходится (как функциональный ряд от z).

▶
1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, и множество A таких $x \geqslant 0$, на которых есть сходимость. Оно не пусто, так как там есть ноль. Значит $\sup A \in [0, \infty]$.
   Поймём, что это и будет радиусом сходимости. Пусть $|z| < \sup A$. Тогда есть $x \in A$, что $|z| < |x|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится. Отсюда по теореме Абеля $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится.
   Аналогично, пусть $|z| > \sup A$. Тогда есть $x \in \bar{A}$, что $|z| > |x|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится. Отсюда по следствию $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится.
2. Пусть $r < R$. Тогда есть $x \in A$, что $r < x \leqslant R$, значит ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, откуда $a_n x^n$ ограниченно.
   Возьмём z: $|z| \leqslant r$.

   $$|a_n z^n| = |a_n x^n| \cdot \left|\frac{z}{x}\right|^n \leqslant M \left(\frac{r}{x}\right)^n$$

   Мы знаем, что $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{x}\right)^n$ сходится, откуда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ равномерно сходится по сравнению.

◀

Пример 6.6.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Радиус — 1.

Пример 6.6.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Радиус — $+\infty$ по признаку Даламбера.

Пример 6.6.4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$$

Радиус — 0 по признаку Даламбера.

Теорема 6.6.3 (вторая теорема Абеля)**.** Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = R \geqslant 0$. Тогда ряд сходится равномерно на $[0, R]$.

▶ $x \in [0, R]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ равномерно сходится на $[0, R]$, поскольку от x не зависит, а $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ равномерно ограниченна на $[0, R]$ единицей и монотонна. По признаку Абеля $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно сходится на $[0, R]$. ◀

Следствие 6.6.3.1. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = R \geqslant 0$. Тогда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна на $[0, R]$ и в частности

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

(непрерывность в R)

▶ $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ непрерывна, $S_n \rightrightarrows f$ на $[0, R]$, отсюда f непрерывна на $[0, R]$. ◀

Теорема 6.6.4 (Формула Коши-Адамара)**.**

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

▶

$$\rho \leftrightharpoons \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$$

$\rho = 0$**:** Покажем, что $R = +\infty$ и при всех z ряд сходится. Так как $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 0$ и $\rho = 0$, то

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

И тогда

$$\exists N \colon \forall n > N,\ \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z|} \Rightarrow |a_n| < \frac{1}{2^n |z|^n} \Rightarrow |a_n z^n| < \frac{1}{2^n}$$

Замечание 6.6.2. Можно было бы применить признак Коши.

$\rho = +\infty$**:** Покажем, что $R = 0$ и при всех $z \neq 0$ ряд расходится.

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \exists \{n_k\}\colon \lim_{n\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists N\colon \forall k > N,\ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{z} \Rightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| > 1$$

Отсюда $a_n z^n \nrightarrow 0$ и ряд расходится.

$\rho \in (0, \infty)$**:** Покажем, что $R = \frac{1}{\rho}$. Пусть $|z| < \frac{1}{\rho}$. Возьмём $\varepsilon > 0$, что $|z| < \frac{1}{\rho+\varepsilon}$.

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{|a_k|} = \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists N\colon \forall n > N, \sup_{k\geqslant N} \sqrt[k]{|a_k|} < \rho + \varepsilon \Rightarrow \forall k > N,\ \sqrt[k]{|a_k|} < \rho + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall k > N, |a_k z^k| < (\rho + \varepsilon)^k |z|^k$$

Значит ряд с некоторого места мажорируется геометрической прогрессией с знаменателем $(\rho + \varepsilon)|z| < 1$. Пусть $|z| > \frac{1}{\rho}$. Возьмём $\varepsilon > 0$, что $|z| > \frac{1}{\rho-\varepsilon}$.

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \Rightarrow \exists \{n_k\}\colon \lim_{n\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists N\colon \forall k > N,\ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon \Rightarrow |a_{n_k}| > (\rho - \varepsilon)^{n_k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| > ((\rho - \varepsilon)|z|)^{n_k} > 1$$

◀

6.7. Аналитические функции

𝔇𝔢𝔣 6.7.1. f аналитическая в точке x_0, если в некоторой окрестности x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Замечание 6.7.1. Сумма, линейная комбинация и произведение аналитических функций — аналитические.

Лемма 6.7.1. Следующие ряды имеют один и тот же радиус сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

▶ Как мы уже знаем,

$$R = \frac{1}{\varlimsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \varlimsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

Проверим, что верхний предел у трёх рядов один и тот же:

$$\varlimsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \cdot \varlimsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$
$$\varlimsup \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \varlimsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

◀

Теорема 6.7.1. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, R — радиус сходимости. Тогда

1. f бесконечно дифференцируема на $(x_0 - R, x_0 + R)$.
2. Для $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)}$$

3. Радиусы сходимости рядов из пунктов 1 и 2 равен R.

▶ 1.

$$y \in (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow \exists \delta > 0\colon [y-\delta, y+\delta] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$$

Значит на $[y-\delta, y+\delta]$ ряд сходится. Более того, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}$ также сходится на $(x_0 - R, x_0 + R)$, а на $[y-\delta, y+\delta]$ сходится равномерно. Отсюда по теореме о равномерной сходимости производных

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1}$$

на $[y-\delta, y+\delta]$, в том числе в точке y.

2.

$$y \in (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow [x_0, y] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$$

Значит на $[x_0, y]$ ряд сходится равномерно, и

$$\int\limits_{x_0}^{y} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{y} a_n(x-x_0)^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

3. Следует из леммы.

◀

Теорема 6.7.2. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Тогда

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

▶

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left((x-x_0)^n\right)^{(n)}$$

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left((x-x_0)^n\right)^{(n)}\Bigg|_{x=x_0} = a_k k!$$

◀

Следствие 6.7.2.1. Фукнция аналитична в x_0 тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности x_0 она есть сумма своего ряда Тейлора, взятого для точки x_0.

Пример 6.7.1. Наличие ряда Тейлора не гарантирует аналитичность.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

У этой функции производные для $x > 0$ выглядят как $R(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$, где R — некоторая рациональная функция. Далее,

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{R(x)e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = 0$$

так как экспонента убывает быстрее R. Тогда ряд Тейлора в нуле состоит из нулей. Но функция в любом $x > 0$ совсем не ноль.

