Математический анализ, IV семестр

Весна 2016, лектор: Храбров Александр Игоревич

Автор: Дмитрий Лапшин

Собрано: 31 августа 2016 г. 17:59

Оглавление

Глава 7

Поверхностные интегралы (продолжение)

7.5. Замкнутые и точные формы

Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$, и есть форма $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Тогда

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$\mathfrak{Def}$ **7.5.1.** Форма ω называется замкнутой, если $\mathrm{d}\omega = 0$. В нашем частном случае, это означает, что во всех точках G

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$\mathfrak{Def}$ **7.5.2.** Форма ω называется точной, если существует её первообразная $F\colon G \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}F = \omega$$

Замечание 7.5.1. Напомним: первообразная существует тогда и только тогда, когда интеграл по замкнутой кривой всегда равен нулю.

$\mathfrak{Def}$ **7.5.3.** Форма ω называется локально точной, если у каждой точки есть окрестность, в оорой существует первообразная.

Теорема 7.5.1. $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, P и Q непрерывно дифференцируемы. Тогда замкнутость равносильна локальной точности.

▶ **$\Leftarrow$:** Из локальной точности следует, что в окрестности каждой точки существует первообразная

$$\mathrm{d}F = \omega$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y = \omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

Мы хотим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = Q$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Последние два совпадают, так как считают производную непрерывно дифференцируемой.

$\Rightarrow$: Хотим в B_r показать первообразную. Возьмём кусрчногладкую замнкутую несамопересекающуюся кривую γ внутри шарика. Она ограничит внутри какую-то область D, тогда по формуле Грина:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

А это ноль из замкнутости, успех.

◀

Следствие 7.5.1.1. Замкнутая форма в любом круге имеет первообразную.

Пример 7.5.1. Замкнутости не хватает для точности:

$$\omega\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$
$$\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

Она замкнутая, можно проверить. Но не точная: возьмём кривую

$$\oint_{x^2+y^2=1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} (\cos t \sin' t - \sin t \cos' t) = 2\pi$$

𝔇𝔢𝔣 7.5.4 (Первообразная вдоль пути)**.** ω — замкнутая форма в G, путь $\gamma\colon [a,b] \to G$. f называется первооразной ω вдоль γ, если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, и для каждой $\tau \in [a,b]$ существует её окрестность (в $[a,b]$), и в соотвествущей в G окрестности первообразная формы F выражается как

$$f(t) = F(\gamma(t))$$

Теорема 7.5.2. ω — замкнутая форма в G, $\gamma\colon [a,b] \to G$. Тогда с точностью до константы существует единственная первообразная ω вдоль γ.

▶ **Единственность:** Пусть f_1 и f_2 — две первообразные дволь пути. Возьмём $\tau \in [a,b]$.

$$f_1 = F_1 \circ \gamma \quad f_2 = F_2 \circ \gamma$$

Мы про простые первообразные знаем, что $F_2 = F_1 + C$, откуда $f_2 = f_1 + C$.
Показали, что в каждой окрестности отличаются на какую-то константу. Теперь возьмём отрезок $[a,b]$ — компакт, покрытый окрестностями точек. Значит, есть конечное подпокрытие, а в каждой области есть константа. Идём из окрестности в окрестность по пересечению, получим, что везде константы одинаковые.

Существование: Рассмотрим кривую γ, покроем её окрестностями точек, лежащих на ней. Сама кривая $\gamma([a,b])$ — компакт (непрерывный образ компакта). Тогда можно взять конечное подпокрытие кривой U_i. Теперь хотим просто взять на отрезке покрытие интервалами, которые все вместе перейдут в подпокрытие кривой. Для этого возьмём все прообразы U_i, получим много интервалов (много, так как прообраз одного U_i не обязательно один интервал). Но мы получили покрытие интервалами отрезка. Возьмём ещё раз конечное подпокрытие из k интервалов.
Получили конечное множество интервалов на $[a,b]$. Если идти слева направо, то интервалы пересекаются. Давайте построим последовательность точек: $t_0 = a$, $t_k = b$, t_i ставим в пересечении i и $i+1$ интервала слева направо.
Теперь начнём строить первообразную. На каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ введём $f(t) = F_i(\gamma(t))$. Так можно, поскольку каждый такой отрезок покрывается одним интервалом, который пришёл из какого-то U_i, а там была первообразная.

Теперь осталось согласовать f в точках $t_1, \dots, t_{k-1}$. Вспомним, что первообразные можно поправлять на константу, поправим сначала в первой точке, потом во второй и так далее. Получим уже честную функцию f.

◀

Следствие 7.5.2.1. ω — замкнутая форма в G, $\gamma\colon [a,b] \to G$, f — первообразная вдоль пути. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \omega = f(b) - f(a)$$

▶ Взяли первообразную, разбили на отрезки из доказательства.

$$\int\limits_{\gamma} = \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} \omega = \sum_{i=0}^{k-1} (F_{i+1}(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))) = \dots$$

Вспомним, что мы сделали, чтобы f была корректна в концах отрезков, откуда

$$\dots = F_k(\gamma(t_k)) - F_0(\gamma(t_0)) = f(b) - f(a)$$

◀

Замечание 7.5.2. Так можно ввести интеграл по негладким кривым!

𝔇𝔢𝔣 7.5.5 (Гомотопные пути)**.** Пусть есть два пути $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to G$, начинающиеся и заканчивающиеся в одинаковых точках. Пути γ_0 и γ_1 гомотопны как пути с неподвиными концами, если существует такое непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \times [0,1] \to G$, что

$$\forall t \in [a,b], \gamma_0(t) = \gamma(t,0) \land \gamma_1(t) = \gamma(t,1)$$
$$\forall u \in [0,1], \gamma_0(a) = \gamma(a,u) \land \gamma_0(b) = \gamma(b,u)$$

Физический смысл: висит резинка на двух гвоздях в форме одной кривой, мы её как-то сжимая, растяшивая и двигая переводим в другую кривую.

𝔇𝔢𝔣 7.5.6. Пусть есть два замкнутых пути $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to G$. Пути γ_0 и γ_1 гомотопны как замкнутые пути, если существует такое непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \times [0,1] \to G$, что

$$\forall t \in [a,b], \gamma_0(t) = \gamma(t,0) \land \gamma_1(t) = \gamma(t,1)$$
$$\forall u \in [0,1], \gamma(a,u) = \gamma(b,u)$$

Не все пути гомотопны — на плоскости с дыркой путь вокруг дырки не гомотопен пути, не захватывающем дырки.

𝔇𝔢𝔣 7.5.7. Нулевой (вырожденный путь) — константа.