Замечание 6.7.2. Бесконечноая дифференцируемость ещё не даёт аналитичности.

Разложим в ряды элементарные функции. Ровно год назад было:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Из радиусы сходимости бесконечны (проверить сходимость для любого x можно по Даламберу). А значит эти суммы верны в $\mathbb{C}$:

𝔇𝔢𝔣 6.7.2. $z \in C$.

$$e^z \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \sin z \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos z \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Это, кстати, первое честное определение синуса.
Свойства:

1. $$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

▶
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
◀

2. Формула Эйлера:
$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

3. $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

4. $$e^{z+w} = e^z e^w$$

   Отсюда следует вообще вся тригинометрия.

▶

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} z^k w^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

◀

Логарифм:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

Сходится при $|x| < 1$.

▶

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Проинтегрируем почленно:

$$\ln(1+x) = \ln(1+t)\Big|_{t=0}^{x} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

◀

Арктангенс:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Сходимость при $|x| < 1$.

▶

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Проинтегрируем почленно:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

◀

Степень:

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!} x^n$$

Сходимость при $|x| < 1$.

▶ Ряд Тейлора в интегральной форме:

$$(1+x)^p = \underbrace{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} x^k}_{\leftrightharpoons T_n(x)} + \frac{1}{n!} \int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t =$$

$$= T_n(x) + \frac{1}{n!} \int\limits_0^1 f^{(n+1)}(xs)(x-xs)^n x \mathrm{d}s = T_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int\limits_0^1 f^{(n+1)}(xs)(1-s)^n \mathrm{d}s = \cdots$$

$$f^{n+1}(t) = p(p-1)\dots(p-n)(1+t)^{p-n-1}$$

$$\cdots = T_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int\limits_0^1 p(p-1)\dots(p-n)(1+xs)^{p-n-1}(1-s)^n \mathrm{d}s =$$

$$= T_n(x) + \underbrace{\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} x^{n+1} \int\limits_0^1 (1+xs)^{p-1} \left(\frac{1-s}{1+xs}\right)^n \mathrm{d}s}_{\leftrightharpoons R_n(x)}$$

Если $p \geqslant 1$, то $\int \leqslant 2^{p-1}$, а при $p \leqslant 1$ имеет место $\left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{1-p}$. Это следует из того, что вторая скобка не больше 1, тогда оцениваем первую сверху (при $p \geqslant 1$) или снизу (при $p \leqslant 1$).

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} x^{n+1} \max\left\{2^{p-1}, \left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{1-p}\right\}$$

Хотим

$$\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} x^{n+1} \to 0$$

Для этого скажем, что по признаку Даламбера сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} x^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p(p-1)\dots(p-n)(p-n-1)x^{n+2}}{(n+1)!} \frac{n!}{p(p-1)\dots(p-n)x^{n+1}} = \frac{p-n-1}{n+1} x \to -x$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x| < 1$$

Отсюда элеметны ряда сходятся к нулю, откуда оценка хвоста правильная. ◀

Арксинус:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Сходимость при $|x| < 1$.

▶ $p = \frac{1}{2}$, $x = -x^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^{2n}(-1)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^2 n = 1 + \sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

◀

Глава 7

Поверхностные интегралы

7.1. Определение поверхности

$\mathfrak{Def}$ **7.1.1.** $G \subset \mathbb{R}^2$ — измеримая область (открытое линейно связное ограниченное множество), $\vec{r}\colon \operatorname{cl} G \to \mathbb{R}^3$ непрерывна. Тогда поверхностью называется образ $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$, а $\vec{r}$ — её параметризация.

$\mathfrak{Def}$ **7.1.2.** $\vec{r}\colon \operatorname{cl} G \to \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируема, $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$. Если в точке $(u_0, v_0) \in G$ вектора $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$ и $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$ коллинеарны, то (u_0, v_0) — особая точка.

$\mathfrak{Def}$ **7.1.3.** S — гладкая поверхность, если её можно задать непрерывно дифференцируемой параметризацией без особых точек.

$\mathfrak{Def}$ **7.1.4.** S — простая гладкая поверхность, параметризация ещё и биективна.

$\mathfrak{Def}$ **7.1.5.** $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$. Тогда край S

$$\partial S = \vec{r}(\partial G) = \vec{r}(\operatorname{cl} G \setminus G)$$

$\mathfrak{Def}$ **7.1.6.** Кусочно-гладкая поверхность — объединение простых гладких поверхностей, пересекающихся только по краям.

Пример 7.1.1. Поверхность куба.

$\mathfrak{Def}$ **7.1.7.** Край кусочно-гладкой поверхности — объединение тех краёв, которые принадлежали ровно простой поверхности.

$\mathfrak{Def}$ **7.1.8.** Пусть есть простая градкая поверхность $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$ и точка на ней $\vec{r}(u, v)$. Касательная поверхность — поверхность, натянутая на вектора производной

$$\mathcal{L}in(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)$$

$\mathfrak{Def}$ **7.1.9.** Нормаль — единичный вектор, ортогональный касательной плоскости.

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|}$$

Нам неважно пока, в какую сторону нормаль, поэтому плюс-минус.

$\mathfrak{Def}$ **7.1.10.** Простая градкая поверхность $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$. Допустимая параметризация — такая параметризация $S = \vec{R}(\operatorname{cl} \Sigma)$, что $\vec{R} = \vec{r} \circ w$, а $w\colon \operatorname{cl} \Sigma \to \operatorname{cl} G$ непрерывно дифференцируема, и $J_w \neq 0$.

Теорема 7.1.1. Касательная плоскость и нормаль к простой гладкой поверхности не зависят от параметризации.