𝔇𝔢𝔣 7.5.8. Путь стягиваем, если он гомотопен нулевому.

Замечание 7.5.3.

Не суй голову в петлю,
Гомотопную нулю!

Теорема 7.5.3. ω — замкнутая форма в G, γ_0 и γ_1 — гомотопные пути. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_0} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega$$

Теорема 7.5.4. ω — замкнутая форма в G, γ — стягиваемый путь. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \omega = 0$$

Доказательства не будет — они будут тривиальными следствиями следующей теоремы.

𝔇𝔢𝔣 7.5.9. ω — замкнутая форма в G, $\gamma\colon [a,b]\times[c,d]\to G$ непрерывна. f называют первообразной формы ω относительно γ, если для каждой $\gamma(\tau,\nu)$ существует окрестность U, что первообразная F в ней

$$F(\gamma(t,u)) = f(t,u)$$

Лемма 7.5.1 (Лебега)**.** K — компакт в метрическом пространстве, U_α — его покрытие открытыми множествами. Тогда существует такой $r>0$, что для всех $x\in K$ шар $B_r(x)$ содержится в каком-то элементе покрытия.

▶ Возьмём $a\in K$, значит точно есть U из покрытия, накрывающая U. Значит, существует $r_a>0$, что $B_{r_a}(a)\subset U$.

Шары $B_{r_a/2}(a)$ — покрытие компакта, значит существует конечное подпокрытие:

$$B_{r_{a_1}/2}(a_1)\cup\ldots\cup B_{r_{a_n}/2}(a_n)\supset K$$

Возьмём $r=\frac{1}{2}\min\left\{r_{a_1},\ldots,r_{a_n}\right\}$ — он подходит. Проверим это: возьмём какой-то $x\in K$, он лежит в каком-то $B_{r_{a_i}/2}(a_i)$, а там уже

$$B_r(x)\subset B_{r_{a_i}/2}(\boldsymbol{x})\subset B_{r_{a_i}}(\boldsymbol{a}_i)\subset U$$

◀

Теорема 7.5.5. ω — замкнутая форма в G, $\gamma\colon [a,b]\times[c,d]\to G$ непрерывна. Тогда существует первообразная ω относительно γ.

▶ Возьмём непрерывный образ компакта $K=\gamma([a,b]\times[c,d])$. У каждой точки есть окрестность, в которой есть первообразная F. Возьмём r из леммы Лебега r и нарежем $[a,b]\times[c,d]$ на прямоугольники, диаметр каждого из которых меньше r. Это возможно, так как γ равномерно непрерывна (потому что непрерывна на компакте), и по определению сущесвтует такое δ, что образы точек, отстающих менее, чем на δ, отстают менее, чем на r.

Тогда достаточно нарезать $[a,b]\times[c,d]$ на прямоугольники диаметра менее δ. Пусть U_{ij} — окрестность, накрывающая $[t_{i-1},t_i]\times[u_{j-1},u_j]$. На каждой есть первообразная F_{ij}. Согласуем их. Зафиксируем j, рассмотрим U_{ij} и $U_{i+1,j}$. У них есть общая точка, и пересечение открыто, значит на ней первообразные отличаются на константу. Подправим одну из них, чтобы совпали.

Получили $f_j=F_{ij}(\gamma(t,u))$, непррывную на $[a,b]\times[u_{j-1},u_j]$. Теперь посмотрим на строчки вида $\bigcup\limits_i U_{ij}$ и $\bigcup\limits_i U_{i,(j+1)}$. У них тоже есть пересечение, можно сразу подправить целую строчку на константу.

Замечание 7.5.4. На самом деле порядок склейки не важен. Можно было поиском в глубину, по очереди доклеивая каждую ко всем предыдущим, лишь бы пересекались. Ну как получилось, так получилось.

◀

▶ Докажем теоремы 1 и 2:

1. γ — гомотопия γ_0 и γ_1, f — первообразная ω относительно γ.
$$\int\limits_{\gamma_0} \omega = f(b,0) - f(a,0)$$
$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = f(b,1) - f(a,1)$$
Заметим, что $\gamma(a,u) = const$,
$$f(a,0) = F(\gamma(a,0)) = F(\gamma(a,1)) = f(a,1)$$
Аналогично $f(b,0) = f(b,1)$.
2. γ — гомотопия γ_0 и γ_1, f — первообразная ω относительно γ. γ_1 — вырожден.
$$\int\limits_{\gamma_0} \omega = f(b,0) - f(a,0)$$
$$0 = \int\limits_{\gamma_1} \omega = f(b,1) - f(a,1)$$
Тут нет неподвижности концов. Надо действовать так: зафиксируем a и будем ползти по u. Внутри каждой исходной области **TODO**

◀

𝔇𝔢𝔣 7.5.10. G — односвязная область, если любой замкнутый путь в G стягивается.

Теорема 7.5.6. G — односвязная область, ω — замкнутая форма в G. Тогда ω — точная.

▶ Раз любой замкнутый путь стягивается, то по любому замкнутому пути интеграл 0. ◀

Пример 7.5.2.

1. Звёздная обрасть — область, есть точка, из которой по отрезку внутри обрасти можно дойти до любой точки области.
$$\exists a \in G\colon \forall x \in G, [a,x] \subset G$$
Покажем, что она звёздная.
▶ Берём любую кривую, начинаем её гомотетично[1] стягивать в точку a. Оно стянется. ◀
2. Выпуклые фигуры односвязные.
3. $\mathbb{C} \setminus 0$ не односвязная.

Замечание 7.5.5. Дальше будут встречаться обозначения:

- $\mathbb{T} = \{z \mid |z| = 1\}$ — единичная окружность.
- $r\mathbb{T} = \{z \mid |z| = r\}$
- $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$
- $r\mathbb{D} = \{z \mid |z| < r\}$
- $\bar{\mathbb{D}} = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$
- $r\bar{\mathbb{D}} = \{z \mid |z| \leqslant r\}$

Упражнение. Пусть есть односвязная область $G \in \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{T} \to G$ непрерывна. Показать, что можно непрерывно продолжить до $f\colon \bar{\mathbb{D}} \to G$.

[1] по подобию, уменьшая коэффициент

7.6. Голоморфные функции

𝔇𝔢𝔣 7.6.1. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, Ω открытая и связная. f называется голоморфной в z_0, если существует предел

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \in C$$

Замечание 7.6.1. Равносильное условие: сущесвтует такой $k \in \mathbb{C}$, что

$$f(z) = f(z_0) + k(z-z_0) + o(|z-z_0|)$$

Замечание 7.6.2. Это очень похоже на частную производную, если подходить к z_0 только по горизонтали или вертикали.

$$f = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_0,y_0) \\ h(x_0,y_0) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

В чём же разница?