▶

$$\vec{R}'_\xi = (\vec{r}(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)))'_\xi = \vec{r}'_u \underbrace{(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))}_{\text{дальше опускаем}} \cdot \vec{u}'_\xi + \vec{r}'_v \cdot v'_\xi$$

$$\vec{R}'_\eta = (\vec{r}(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)))'_\eta = \vec{r}'_u \cdot \vec{u}'_\eta + \vec{r}'_v \cdot v'_\eta$$

$$\vec{R}'_\xi \times \vec{R}'_\eta = (\vec{r}'_u \cdot \vec{u}'_\xi + \vec{r}'_v \cdot v'_\xi) \times (\vec{r}'_u \cdot \vec{u}'_\eta + \vec{r}'_v \cdot v'_\eta) = (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) \cdot (u'_\xi \cdot v'_\eta - u'_\eta \cdot v'_\xi) = (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) \cdot J_w \neq 0$$

◀

𝔇𝔢𝔣 7.1.11. Гладкая поверхность называется ориентируемой, если в каждой точке сущесвует нормаль, непрерывно зависящая от точки.

Замечание 7.1.1. Если есть одна ориентация, то есть две (возьмём с минусом).

Замечание 7.1.2. Простая гладкая поверхность всегда ориентируема:

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{r}'_v \times \vec{r}'_u}{\|\vec{r}'_v \times \vec{r}'_u\|}$$

Замечание 7.1.3. Лента Мёбиуса не ориентируема. Берём нормаль в какой-то точке и потащим её по непрерывности вдоль ленты. Когда вернёмся в исходную точку, мы перейдём на другую сторону ленты, а нормаль не должна была поменяться.

На самом деле можно показать, что если поверхность неориентируема, то из неё можно вырезать ленту Мёбиуса.

𝔇𝔢𝔣 7.1.12. Вводим согласованную ориентацию поверхности. Возьмём гладкую простую поверхность $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$. Обойдём ∂G как у нас принято (чтобы от u к v угол рос). Ориентируем поверхность

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_v \times \vec{r}'_u}{\|\vec{r}'_v \times \vec{r}'_u\|}$$

А также возьмём обход края, перетащенного с ∂G. Такая ориентация называется согласованной.

Проще говоря, направление ориентации и обход края связаны правилом правой руки.

Теперь ориентируем кусочно-гладкие поверхности.

𝔇𝔢𝔣 7.1.13. Ориентация кусочно-гладкое поверхности согасована, если на каждом куске ориентация согласована, а также пересечения кусков, происходящих только по кривым, имеют встречные направления обхода кусков.

Тут не очень ясно, что делать с плохими пересечениями (например, по точкам). Можно просто потребовать, чтобы пересечения были только по кривым, и там всё хорошо.

7.2. Поверхностный интеграл I рода

𝔇𝔢𝔣 7.2.1. $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$ — простая гладкая поверхность, $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$, пересекаются только по множествам нулевой меры. В каждом G_i выберем $\xi_i = (u_i, v_i)$. Возьмём линейное приближение

$$\vec{r}_i(u,v) = \vec{r}(u,v) + \vec{r}'_u(u_i,v_i)(u-u_i) + \vec{r}'_v(u_i,v_i)(v-v_i)$$

Теперь возьмём $S_i = \vec{r}_i(\operatorname{cl} G_i)$ — кусок касательной плоскости, «чешуйка». Далее, мы автоматически получим возможность считать меру μS_i. Далее, посчитаем отношение площадей (мы считаем, что эта формула известна):

$$\frac{\mu S_i}{\mu G_i} = \|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|$$

Тогда σ — площадь поверхности S, если

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\colon \forall\{G_i\}_{i=1}^n\colon \bigcup_{i=1}^n G_i = G\colon \operatorname{diam} G_i < \delta, \left|\sum_{i=1}^n \mu S_i - \sigma\right| < \varepsilon$$

Теорема 7.2.1. $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$ — простая гладкая поверхность. Тогда

$$\sigma(S) = \int_G \|\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

▶ $g(u,v) = \|\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)\|$ — непрерына на $\operatorname{cl} G$. Сумма Римана

$$\sigma(g,\tau,\xi) = \sum_{i=1}^n g(u_i,v_i)\mu G_i = \sum_{i=1}^n \mu S_i$$

Тогда по определению интеграла

$$\sigma(S) = \int_G \|\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

◀

𝔇𝔢𝔣 7.2.2. Первая квадратичная форма поверхности. Возьмём какой-нибудь вектор в касательной плоскости:

$$\alpha\vec{r}'_u + \beta\vec{r}'_v$$

Возьмём квадрат его длины:

$$I = \|\alpha\vec{r}'_u + \beta\vec{r}'_v\|^2 = \langle\alpha\vec{r}'_u + \beta\vec{r}'_v, \alpha\vec{r}'_u + \beta\vec{r}'_v\rangle =$$
$$= \alpha^2\langle\vec{r}'_u, \vec{r}'_u\rangle + 2\alpha\beta\langle\vec{r}'_u, \vec{r}'_v\rangle + \beta^2\langle\vec{r}'_v, \vec{r}'_v\rangle = \alpha^2 E + 2\alpha\beta F + \beta^2 G$$
$$I(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Свойства:

1. Это положительно определённая квадратичная форма.
2. $$EG - F^2 > 0$$
3. $$\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|^2 = EG - F^2$$

▶

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix} = (y'_u z'_v - z'_u y'_v, z'_u x'_v - x'_u z'_v, x'_u y'_v - y'_u x'_v)$$
$$\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|^2 = (y'_u z'_v - z'_u y'_v)^2 + (z'_u x'_v - x'_u z'_v)^2 + (x'_u y'_v - y'_u x'_v)^2$$
$$EG - F^2 = (x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u)(x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v) - (x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v)^2$$

Они равны, проверьте. ◀

4. Если S — график функции $z(x,y)$, то

$$EG - F^2 = 1 + z_u'^2 + z_v'^2$$

▶

$$\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix} \quad \vec{r}_x'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x' \end{pmatrix} \quad \vec{r}_y'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y' \end{pmatrix}$$
$$E = \langle r_x', r_x' \rangle = 1 + z_x'^2 \quad F = \left\langle r_x', r_y' \right\rangle = z_x' z_y' \quad G = \left\langle r_y', r_y' \right\rangle = 1 + z_y'^2$$

◀

Следствие 7.2.1.1.

$$\sigma(S) = \int\limits_G \sqrt{EG - F^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Следствие 7.2.1.2. S — график функции $z(x,y)$, то

$$\sigma(S) = \int\limits_G \sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

𝔇𝔢𝔣 7.2.3. $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$ — простая гладкая поверхность, $f\colon S \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда

$$\int\limits_S f\mathrm{d}S \overset{\text{Def}}{=} \int\limits_G f(\vec{r}(u,v)) \|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Теорема 7.2.2. Интеграл не зависит от параметризации.