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad z = x+iy \quad k = l+im$$

$$(l+im)((x-x_0)+i(y-y_0)) = (l(x-x_0)-m(y-y_0)) + i(m(x-x_0)+l(y-y_0))$$

$$\begin{pmatrix} l(x-x_0)-m(y-y_0) \\ m(x-x_0)+l(y-y_0) \end{pmatrix}$$

Как видно, в качестве матрицы A должны быть только матрицы вида

$$\begin{pmatrix} l & -m \\ m & l \end{pmatrix}$$

Запишем эти условия:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

Вывод: f голоморфна в z_0 тогда и только тогда, когда она вещественно дифференцируема и выполняется равенство выше.

Утверждение 7.6.1 (Условие Коши—Римана (Эйлера—Даламбера))**.** Если функция голоморфна в z_0, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

Поравзлекаемся с дифференицалами:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$z = x+iy \quad \bar{z} = x-iy$$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y \quad \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}f = A\mathrm{d}z + B\mathrm{d}\bar{z}$$

$$A+B = \frac{\partial f}{\partial x} \quad iA - iB = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\mathrm{d}f = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{=\frac{\partial f}{\partial z}}\mathrm{d}z + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}\mathrm{d}\bar{z}$$

Условие Коши-Римана можно тогда переписать:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

и тогда если f голоморфна, то

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Следствие 1. f голоморфная на Ω и $\operatorname{Re} f = const$. Тогда $f = const$.

▶ $f = g + ih$, $g = const$.

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad 0 = \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow h = const \Rightarrow f = const$$

◀

Следствие 2. f голоморфна и дважды дифференуируема. Тогда

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Тажке, такая функицз называется гармонической.

▶

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$$

◀

Замечание 7.6.3. $g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ гармноническая функция. Тогда существует гармоническая $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$, что $f = g + ih$ голоморфная и единственная с точностью до прибавления константы. Такие g и h называют гармонически сопряжёнными.

Теорема 7.6.1 (Коши)**.** $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ голоморфная ($f \in H(\Omega)$). Тогда форма

$$f(z)\mathrm{d}z$$

замкнута.

▶ **Первое доказательство**. Возьмём любую точку, из её окрестности возьмём прямоугольник G с правильно ориентированным контуром ∂G. Если $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то доказательство очень простое:

$$\int\limits_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial G} (g(z) + ih(z))(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \int\limits_{\partial G} (g(z)\mathrm{d}x - h(z)\mathrm{d}y) + i\int\limits_{\partial G} (h(z)\mathrm{d}x + g(z)\mathrm{d}y) = \cdots$$

Формула Грина!

$$\cdots = \int\limits_{G} \left(\left(-\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right)$$

Оба коэффициенты по условию Коши—Римана нули. ◀

Замечание 7.6.4. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — произвольная вещественно дифференцируемая. Тогда

$$\oint\limits_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = 2i\int\limits_{G} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

▶

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

◀

▶ **Второе доказательство**. Теперь честное доказательство теоремы, без непрерывности. Обозначим

$$\alpha(P) \leftrightharpoons \int\limits_{P} f(z)\mathrm{d}z$$

Берём наш прямоугольник P и предположим, что на нём $\alpha(P) \neq 0$. Разрежем наш прямоугольник на 4 подпрямоугольника $\tilde{P}$, $\tilde{\tilde{P}}$, $\tilde{\tilde{\tilde{P}}}$ и $\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{P}}}}$.

$$\alpha(P) = \alpha\left(\tilde{P}\right) + \alpha\left(\tilde{\tilde{P}}\right) + \alpha\left(\tilde{\tilde{\tilde{P}}}\right) + \alpha\left(\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{P}}}}\right)$$

Не умаляя общности,

$$|\alpha(\tilde{P})| \geqslant \frac{1}{4}|\alpha(P)|$$

Тогда $P_1 \leftrightharpoons \tilde{P}$. Повторим процесс рекурсивно.

$$P \supset P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$$

Последовательность этих вложенных прямоугольников стремится к нулю по размеру. Выберем общую точку z_0.

$$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + \beta(z) \quad \beta(z - z_0) = o(z - z_0)$$

$$\int\limits_{P_n} f(z)\mathrm{d}z = \underbrace{\int\limits_{P_n} f(z_0)\mathrm{d}z}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{P_n} k(z - z_0)\mathrm{d}z}_{=0} + \int\limits_{P_n} \beta(z)\mathrm{d}z$$

Оценим

$$\left|\int\limits_{P_n} \beta(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant perimeter(P_n) \cdot \max|\beta(z)| = \frac{perimeter(P)}{2^n}\max|\beta(z)|i =$$

$$= \frac{perimeter(P)}{2^n}|z - z_0| \cdot o(1) \leqslant \left(\frac{perimter(P)}{2^n}\right)^2 o(1)$$

$$\frac{1}{4^n}|\alpha(P)| \leqslant |\alpha(P)| \leqslant \frac{perimeter(P)^2}{4^n}o(1)$$

◀

Следствие 7.6.1.1. $f \in H(\Omega)$, γ — стягиваемая петля.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Следствие 7.6.1.2. $f \in H(\Omega)$. Тогда у f есть локальная первообразная, которая голомофрная.

▶ $f(z)\mathrm{d}z$ замкнута, значит в окрестности точки есть первообразная $dF = f(z)\mathrm{d}z$, откуда $F' = \frac{\partial F}{\partial z} = f$. ◀

Теорема 7.6.2. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in C(\Omega)$, но $f \in H(\Omega \setminus \Delta)$, где Δ — фрагмент горизонтальной прямой. Тогда $f(z)\mathrm{d}z$ всё равно замкнута.

▶ Режем на прямоугольнкики. Если прямая не задела — смотри на предыдущий случай. Если задела — разрежем по прямой. Для каждого такого прямоугольника отступим от прямой на ε. Для таких прямоугольников всё доказано, а дальше по непрерывности хотим показать, что интегралы сойдутся.

$$\int\limits_P - \int\limits_{P_\varepsilon} = \int\limits_{\text{боковые фрагменты}} + \int\limits_{\text{сторона по прямой}} (f(z) - f(z - i\varepsilon))$$

Первое можно оценить как $2\varepsilon \max|f|$, а второе как $\delta \cdot$ длина стороны ◀

Следствие 7.6.2.1. Если f голоморфна в Ω за исклчением некоторого количества точек, не имеющих предела, то тоже форма замнута.

▶ Раз нет предельной точки, то либо можно выбрать окрестность без них, либо она совпадает с центром окрестности. Во втором случае вырежем целый диаметр, и смотри предыдущую теорему. ◀

$\mathfrak{Def}$ 7.6.2. $\gamma\colon [b, c] \to \mathbb{C}$ замкнута кривая, a не лежит на γ. Возьмём полярное отображение кривой в полярные координаты из точки a в виде $(r(t), \varphi(t))$. Теперь назовём индексом кривой относительно a

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{\varphi(c) - \varphi(b)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

В силу замкнутости, $\varphi(c) - \varphi(b)$ делится нацело на 2π. Неформально — сколько оборотов вокруг точки делает кривая.

Альтернативно, можно считать индекс так (не доказываем, что это так): проводим луч из точки, каждый раз, когда кривая проходит через луч справа налево, прибавляем 1, когда слева направо, вычитаем 1.

Теорема 7.6.3. γ — замкнутая кривая, не проходящая через 0. Тогда

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$$

▶

$$z = re^{i\varphi} \quad \mathrm{d}z = (r'(t)e^{i\varphi(t)} + i\varphi'(t)r(t)e^{i\varphi(t)})\mathrm{d}t$$
$$\frac{dz}{z} = \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t)\right)\mathrm{d}t$$
$$\int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_\gamma \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t)\right)\mathrm{d}t = (\ln r(t) + i\varphi(t))\Big|_{t=b}^{c} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, a)$$

◀

Следствие 7.6.3.1.

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a}$$

Теорема 7.6.4 (Интегральная теорема Коши)**.** $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, γ стягивается и не проходит через a. Тогда

$$\int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 2\pi i f(a)\operatorname{Ind}(\gamma, a)$$

▶

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$$

$g \in C(\Omega)$, $g \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Тогда $f(z)\mathrm{d}z$ замнутая и

$$0 = \int\limits_\gamma g(z)\mathrm{d}z = \int\limits_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathrm{d}z = \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z - f(a)\int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

◀

Следствие 7.6.4.1. f — голоморфная в окрестности единичного круга.

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i f(a) & a \in \mathbb{D} \\ 0 & a \notin \bar{\mathbb{D}} \end{cases}$$

Теорема 7.6.5. $f \in H(r\mathbb{D})$. Тогда f аналитична в $r\mathbb{D}$.

▶ $0 < r_1 < r_2 < r$, $|\zeta| = r_2$, $|z| < r_1$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r_2\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \ldots$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

$$\ldots = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r_2\mathbb{T}} f(\zeta)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \ldots$$

Равномерно сходится: мажорируется рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\max|f|\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$

$$\ldots = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{r_2\mathbb{T}}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\cdot z^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r_2\mathbb{T}}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

◀

Следствие 7.6.5.1. f толоморфна тогда и только тогда, когда она аналитична.

▶ Берём окрестность точки, берём в ней круг, там теорема. ◀

Следствие 7.6.5.2. Если f голоморфна, то она бесконечно дифференцируема.

Следствие 7.6.5.3. $f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega)$.

Следствие 7.6.5.4. Если $f \in H(\Omega)$, то $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ гармонические.

Теорема 7.6.6 (Морера)**.** $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z)\mathrm{d}z$ замкнута. Тогда f голомофрна.

▶ $z_0 \in \Omega$, B — круг с центром в z_0, в котороем есть первообразная. F — первообразная, значит F голоморфна в B, значит по 3 следствию производная тоже голоморфна, а это $F' = f$. ◀

Следствие 7.6.6.1. $f \in C(\Omega) \wedge f \in H(\Omega \setminus \Delta) \Rightarrow f \in H(\Omega)$.

Следствие 7.6.6.2. $f \in C(\Omega)$, f голоморфна, кроме некоторого набора точек без предельной. Тогда f голоморфна на всей Ω.

Теорема 7.6.7 (Интегральная теорема Коши, вторая версия)**.** $f \in H(\Omega)$, $K \subset \Omega$ — компакт с кусочно-гладной границей. Тогда

$$\int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i f(a) & a \in \operatorname{int} K \\ 0 & a \notin K \end{cases}$$

▶ Пусть $a \notin K$.

$$\frac{f(z)}{z-a} \in H(B_\varepsilon(K)) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{f(z)}{z-a}\right) = 0$$

$$\int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 2i\int\limits_{K} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{f(z)}{z-a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

Пусть $a \in \operatorname{int} K$. Рассмотрим $\tilde{K} = K \setminus \bar{B}_r(a)$. Мы уже знаем, что

$$\int\limits_{\partial \tilde{k}} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 0$$

но

$$\int\limits_{\partial \tilde{k}} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z - \underbrace{\oint \frac{f(z)}{z-a}}_{=2\pi i f(a)}$$

◀

Упражнение. TODO

7.7. Ряд Лорана

Теорема 7.7.1 (Неравенство Коши)**.** $f \in H(R\mathbb{D})$, $r < R$, $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n z^n$. Тогда

$$|a_n| \leqslant \frac{\max_{|z|=r}|f(z)|}{r^n}$$

Обозначим

$$M(r) := \max_{|z|=r}|f(z)|$$

▶

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

◀

Замечание 7.7.1. Если $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}$, то $|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$.

$\mathfrak{Def}$ **7.7.1.** Функция называется целой, если она голоморфна на $\mathbb{C}$.

Теорема 7.7.2 (Лиувилля)**.** $f \in H(\mathbb{C})$, $|f| \leqslant M$. Тогда $f = const$.

▶ Покажем, что в ряде Тейлора все коэффициенты, кроме нулевого, нули:

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \leqslant \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \Rightarrow |a_n| = 0$$

◀

Теорема 7.7.3 (Основная теорема алгебры)**.** $P \in \mathbb{C}[x]$, $P \neq const$. Тогда P имеет корень.

▶ Пусть $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0$. Расмотрим $f(z) = \frac{1}{P(z)}$. $f \in H(\mathbb{C})$. Докажем, что она ограничена. Для этого покажем, что $|P(z)| \geqslant \delta > 0$. Найдём круг $R\mathbb{D}$, вне которого $P(z) \geqslant 1$.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$
$$R = 1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$$

Возьмём $|z| > R > 1$:

$$|P(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \geqslant |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \geqslant$$
$$\geqslant |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - |a_{n-2}z^{n-2}| - \dots - |a_0| \geqslant |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - |a_{n-2}z^{n-1}| - \dots - |a_0z^{n-1}| \geqslant$$
$$= |z^{n-1}|(|z| - |a_{n-1}| - |a_{n-2}| - \dots - |a_0|) > |z|^{n-1} \geqslant 1$$