▶ Пусть была поверхность $S = \vec{r}(\operatorname{cl} D)$, и была её допустимая параметризация $S = \vec{r}(w(\operatorname{cl} G)) = \vec{R}(\operatorname{cl} G)$. Будем обозначать точки в $\operatorname{cl} D$ координатами (u,v), а в $\operatorname{cl} G$ — (ξ, η). Соответственно, если смотреть с точки зрения допустимой параметризации, u и v на самом деле являются функциями от двух аргументов: ξ и η. Уже считали (в теореме 7.1.1) частные производные $\vec{R}$ по ξ и η и даже считали норму их векторного произведения:

$$\|\vec{R}_\xi' \times \vec{R}_\eta'\| = \|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\| \cdot |J_w|$$

Теперь пишем по определению интеграл через первую параметризацию (из области D):

$$\int\limits_S f\mathrm{d}S = \int\limits_D f(\vec{r}(u,v)) \|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

И через вторую:

$$\begin{aligned} \int\limits_S f\mathrm{d}S &= \int\limits_G f(\vec{R}(\xi,\eta)) \|\vec{R}_\xi' \times \vec{R}_\eta'\| \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &= \int\limits_G f(\vec{R}(\xi,\eta)) \|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\| |J_w| \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &= \int\limits_G f(\vec{r}(u,v)) \|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'\| |J_w| \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \end{aligned}$$

Замечаем, что получившиеся интегралы равны по формуле замены переменной преобразованием $w\colon \operatorname{cl} G \to \operatorname{cl} D$ (теорема 3.6.2). ◀

Замечание 7.2.1. S — график функции, то

$$\int\limits_S f\mathrm{d}S = \int\limits_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

𝔇𝔢𝔣 7.2.4. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность.

$$\int\limits_S f\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^n \int\limits_{S_i} f\mathrm{d}S$$

где S_i — простые куски.

Свойства:

1. Интеграл не зависит от ориентации, так как ориентации в определении просто нет.

2. Линейность по функции.

$$\int\limits_M (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}S = \alpha\int\limits_M f\mathrm{d}S + \beta\int\limits_M g\mathrm{d}S$$

3. Линейность по поверхности: если в $\mathbb{R}^2$ имеем $G = G_1 \sqcup G_2$ (пересекаются по мн-ву меры ноль), то тогда соответствующие поверхности в $\mathbb{R}^3$: $M = M_1 \sqcup M_2$ и верно следующее:

$$\int\limits_M f\mathrm{d}S = \int\limits_{M_1} f\mathrm{d}S + \int\limits_{M_2} f\mathrm{d}S$$

4. $f \geqslant 0$

$$\int\limits_M f\mathrm{d}S \geqslant 0$$

Замечание 7.2.2. Интеграл не зависит от нарезки.

Пример 7.2.1 (Сферические координаты).

$$x = R\cos u\cos v \quad y = R\sin u\cos v \quad z = R\sin v$$
$$u \in [0, 2\pi] \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Биекция сходу не получится, разрежем сферу на две полусферы. Теперь проблема в полюсах, мы выкинем полярные шапки, и устремим их размер к нулю, интеграл там будет нулевой, так что в конце всё хорошо. Это рукомахательство, но нас устроит.

Посчитаем что-нибдуь:

$$\vec{r}_u' = (-R\sin u\cos v, R\cos u\cos v, 0)$$
$$\vec{r}_v' = (-R\cos u\sin v, -R\sin u\sin v, R\cos v)$$
$$E = \langle \vec{r}_u', \vec{r}_u'\rangle = R^2\cos^2 v$$
$$F = \langle \vec{r}_u', \vec{r}_v'\rangle = 0$$
$$G = \langle \vec{r}_v', \vec{r}_v'\rangle = R^2$$
$$\sqrt{EG - F^2} = R^2\cos v$$

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \int\limits_{\substack{u\in[0,2\pi]\\ v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}} f(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)R^2\cos v\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

7.3. Дифференциальные формы

𝔇𝔢𝔣 7.3.1. Внешняя форма $\omega\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$ линейна по каждой координате и антисимметричка:

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j \ldots, \xi_n) = -\omega(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i \ldots, \xi_n)$$

Пример 7.3.1. **0-форма:** константа

1-форма: линейное отображение

2-форма: билинейная антисимметричная форма

Замечание 7.3.1.

$$\omega(\xi, \xi) = 0$$

Пусть $n = k = 2$, $\omega\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$A = (\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\omega(\xi_1, \xi_2) = \omega(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = a_{11}a_{12}\omega(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}\omega(e_1, e_2) +$$
$$+ a_{21}a_{12}\omega(e_2, e_1) + a_{21}a_{22}\omega(e_2, e_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\omega(e_1, e_2)$$
$$\omega(\xi_1, \xi_2) = \det A\omega(e_1, e_2)$$

𝔇𝔢𝔣 7.3.2. У открытого $G \subset \mathbb{R}^n$ дифференциальная форма — сопоставление каждой точке G некоторой k-внешней формы из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$ (т.е. у нас аргументы внешней формы из того же $\mathbb{R}^n$, в котором живёт G). $\Omega(G)$ — множество дифференциальных форм в G.

Пример 7.3.2. **0-форма:** У каждой точки константа, то есть целиком — функция,

1-форма: Рассмотрим функцию $f_i(x) = x_i$ (оставляет координату i). Посмотрим на её дифференциал в точке x:

$$\underbrace{f_i(x+h)}_{x_i+h_i} = \underbrace{f_i(x)}_{h_i} + (\mathrm{d}_x f_i)(h) + o(\|h\|)$$

Отсюда понятно, что такое $(\mathrm{d}_x f_i)$ — это просто отображение, возвращающее i-ю координату своего аргумента:

$$\mathrm{d}_x f_i = f_i \quad \text{независимо от точки } x$$

Теперь обозначим это линейное отображение за $\mathrm{d}x_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

А теперь смотрим, как вообще устроены дифференциальные 1-формы. Взяли дифференциальное форму ω. Мы знаем, что если фиксируем точку, то получаем некое линейное отображение:

$$\omega(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Пространство линейных отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет размерность n — его достаточно задать на базисных. Заметим, что $\mathrm{d}x_i$ являются такими линейными отображениями, они линейно независимы и их n, значит, они являются базисом. Таким образом для каждого конкретного x мы можем разложить внешнюю форму в этой точке по базису:

$$\omega(x) = a_1(x)\mathrm{d}x_1 + a_2(x)\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_n(x)\mathrm{d}x_n$$

Когда мы писали криволинейные интегралы II рода, мы писали очень похожие формальные выражение. По сути, если те выражения проинтерпретировать с новым смыслом $\mathrm{d}x_i$, то окажется, что мы тогда определили интеграл от 1-формы. Это даже неспроста.