Ура, нашли такой круг. Вне него f ограничена. Посмотрим внутри круга. $|P(z)|$ — непрерывна на компакте $R\bar{\mathbb{D}}$, значит достигает минимального значения в некоторой точке z_0, и оно больше нуля (по предположению). Откуда $|P(z)| \geqslant \delta = \min\{1, |P(z_0)|\}$.
Раз f целая и ограниченная, то она костанта, значит P константа. ◀

Теорема 7.7.4 (О среднем)**.** $f \in H(\Omega)$, $a + r\bar{\mathbb{D}} \subset \Omega$ [2]. Тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) \mathrm{d}\varphi$$

▶

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a} \mathrm{d}z =$$

$$z = a + re^{i\varphi} \quad \mathrm{d}z = r\mathrm{d}e^{i\varphi} = rie^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi})$$

◀

[2] Тут написано: круг радиуса r с центром в точке a, что логично с точки зрения прибавления ко всем точкам круга положения центра

Следствие 7.7.4.1. При тех же условиях

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} f(z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

▶ Не умаляя общности, пусть $a = 0$.

$$\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z| \leqslant r} f(z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\rho=0}^{r} \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) \mathrm{d}\varphi \, \rho \mathrm{d}\rho}_{2\pi f(0)} = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{0}^{r} 2\pi f(0) \rho \mathrm{d}\rho = f(0)$$

◀

Теорема 7.7.5 (Принип максимума)**.** Пусть $|f(a)| \geqslant |f(z)|$ при всех z из некоторой окрестности точки a. Тогда в этой окрестности $f = const$.

Замечание 7.7.2. На самом деле отслюда следует, что функция константа вообще (докажем позже).

Замечание 7.7.3. Утверждение верно для любой функции, подходящей в теорему о среднем.

▶ Случай $f(a) = 0$ тривиален. Не умаляя общности, пусть $f(a) > 0$. Тогда $f(a) \geqslant |f(z)|$.

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} f(z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$f(a) = |f(a)| \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} |f(z)| \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} f(a) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = f(a)$$

Значит, везде во второй строчке равенства, откуда

$$\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} |f(z)| \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} f(a) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$|f(z)| = f(a)$$

Теперь покажем вещественные части, этого хватит

$$f(a) = \operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} \operatorname{Re} f(z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} |f(z)| \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|z-a| \leqslant r} f(a) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = f(a)$$

◀

Следствие 7.7.5.1. $f \in C(\operatorname{cl} \Omega) \cap H(\Omega)$, $M = \max_{z \in \partial \Omega} |f(z)|$, Ω ограничена. Тогда

$$\forall z \in \Omega, |f(z)| \leqslant M$$

и

$$(\exists z_0 \in \Omega \colon |f(z_0) = M|) \Rightarrow f = const$$

▶ $\operatorname{cl} \Omega$ — компакт, значит есть $z_0 \in \operatorname{cl} \Omega$, где достигается максимум $|f(z)|$. Если хоть одна эта точка на границе — первый пункт доказан автоматически. Осталось разобрать случай, когда максимум достигается в $z_0 \in \Omega$. Тогда есть окрестность (Ω открытое), на котором функция постоянна. Теперь возьмём произвольную $z_1 \in \Omega$ и покажем, что $f(z_0) = f(z_1)$. Для этого будем идти по ломаной, их связывающей, и для каждой точки понимать, что раз значение в ней равно $f(z_0)$, то она больше или равна своей окрестности, и на этой окретсности тоже константа. Для этого итеративно движемся: взяли круг вокруг z_0 наибольшего радиуса, помещающегося в Ω, взяли точку на ломаной, продолжили. Это корректно, так как у каждой точки есть положительное расстояние до границы, и на ломаной (как на компакте) есть минимум. Тогда конечную длину кривой мы покроем конечным количеством шагов. ◀

Лемма 7.7.1 (Шварца). $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f \in H(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$. Тогда $|f(z)| \leqslant z$ и если достигается равенство, то

$$f(z) = e^{i\varphi} z$$

▶

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

$$g \in H(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \wedge g \in C(\mathbb{D}) \Rightarrow g \in H(\mathbb{D})$$

$$\forall z \in r\mathbb{T}, |g(z)| \leqslant \frac{1}{r} \quad 0 < r < 1$$

По принципу максимума

$$\forall z \in r\mathbb{D}, |g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$$

$$r \to 1$$

$$\forall z \in \mathbb{D}, |g(z)| \leqslant 1$$

Первый пункт проверили. Далее, если где-то достигается максимум, то $g = const$ и $|g| = 1$, то есть $g = e^{i\varphi}$. ◀

𝔇𝔢𝔣 7.7.2. Ряд Лорана — формально $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$.

Это почти обычный ряд, но бесконечный в две стороны. Теперь хочется понять, в каком смысле мы понимаем его сходимость. Для начала рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — это обычный степенной ряд, у него есть круг сходимости $|z| < R_2$ ($R_2 \in [0; +\infty]$), что происходит на границе нас не интересует. А потом рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)$ (называется *главной частью ряда Лорана*) — он тоже обычный степенной ряд, но относительно $\left(\frac{1}{z}\right)$. У него есть круг сходимости $|\frac{1}{z}| < \frac{1}{R_1}$ ($R_1 \in [0; +\infty]$). Тогда считаем, что ряд Лорана сходится в полосе $R_1 < |z| < R_2$. Соответственно, если $R_1 \geqslant R_2$, то ряд не сходится, но такие нас интересовать не будут.

1. Из свойств обычных степенных рядов мы можем понять, что если $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, то при $r_1 \leqslant |Z| \leqslant r_2$ имеется равномерная сходимость: это мы просто отступили от границ кругов сходимости.

2. Следовательно, ряд Лорана можно почленно интегрировать и дифференцировать в его кольце сходимости.

Теорема 7.7.6. Пусть f голоморфна в полосе $R_1 < |z| < R_2$. Тогда если в этой полосе $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, то коэффициенты z_n определяются однозначно и формула для их вычисления вот такая (как в формуле Тейлора):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

Здесь $R_1 < r < R_2$.

▶ $\zeta = re^{i\varphi}$:

$$f(re^{i\varphi}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}$$

$$\int\limits_{r\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \int\limits_0^{2\pi} r^{-n-1} e^{-(n+1)i\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k r^k e^{ik\varphi} ire^{i\varphi} \mathrm{d}\varphi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ir^{k-n} a_k \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-n)\varphi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi i a_n$$

◀

Замечание 7.7.4. Неравенство Коши

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \quad n \in \mathbb{Z}$$

справедливо и для коэффициентов ряда Лорана.

Теорема 7.7.7 (Лорана)**.** Если f голоморфна в кольце $R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2$, то

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

сходящемуся при $R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2$.

▶ Будем действовать очень похожим на ряд Тейлора методом, но отличия будут. Возьмём $R_1 < \bar{r}_1 < r_1 < r_2 < \bar{r}_2 < R_2$. f голоморфна в кольце $K \leftrightharpoons \bar{r}_1 \leqslant |z| \leqslant \bar{r}_2$, напишем на границе формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}z =$$

Граница этого компакта — две окружности, причём внутренная ориентирована по, а внешняя — против часовой стрелки.

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\bar{r}_2\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\bar{r}_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right)$$

$$\int\limits_{\bar{r}_2\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \cdots$$

$$|\zeta| = \bar{r}_2 > r_2 \geqslant |z|$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \text{ — равномерно сходится}$$

$$\cdots = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bar{r}_2\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bar{r}_2\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta}_{\leftrightharpoons a_n}$$

$$-\int\limits_{\bar{r}_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \cdots$$

$$|\zeta| = \bar{r}_1 < r_1 \leqslant |z|$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}} \text{ — равномерно сходится}$$

$$\cdots = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bar{r}_2\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bar{r}_2\mathbb{T}} f(\zeta)\zeta^n\mathrm{d}\zeta}_{\leftrightharpoons a_{-n-1}}$$

◀

Теорема 7.7.8. Если f голоморфна в кольце $R_2 < |z| < R_2$, то f можно разложить в $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1 \in H(R_2\mathbb{D}) \quad f_2 \in H(\mathbb{C} \setminus R_1\mathbb{D})$$

и при этом

$$\lim_{|z|\to\infty} |f_2(z)| = 0$$

причём такое разложение единственно.

▶

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}$$

$$f_1(z) \leftrightharpoons \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ голоморфна как ряд Тейлора}$$

$$f_2(z) \leftrightharpoons \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \text{ голоморфна как ряд Тейлора для } \frac{1}{z}$$

f_2 Единственность: пусть $f = g_1 + g_2$.

$$h \leftrightharpoons \underbrace{f_1 - g_1}_{\in H(R_2\mathbb{D})} = \underbrace{g_2 - f_2}_{\in H(\mathbb{C}\setminus R_1\mathbb{D})} \in H(\mathbb{C})$$

$$\lim_{|z|\to\infty} |g_2(z) - f_2(z)| = 0$$

Делаем вывод, что с какого-то R для $|z| \geqslant R$ имеет место $|h| \leqslant 1$, далее на $|z| in [r, R]$ h ограничена как непрерывная на компакте, а также h ограничена при $|z| \leqslant r$ как непрерывная $f_1 - g_1$. Итого, h стремящаяся к нулю константа, то есть 0. ◀

𝔇𝔢𝔣 7.7.3. a — изолированная особая точка функции f, если она голоморфна в некоторой окрестности этой точки, но не в самой точке.

𝔇𝔢𝔣 7.7.4. a — изолированная особая точка. Если

1. $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ существует и конечен, то a — устранимая особенность.
2. $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ существует и бесконечен (это означает, что $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = +\infty$), то a — полюс.
3. $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не сходится, то a — существенная особая точка.

Теорема 7.7.9. a — изолированная особая точка. Тогда следующее равносильно:

1. a — устранимая особенность.
2. f можно доопределить до голоморфной в окрестности a
3. В ряде Лорана f отсуствует главная часть
4. f ограничена в окрестности a

▶ $2 \Rightarrow 3$**:** Если можно доопределить, то раскладывается в Тейлора, то есть Лорана без главной части.

$3 \Rightarrow 1$**:** Подставим в ряд Тейлора a и доопределим этим значением.

$1 \Rightarrow 4$**:** Функция имеет конечный предел, значит ограничена.

$4 \Rightarrow 2$: Пусть $f(z) \leqslant M$ при $0 < |z-a| < \varepsilon$, тогда

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \leqslant Mr^{-n} \xrightarrow{n<0, r\to 0} 0$$

еТогда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

Скажем, что $f(a) = a_0$.

◀

7.8. Теорема о единственности и нули голоморфной функции

Теорема 7.8.1 (Первая версия теоремы о единственности)**.** $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$. Тогда следующее равносильно:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$
2. $f\big|_{B_r(a)} \equiv 0$
3. $f \equiv 0$

▶ **$1 \Rightarrow 2$:** f голоморфна в окрестности a, значит она раскладывается в ряд Тейлора, но там нулевые коэффициенты.

$2 \Rightarrow 1$: Очевидно.

$3 \Rightarrow 1$: Ещё очевиднее.

$2 \Rightarrow 3$: $\bar{\Omega} \subset \Omega$ — множество точек, в окрестности которых $f \equiv 0$. Там точно живёт a. А ещё $\bar{\Omega}$ открытое — каждая точка лежит с окрестностью. А ещё $\bar{\Omega}$ замкнуто в Ω: пусть $z_k \in \bar{\Omega}$, тогда $\forall n, k \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_k) = 0$, но все производные непрерывны, значит если $z_k \to z$, то $0 = f^{(n)}(z_k) \to f^{(n)}(z)$, и $z \in \bar{\Omega}$.
Теперь просто по линейной связности Ω можно понять, что любая точка Ω лежит в $\bar{\Omega}$.

◀

Следствие 7.8.1.1. $f, g \in H(\Omega)$, $\forall z \in B_r(z_0), f(z) = g(z)$. Тогда $f = g$.

𝔇𝔢𝔣 7.8.1 (Аналитическое продолжение)**.** Пусть есть две области $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, $f_1 \in H(\Omega_1)$. Если $f_2 \in H(\Omega_2)$ и $f_1 = f_2$ на $\Omega_1 \cap \Omega_2$, то f_2 называывается аналитическим продолжением f_1.

Следствие 7.8.1.2. Из следсвтия видно, что если продоожение есть, то оно однозначно.

𝔇𝔢𝔣 7.8.2. $f \in H(\Sigma)$, $z_0 \in \Sigma$. Если $f \not\equiv 0$, а $f(z_0) = 0$, то z_0 — нуль (корень) f.

Замечание 7.8.1. z_0 — корень.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad a_k \neq 0$$

Это k — порядок (кратность) нуля (корня).

Теорема 7.8.2. $f \in H(\Sigma)$, $f \neq 0$. Множество нулей f дискретно (состоит из изолированных точек).

▶ Пусть z_0 — ноль f_0.

$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n}_{\leftrightharpoons g(z)}$$

$g(z)$ голоморфна в окрестности z_0 и $g(z_0) = a_k \neq 0$. $|g(z)|$ непрерывна в окрестности z_0 и $|g(z)| \geqslant \frac{|a_k|}{2} > 0$. Тогда в окрестности z_0 оба множителя f не обращаются в 0 в окрестности z_0. ◀

Следствие 7.8.2.1. $f \in H(\Sigma)$, $f \not\equiv 0$. В любом компакте существует лишь константое число корней.