Def 7.3.3. Внешнее произведение двух внешних 1-форм (обозначается $\wedge$) — внешняя 2-форма с свойствами:

1. $$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$$

2. Если есть две точки ξ_1, ξ_2 со следующими свойствами:
$$\begin{aligned}\omega_1(\xi_1) = 1\\ \omega_1(\xi_2) = 0\\ \omega_2(\xi_1) = 0\\ \omega_2(\xi_2) = 1\end{aligned}$$
То $(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = 1$ (про остальные точки ничего не говорим).

Операция внешнего произведения, к тому же, линейна по каждому аргументу-функции (это можно вывести, но мы возьмём в определение).

Теорема 7.3.1.
$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
где $a_{ij} := \omega_i(\xi_j)$

▶ Сначала предположим, что $\omega_i \neq 0$ и ξ_j линейно независимы.

Тогда найдутся две внешние 1-формы β_1 и β_2 такие, что $\beta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ (как в условии внешнего произведения). Давайте явно построим β_1: сначала берём некоторый вектор v_1, перпендикулярный ξ_2 и лежащий в плоскости $\mathcal{L}in(\xi_1, \xi_2)$. Потом определяем $\beta_1(v)$ как длину проекции v на v_1. Тогда $\beta_1(\xi_2) = 0$ (потому что $\xi_2 \perp v_1$), а $\beta_1(\xi_1) \neq 0$ (так тогда бы было верно $\xi_1 \parallel \xi_2$). Отнормируем β_1 так, чтобы $\beta_1(\xi_1) = 1$. Вводим β_2 аналогичным образом. Далее β_i будут использоваться в роли «характеристической функции» точки ξ_i.

Заметим, что в точках ξ_1, ξ_2 верно следующее:
$$\begin{aligned}\omega_1 = \omega_1(\xi_1)\beta_1 + \omega_1(\xi_2)\beta_2 \iff \omega_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2\\ \omega_2 = \omega_2(\xi_1)\beta_1 + \omega_2(\xi_2)\beta_2 \iff \omega_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2\end{aligned}$$

Раскроем внешнее произведение и вынесем скалярные коэффициенты (a_{ij}) по линейности:
$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 = a_{11}a_{21}(\underbrace{\beta_1 \wedge \beta_1}_{\text{везде ноль}}) + a_{11}a_{22}(\beta_1 \wedge \beta_2) + a_{12}a_{21}(\underbrace{\beta_2 \wedge \beta_1}_{-\beta_1\wedge\beta_2}) + a_{12}a_{22}(\underbrace{\beta_2 \wedge \beta_2}_{\text{везде ноль}}) =\\ = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\beta_1 \wedge \beta_2)\\ (\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \underbrace{(\beta_1 \wedge \beta_2)(\xi_1, \xi_2)}_{=1}\end{aligned}$$

Таким образом, при любых фиксированных ξ_1, ξ_2 получаем одинаковую формулу, что и требовалось.

Если же одна из форм есть тождественный ноль, то требуемом равенстве справа написан ноль (так как столбец зануляется), и слева тоже написан ноль (по линейности внешнего произведения).

Если же ξ_1 и ξ_2 линейно зависимы, то по линейности и кососимметричности внешней формы $\omega_1 \wedge \omega_2$ слева стоит ноль, а справа стоит ноль, потому что строки линейно зависимы из-за линейности ω_1 и ω_2. ◀

Замечание 7.3.2. Возьмём внешние 2-формы. Вообще говоря, размерность их пространства n^2 (надо выбрать по значению на базисе (e_i, e_j)). Но из-за антисимметричности, размерность их пространства $\frac{n(n-1)}{2}$.

Теорема 7.3.2. Дифференциальные 2-формы в $\mathbb{R}^n$ — линейные комбинации $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ (коэффициенты зависят от точки).

▶ $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ линейно независимы, так как подставляем (e_i, e_j), у каждого есть пара, на котором только он единичен. А их ещё $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит это базис. ◀

Следствие 7.3.2.1. Все дифференциальные 2-формы в $\mathbb{R}^3$ выглядят как

$$P(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Замечание 7.3.3. Поговорим о внешних 3-формах в $\mathbb{R}^3$. Значение формы однозначно задано её значением $\omega(e_1, e_2, e_3)$ (так как отсюда оно однозначно задаётся на всех перестановках базисных и на всех полилинейных комбинациях). Тогда размерность пространства таких форм один, и главного представителя обозначим $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

𝔇𝔢𝔣 7.3.4 (Перенос формы)**.** Есть множества U и V, а также гладкое отображение $\varphi\colon U \to V$. На V есть дифференциальная форма из $\Sigma(V)$ — $\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_k)$ (взяли в точке $x \in V$). Тогда перенос формы φ^* из V в U:

$$\varphi^*(\omega)(t; \eta_1, \dots, \eta_k) \overset{\text{Def}}{=} \omega(\varphi(t); (\mathrm{d}_t\varphi)(\eta_1), \dots, (\mathrm{d}_t\varphi)(\eta_k))$$

Свойства:

1. φ^* линейно (как оператор над формой):
$$\varphi^*(a\alpha + b\beta) = a\varphi^*(\alpha) + b\varphi^*(\beta)$$
2. Пусть есть множества U, V и W с переносами $\varphi^*\colon \Omega(V) \to \Omega(U)$ и $\psi^*\colon \Omega(W) \to \Omega(V)$. Тогда
$$\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^*$$
3. Для произвольной $f\colon V \to \mathbb{R}$
$$\varphi^*(f \cdot \omega) = (f \circ \varphi) \cdot \varphi^*(\omega)$$
То есть мы домножили старую форму на константу $f(x)$ (зависяющую от точки), а после переноса эта константа вылезла наружу (уже в виде $f(\varphi(u))$).