▶ $K \subset \Sigma$, $\{\omega_k\} \subset K$ — нули, значит есть сходящаяся подпоследовательность $\omega_{n_k} \to \omega_0 \in K$. Но f непрерывна, значит $f(\omega_0) = 0$. Нашли неизолированный корень. ◀

Теорема 7.8.3 (о единственности)**.** $f, g \in H(\Omega)$, $\{\omega_k\} \subset \Omega$, $\forall k, f(\omega_k) = g(\omega_k)$. Если последовательность $\{\omega_k\}$ имеет предельную точку в Ω, то $f \equiv g$.

▶ Рассмотрим $h = f - g$. Если есть предельная точка, то у h есть неизолированный ноль, и $h \equiv 0$. ◀

Замечание 7.8.2. Были у нас функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, определяемые без рядов. Потом мы из рядов создали e^z, $\sin z$, $\cos z$. Это единственные продолжения соотвесвтующих e^x, $\sin x$, $\cos x$, сохраняющие аналитичность.

Теорема 7.8.4 (связь нулей и полюсов)**.** $f \in H(\Omega)$, a — полюс. Тогда существует g, голоморфная в окрествности a, что в ней

$$\forall z \neq a, f(z) = \frac{1}{g(z)}$$

и $g(a) = 0$.

▶ Сначала проверим, что $f(z)$ в окрестности полюса не ноль. a — полюс, значит $|f(z)| \xrightarrow{z \to a} +\infty$, значит в некоторой оркестности $|f(z)| > 0$. Далее, g автоматически определена в окрестности, а в самой точке a по непрерывности доопределили $g(z) = 0$.

Теперь, g голоморфна в проколотой окрестности точки a и непрерывна во всей окрестности, значит она логоморфна. ◀

𝔇𝔢𝔣 7.8.3. Кратность полюса f — кратность соотвествующего нуля $1/f$.

Теорема 7.8.5. $f \in H(\Sigma \setminus \{a\})$. Тогда a — полюс тогда и только тогда, когда в разложении в ряд Лорана в кольце с центром в точке a в главной части есть лишь конечное ненулевое число коэффициентов.

▶ **⇒:** a — полюс, значит $g = 1/f$ имеет ноль в a, значит

$$g(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} (z-a)^n}_{\leftrightharpoons h(z) \neq 0}$$

$$f(z) = (z-a)^{-k} \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{голоморфна}} = (z-a)^{-k} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=-k}^{+\infty} b_{n+k} (z-a)^n$$

$\Leftarrow$:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \underbrace{(z-a)^{-k}}_{\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-k}(z-a)^n}_{\to a_{n-k}\neq 0}$$

◀

Замечание 7.8.3. Для полной красоты осталось понять, что порядок полюса и есть $-\min\{k \mid a_k \neq 0\}$ из разложения в ряд Лорана. Но если посмотреть на доказательство, то та самая кратность корня и переходит, куда надо. Осталось понять, что $b_0 \neq 0$, но $b_0 = \frac{1}{h}(a) \neq 0$.

Теорема 7.8.6. $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, a — особая точка, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$. Тогда

1. a устранимая особая точка тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана обращена в ноль.
2. a полюс, если в главной части ряда Лорана лишь конечное ненулевое число ненулевых членов.
3. a существенная особая точка, если в главной части ряда Лорана бесконечно много ненулевых членов.

▶ А уже все доказали! ◀

Теорема 7.8.7 (Сохоцкого)**.** a — существенная особая точка f. Тогда

$$\forall A \in \mathbb{C}, \exists z_n \to a \colon f(z_n) \to A$$

или то же самое

$$\forall \varepsilon > 0, \operatorname{cl} f(\{0 < |z-a| < \varepsilon\}) = \mathbb{C}$$

То есть вокруг существенной особой точки функция ведёт себя абсолютно хаотично.

▶ a — сущесвтенная особая точка, значит f неограничена в её окрестности (иначе устранимая).

$$\exists z_n \to a \colon |f(z_n)| \to +\infty$$

Пусть в $0 < |z-a| < \varepsilon$ f не принимает значение A. Тогда заведём $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ — голоморфна в $0 < |z-a| < \varepsilon$. Тогда $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$. Поймём, что a — существенная особая точка g. Она точно не устранимая — иначе была бы или устранимой и для f (в случае $g(a) \neq 0$) или пределом ($g(z) = 0$). Если она полюс, то $f \to A$, противоречие.
Тогда есть $z_n \to a$, что $|g(z_n)| \to +\infty$. Но тогда опять $f(z_n) \to A$. ◀

Есть более мощный факт:

Теорема 7.8.8 (Пикара)**.** a — сущесвтенно особая точка f. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$f(\{0 < |z-a| < \varepsilon\})$$

или равно $\mathbb{C}$, или $\mathbb{C}$ без *одной* точки.

Доказывать не будем.

Пример 7.8.1.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

Можно доказать, что она достигает в окрестности нуля всех значений, кроме собсвтенно нуля.

𝔇𝔢𝔣 7.8.4. Ω — область. f называется мероморфной, если существует последовательность $\{a_n\} \subset \Omega$, что $f \in H(\Omega \setminus \{a_n\})$ и в a_n находятся полюса. Можно думать, что в этих точках есть значение бесконечность.

Теорема 7.8.9. Если f меломорфна, то f' тоже меломорфна. Полюса у f и f' в одних и тех же точках. Если у f полюс r_0 порядка n, то у f' он порядка $n+1$.

▶ Если f голоморфна на открытом множестве, то f' там тоже голоморфна, значит множество особых точек f' содержится в множестве таковых у f.

Пусть z_0 — особая точка f. Если это полюс порядка n, то в окрестности есть рахложение

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$$

$$f'(z) = \frac{-nc_{-n}}{(z-z_0)^{n+1}} + \dots + \frac{-c_{-1}}{(z-z_0)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}$$

Значит z_0 — полюс f' порядка $n+1$. ◀

Пример 7.8.2.

$$\frac{\sin z}{z} \quad \frac{\cos z - 1}{z^2}$$

0 — устранимая особая точка.

$$\frac{e^z}{z} \quad \frac{\sin z}{z}$$

0 — полюс 10-го и 4-го порядка.

$$e^{1/z} \quad \sin\frac{1}{z} \quad \cos\frac{1}{z}$$

0 — существенная особая точка.

7.9. Вычеты

𝔇𝔢𝔣 7.9.1 (Бесконечный предел).

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty$$

если $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$.