   Замечание 7.3.4. В реальной жизни это означает, что при переносе формы вида $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ надо почленно домножить коэффициенты на f.

▶

$$\varphi^*(f \cdot \omega)(t; \eta_1, \dots, \eta_n) = (f \cdot \omega)(\varphi(t); \mathrm{d}\varphi_t(\eta_1), \dots, \mathrm{d}\varphi_t(\eta_k)) =$$
$$= f(\varphi(t)) \cdot \omega(\varphi(t); \mathrm{d}\varphi_t(\eta_1), \dots, \mathrm{d}\varphi_t(\eta_k)) = (f \circ \varphi) \cdot \varphi^*(\omega)$$

Если расписать то же самое подробнее и в программистском стиле, получится так:

$$(\varphi^*(f \cdot \omega))(t)(\eta_1, \dots, \eta_n) = [(f \cdot \omega)(\varphi(t))](\mathrm{d}\varphi_t(\eta_1), \dots, \mathrm{d}\varphi_t(\eta_k)) =$$
$$= [\ \underbrace{f(\varphi(t))}_{\substack{\text{конкретное число,} \\ \text{от } \eta \text{ не зависит}}} \cdot \underbrace{\omega(\varphi(t))}_{\text{внешняя } k\text{-форма}}\ ](\mathrm{d}\varphi_t(\eta_1), \dots, \mathrm{d}\varphi_t(\eta_k)) =$$
$$= f(\varphi(t)) \cdot [\omega(\varphi(t))](\mathrm{d}\varphi_t(\eta_1), \dots, \mathrm{d}\varphi_t(\eta_k)) =$$
$$= (f \circ \varphi)(t) \cdot [\omega(\varphi(t))](\mathrm{d}\varphi_t(\eta_1), \dots, \mathrm{d}\varphi_t(\eta_k)) =$$
$$= (f \circ \varphi)(t) \cdot (\varphi^*(\omega))(t)(\eta_1, \dots, \eta_n)$$

◀

4. ω_1, ω_2 — внешние 1-формы. Их можно естественно преобразовать в дифференциальную форму, не зависящую от точки t. Тогда:

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\varphi^*\omega_1) \wedge (\varphi^*\omega_2)$$

▶

$$\begin{aligned}
(\varphi^*\omega_1)(t;\xi) &= \omega_1(\varphi(t); \mathrm{d}\varphi_t(\xi)) \\
(\varphi^*\omega_2)(t;\xi) &= \omega_2(\varphi(t); \mathrm{d}\varphi_t(\xi)) \\
((\varphi^*\omega_1) \wedge (\varphi^*\omega_2))(t;\xi_1,\xi_2) &= ((\varphi^*\omega_1)(t) \wedge (\varphi^*\omega_2)(t))(\xi_1,\xi_2) = \\
&= \begin{vmatrix} (\varphi^*\omega_1)(t;\xi_1) & (\varphi^*\omega_1)(t;\xi_2) \\ (\varphi^*\omega_2)(t;\xi_1) & (\varphi^*\omega_2)(t;\xi_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_1(\mathrm{d}\varphi_t(\xi_1)) & \omega_1(\mathrm{d}\varphi_t(\xi_2)) \\ \omega_2(\mathrm{d}\varphi_t(\xi_1)) & \omega_2(\mathrm{d}\varphi_t(\xi_2)) \end{vmatrix} \\
(\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2))(t;\xi_1,\xi_2) &= (\omega_1 \wedge \omega_2)(\varphi(t); \mathrm{d}\varphi_t(\xi_1), \mathrm{d}\varphi_t(\xi_2)) = \\
&= \begin{vmatrix} \omega_1(\mathrm{d}\varphi_t(\xi_1)) & \omega_1(\mathrm{d}\varphi_t(\xi_2)) \\ \omega_2(\mathrm{d}\varphi_t(\xi_1)) & \omega_2(\mathrm{d}\varphi_t(\xi_2)) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

◀

Пример 7.3.3. Возьмём понятную форму $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, живущую в V по переменных (x,y), возьмём отображение φ из U на переменных (u,v).

$$\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$$

$$\eta := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{d}\varphi)(\eta) = \begin{pmatrix} x'_u a + x'_v b \\ y'_u a + y'_v b \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}x((\mathrm{d}\varphi)(\eta)) = x'_u a + x'_v b$$

$$\mathrm{d}y((\mathrm{d}\varphi)(\eta)) = y'_u a + y'_v b$$

$$\begin{gathered}
(\varphi^*\omega)(u,v;\eta) = \omega(\varphi(u,v); \mathrm{d}\varphi(\eta)) = P(x(u,v),y(u,v))(x'_u a + x'_v b) + Q(x(u,v),y(u,v))(y'_u a + y'_v b) = \\
= P(x(u,v),y(u,v))(x'_u \mathrm{d}u(\eta) + x'_v \mathrm{d}v(\eta)) + Q(x(u,v),y(u,v))(y'_u \mathrm{d}u(\eta) + y'_v \mathrm{d}v(\eta)) \\
\varphi^*(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = P(x'_u \mathrm{d}u + x'_v \mathrm{d}v) + Q(y'_u \mathrm{d}u + y'_v \mathrm{d}v)
\end{gathered}$$

Но мы уже знаем эту запись, это замена переменной! По сути, мы как бы записали дифференциалы $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ с учётом того, что x и y зависят от u и v.

Еще пример: можно брать 1-форму на прямой и переносить прямую в плоскость (получать кривую), получим что-то похожее на криволинейный интеграл II рода:

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{d}x = \gamma_1'(t)\mathrm{d}t \quad \mathrm{d}y = \gamma_2'(t)\mathrm{d}t$$

TODO см. детали в конспекте Нади за консультацию от 21.01.2016, видимо, страница 9

𝔇𝔢𝔣 7.3.5 (Поверхностный интеграл от формы (поверхностный интеграл II рода))**.** Возьмём 2-форму ω, простую поверхность $S = \vec{r}(\mathrm{cl}\, G)$.

$S \subset \mathbb{R}^2$**:** $\omega = f \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, и тогда

$$\int\limits_S \omega = \pm \int\limits_S f\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Знак определяется направлением нормали: если нормаль вверх, то плюс.

$S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_S \omega = \int_G \vec{r}^* \omega$$

При этом ориентация переносится согласованно: возьмём тройку из базисных векторов и нормали в S, перенесём её по прообразам в G, и теперь смотрим на знак интеграла в $\mathbb{R}^2$.

Замечание 7.3.5. Теперь нам придётся проверять корректность — мы могли брать разные допустимые $\vec{r}$ и получать очень разные знаки и значения.

Теорема 7.3.3 (Корректность определения)**.** 1. $\varphi\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$. То есть мы взяли кусок плоскости как повехность. Хотим показать, что

$$\int_\Omega \omega = \int_G \varphi^* \omega$$

Для этого

$$\int_\Omega f \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_\Omega \omega \quad \int_G \varphi^*\omega = \pm^1 \int_G (f \circ \varphi) J_\varphi \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega = f \circ \varphi \cdot \varphi^*(\mathrm{d}x) \wedge \varphi^*(\mathrm{d}y) = f \circ \varphi \cdot (x'_u \mathrm{d}u + x'_v \mathrm{d}v) \wedge (y'_u \mathrm{d}u + y'_v \mathrm{d}v) = \\ = f \circ \varphi \cdot (x'_u y'_v - x'_v y'_u) \mathrm{d}u \mathrm{d}v = f \circ \varphi \cdot J_\varphi \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v\end{aligned}$$

Мы в 1 написали как будто якобиан положителен. Если он отрицателен, то вылезет минус, но тогда нормаль не в ту сторону, и мы поставим минус второй раз.

2. Теперь хотим показать, что для допустимой параметризации $\vec{R} = \vec{r} \circ w$ всё хорошо:

$$\int_G \vec{r}^* \omega \stackrel{?}{=} \int_\Omega \vec{R}^* \omega$$

$$\vec{R}^* = (\vec{r} \circ w)^* = w^* \vec{r}^*$$

$$\tilde{\omega} \leftrightharpoons \vec{r}^* \omega$$

$$\int_G \vec{r}^* \omega = \int_\Omega \vec{R}^* \omega \Leftrightarrow \int_G \tilde{\omega} = \int_\Omega w^* \tilde{\omega}$$

А это уже предыдущий пункт.

𝔇𝔢𝔣 7.3.6 (Интеграл дифференциальной формы по кусочно-гладкой поверхности)**.** Взяли простые куски S_i (их конечное число), задали согласованную с S ориентацию, взяли сумму интегралов.

𝔇𝔢𝔣 7.3.7. $\vec{F}$ — векторное поле, если в каждой точке свой вектор той же размерности, что и пространство.

𝔇𝔢𝔣 7.3.8. $\omega = P \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ — форма потока поля $\vec{F}$.

𝔇𝔢𝔣 7.3.9. Поток поля через поверхность — интеграл

$$\int_S \omega$$

Теорема 7.3.4. $\vec{F} = (P, Q, R)$ — поле.

$$\int\limits_S P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int\limits_S \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}S$$

▶ Достаточно доказать для простой поверхности $S = \vec{r}(\operatorname{cl} G)$. Давайте сначала перетащим формы $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ из S (тут живут переменные x, y, z) в G (тут живут переменные u, v). Для этого надо посчитать дифференциал отображения $\vec{r}$:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

А потом перетащить по определению:

$$r^*\mathrm{d}x\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \mathrm{d}x\left(\mathrm{d}\vec{r}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \mathrm{d}x\left(\begin{pmatrix} x'_u u + x'_v v \\ y'_u v + y'_v v \\ z'_u u + z'_v v \end{pmatrix}\right) = x'_u u + x'_v v$$

$$r^*\mathrm{d}x = x'_u \mathrm{d}u + x'_v \mathrm{d}v$$
$$r^*\mathrm{d}y = y'_u \mathrm{d}u + y'_v \mathrm{d}v$$
$$r^*\mathrm{d}z = z'_u \mathrm{d}u + z'_v \mathrm{d}v$$

Также можем перетащить произведения:

$$\begin{aligned} r^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= (r^*\mathrm{d}x) \wedge (r^*\mathrm{d}y) = (x'_u\mathrm{d}u + x'_v\mathrm{d}v) \wedge (y'_u\mathrm{d}u + y'_v\mathrm{d}v) = \\ &= x'_u y'_u \underbrace{\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}u}_{0} + x'_u y'_v \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + x'_v y'_u \underbrace{\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u}_{-\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v} + x'_v y'_v \underbrace{\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v}_{0} = \\ &= (x'_u y'_v - x'_v y'_u)(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v) \end{aligned}$$

А теперь доказываем теорему:

$$\left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|} \left\langle \vec{F}, \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_S \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle &= \int\limits_G \frac{1}{\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int\limits_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \int\limits_G P(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + Q(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + R(x'_u y'_v - x'_v y'_u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \int\limits_G \left(P \underbrace{(y'_u z'_v - y'_v z'_u)}_{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x} + Q \underbrace{(z'_u x'_v - z'_v x'_u)}_{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x} + R \underbrace{(x'_u y'_v - x'_v y'_u)}_{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y} \right) (\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v) = \end{aligned}$$

$$= \int\limits_S R\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

◀

7.4. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского

Теорема 7.4.1 (Формула Гаусса-Остроградского)**.** K — компакт в $\mathbb{R}^3$, граница которого — кусочно-гладкая поверхность с нормалью наружу. P, Q и R — гладкие функции на K. Тогда

$$\int\limits_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial K} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$\mathfrak{Def}$ **7.4.1.** Если $\vec{F} = (P, Q, R)$ — векторное поле, то дивергенцией называют

$$\operatorname{div} \vec{F} = \left\langle \nabla, \vec{F} \right\rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Замечание 7.4.1. Формула Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_K \operatorname{div} \vec{F} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial K} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}S$$

▶ $\vec{F} = (P, 0, 0)$**,** K **— цилиндр:** Пусть есть цилиндр, чья ось направлена по оси $\vec{x}$, полученный следующим образом: взяли множество $G \subset \mathbb{R}^2$, умножили на $\mathbb{R}$, ограничили двумя донышками — графиками функций $\varphi, \psi \colon G \to \mathbb{R}$, которые мы обозначим S_l и S_h соотвественно. Тогда

$$\int\limits_K \frac{\partial P}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_G \left(\int\limits_{\varphi(y,z)}^{\psi(y,z)} \frac{\partial P}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_G \left(P(\psi(y,z), y, z) - P(\varphi(y,z), y, z)\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_G P(\psi(y,z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int\limits_G P(\varphi(y,z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{S_l} P(\psi(y,z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int\limits_{S_h} P(\varphi(y,z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

У S_l нормаль вниз, а у S_h — вверх.

$$= \int\limits_{S_l} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \int\limits_{S_h} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

Теперь на донышках интеграл сошёлся с тем, что надо. Осталось показать, что боковая поверхность даёт нулевой вклад

$$\int\limits_{S_s} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0$$

Это можно понять так: мы уже знаем, что

$$\int\limits_{S_s} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \int\limits_{S_s} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}S$$

А у нас боковая поверхность цилиндра перпендикулярна полю.

Взяли несколько сонаправленных цилинров: Их склейка тоже разобрана, у них встречные нормальные на стенках, всё хорошо.

$\vec{F} = (P, 0, 0)$**, K режется на цилиндры вдоль каждой оси:** Имеется в виду, что весь K целиком режется на цилиндры вдоль любой выбранной оси. Большинство реальных множеств такие. Разложим $\vec{F} = (P, 0, 0) + (0, Q, 0) + (0, 0, R)$, линейно разложим интегралы, смотрим предыдущие шаги.

Любой компакт: На самом деле, так можно резать любой (как мы делали в формуле Грина: мы там доказали только в случае конечного числа экстремумов границы), но это очень странные тела и не понадобятся.

◀

Теорема 7.4.2 (Формула Стокса)**.** S — согласованно ориентированная, компактная, кусочно гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, $P, Q, R \colon S \to \mathbb{R}$ — гладкие. Тогда

$$\int\limits_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Замечание 7.4.2. Отношения Стокс к ней не имеет ни малейшего. Он её где-то вычитал, дал на выпускном экзамене какому-то молодому известному физику, ему понравилось, когда тот спросил, кто её дал, сказали — Стокс.

▶ S **— простая, только P:** Возьмём гладкую параметризацию кривой ∂G

$$\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$$

перетащили в ∂S

$$\vec{r} \circ \gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial S} P\mathrm{d}x = \int\limits_a^b P(\vec{r}(\gamma(t)))(x(\gamma(t)))'\mathrm{d}t = \int\limits_a^b (P \circ \vec{r} \circ \gamma) \cdot (x'_u u'_t + x'_v v'_t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{\partial G} (P \circ \vec{r})(x'_u \mathrm{d}u + x'_v \mathrm{d}v) = \int\limits_{\partial G} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))(x'_u \mathrm{d}u + x'_v \mathrm{d}v) =$$

$$= \int\limits_{\partial G} P(\dots)x'_u \mathrm{d}u + P(\dots)x'_v \mathrm{d}v =$$

А теперь вспомним Гринна ещё раз! Далее, параметры у R не стоят, слишком много будет.

$$= \int\limits_G \left(\frac{\partial P x'_v}{\partial u} - \frac{\partial P x'_u}{\partial v}\right) = \dots$$

$$\frac{\partial P x'_v}{\partial u} = P x''_{uv} + (P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v$$

$$\frac{\partial P x'_v}{\partial u} = P x''_{uv} + (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u$$

$$\dots = \int\limits_G P'_y \underbrace{(y'_u x'_v - y'_v x'_u)}_{= -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y} + P'_z \underbrace{(z'_u x'_v - z'_v x'_u)}_{= \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int\limits_S P'_z \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - P'_y \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Общий случай: Поле разложится в сумму, как в предыдущей теореме, поэтому осталось проверить, что происходит с ингералом при склейке. На любой кривой склейки мы посчитаем интеграл дважды, но в разные стороны, всё хорошо.

◀

Замечание 7.4.3. По дороге использовалась 2-гладкость, ну и ладно.

𝔇𝔢𝔣 7.4.2. Ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} \overset{\text{Def}}{=\!=} \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Запомнить можно через такую запись:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Замечание 7.4.4. Формула Стокса:

$$\int\limits_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int\limits_{S} \left\langle \operatorname{rot}\vec{F}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}S$$

Вообще говоря, все три формулы — частные случаи следующего:

𝔇𝔢𝔣 7.4.3. Дифферениал формы:

$$\mathrm{d}\left(\sum a^{(x)}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right) \overset{\text{Def}}{=} \sum \mathrm{d}a_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

Теорема 7.4.3 (Общая формула Стокса)**.** Пусть есть ω — k-форма, а S — $k{+}1$-мерная поверхность.

$$\int\limits_{S}\mathrm{d}\omega = \int\limits_{\delta S}\omega$$

Тут все ориентации согласованы.

Частные случаи:

Формула Гринна: $k=1$, $n=2$:

$$\begin{gathered} \omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y = (P'_x\mathrm{d}x + P'_y\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x + (Q'_x\mathrm{d}x + Q'_y\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}y = \\ = P'_y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + Q'_x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = (Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \end{gathered}$$

Формула Гаусса-Остроградского: $k=2$, $n=3$:

$$\begin{gathered} \omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \\ = (P'_x\mathrm{d}x + P'_y\mathrm{d}y + P'_z\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \cdots = \\ = P'_x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q'_y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R'_z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = (P'_x + Q'_y + R'_z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \end{gathered}$$

Формула Стокса: $k=1$, $n=3$:

$$\begin{gathered} \omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\omega = \text{развлекайтесь} \end{gathered}$$

Нас ждёт простой параграф про 1-формы на плоскости. А оттуда уже в Теорию Функций Комплексных Переменных. Это больше полезно программистам, чем физикам (у физиков уже используются более продвинутые подходы), После этого будет немного интегралов с параметром и ряды Фурье.