1. $\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{z_n} = 0$
2. $\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty \wedge |w_k| \geqslant \delta > 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n w_n = \infty$
3. $\lim_{n\to+\infty} z_n \wedge w_k$ ограничена $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(z_n \pm w_n) = \infty$
4. $\lim_{n\to+\infty} z_n \wedge w_k$ ограничена $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{z_n} = 0$

𝔇𝔢𝔣 7.9.2. Предел $\lim_{n\to+\infty} z_n = A$ можно определить по Коши или по Гейне.

Замечание 7.9.1. $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Сфера Римана: давайте поставим на 0 комплексной плоскости сферу диаметра 1:

$$u^2 + v^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Построим отображение $\mathbb{C}$ на эту сферу: проводим в точку x на плоскости луч из северного полюса, смотрим точку пересечения сферы. Сам северный полюс отображается на ∞.

Теорема 7.9.1. При отображении выше точка $z = x + iy$ отображается в

$$u = \frac{x}{1+|z|^2} \quad v = \frac{y}{1+|z|^2} \quad w = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

Доказать: упражнение, вспомнить 11 класс.

Следствие 7.9.1.1. $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}$. Расстояние между ними на сфере

$$\frac{|z-\tilde{z}|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\tilde{z}|^2}}$$

▶ Тупо раскрываем скобочки. ◀

Следствие 7.9.1.2. Расстояние между $z \in \mathbb{C}$ и бесконечностью на сфере:

$$\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

▶

$$u^2 + v^2 + (w-1)^2 = \frac{x^2}{(1+|z|^2)^2} + \frac{y^2}{(1+|z|^2)^2} + \frac{1}{(1+|z|^2)^2} = \frac{1}{1+|z|^2}$$

◀

Следствие 7.9.1.3. Сходимость в $\bar{\mathbb{C}}$ равносильна сходимости на сфере Римана.

▶ Если $z_n \to z_0$ в $\bar{C}$, то видно, что формулы выше стремятся к нулю.
Обратно: пусть $|z_n - z| \nrightarrow 0$, но $A \leftrightharpoons \frac{|z-\tilde{z}|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\tilde{z}|^2}}$. Тогда $|z_{n_k} - z_0| \geqslant \varepsilon > 0$, и

$$\sqrt{1+|z_{n_k}|^2} \to +\infty \Rightarrow z_{n_k} \to \infty \to A \to 1 \neq 0$$

Если возьмём $\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \to 0$, то очевидно $z_n \to \infty$. ◀

Следствие 7.9.1.4. $\bar{\mathbb{C}}$ компакт.

𝔇𝔢𝔣 7.9.3. Пусть f голомофрна в окрестности ∞. Тогда ∞:

устранимая особая точка если есть конечный предел,

полюс если есть бесконечный предел,

существенная особая точка если предела нет.

Замечание 7.9.2. Если f голоморфна вне круга радиуса R, то она расскладывается там в ряд Лорана, и $g = {}^1/_f$ раскладывается в ряд Лорана в круге радиуса ${}^1/_R$ без центра.

Теорема 7.9.2.

1. Следующее равносильно: ∞ — устранимая особая точка f, f ограничена в окрестности ∞, f в ряде Лорана не имеет членов с положительными степенями.
2. ∞ полюс тогда и только тогда, когда в ряде Лорана коенчное число ненулевых членов с полодительными степенями, и наибольшая такая степень равна порядку полюса.
3. ∞ существенная особая тока тогда и только тогда, когда в ряде Лорана бесконечно много ненулывых членов с положительной степенью.

𝔇𝔢𝔣 7.9.4. f голоморна в ∞, если она голоморфна в окрестности ∞ и ∞ — устранимая особая точка.

Теперь можно много предыдущих теорем переписать для $\bar{\mathbb{C}}$. Например:

Теорема 7.9.3 (Лиувилля)**.** $f \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow f \equiv const$

𝔇𝔢𝔣 7.9.5.

$$f \in H(\bar{C}) \Rightarrow f \in H(\mathbb{C}) \wedge f \in C(\mathbb{C})$$

Непрерына на компакте, значит ограничена, и ссылаемся на старую теорему.

𝔇𝔢𝔣 7.9.6. f, $z_0 \neq \infty$ — изолированная особая точка f. Вычетом функции f в точке z_0 называется

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f \overset{\text{Def}}{=} c_{-1}$$

где

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Иногда так писать неудобно, потому что функция всегда одна и та же, а точки разные, и пишут наоборот — точку справа, функцию внизу.

𝔇𝔢𝔣 7.9.7.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f \overset{\text{Def}}{=} -c_{-1}$$

Теорема 7.9.4 (Коши о вычетах)**.** Пусть f голомофрна в Ω без какого-то конечного числа особых точек a_j, $K \subset \Omega$ — компакт, и особые точки не лежат на его границе. Тогда, внезапно,

$$\int\limits_{\partial K} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a_j \in \operatorname{int} K} \operatorname*{res}_{z=a_j} f$$

То есть посчитать интеграл можно просто сложив несколько вычетов.

Лемма 7.9.1. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ сходится в кольце $R_1 < |z| < R_2$. Пусть $R_1 < r < R_2$. Тогда

$$\int\limits_{|z|=r} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f$$

▶ На окружности сходится равномерно,

$$\int\limits_{|z|=r} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{|z|=r} z^n \mathrm{d}z$$

$$\int\limits_{|z|=r} z^n \mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} rie^{i\varphi} r^n r^{in\varphi} \mathrm{d}\varphi = ir^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

◀

▶ Возьмём компакт $\bar{K}$, равный K без окрестностей особых точек B_j. Ориентируем его границу так, чтобы область всегда была слева по обходу. Внутри него вообще нет особых точек, и интеграл по его границе 0.

$$\int\limits_K f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\bar{K}} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{a_j \in \operatorname{int} K} \int\limits_{|z-a_j|=r_j} f(z)\mathrm{d}z = 0 + \sum_{a_j \in \operatorname{int} K} 2\pi i c_j$$

◀

Следствие 7.9.4.1. f голомофрна в $\mathbb{C}$, кроеме конечного числа особых точек. Тогда сумма вычетов f в этих точках и на бесконечности равна нулю.

▶ Возьмём достаточно большой круг. Теорема нам говорит, что интергал по границе круга равен сумме вычетов всех особых точек. С другой стороны, по лемме этот же интеграл равен коэффициенту при z^{-1} в разложении

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

и он по определению равен $-\operatorname{res}_{z=\infty} f$. ◀

Формулы для вычисления вычетов:

1. a — полюс первого порядка (простой полюс).

$$\operatorname*{res}_{z=a} f = \lim_{z\to a}(z-a)f(a)$$

▶

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} - \sum_{i=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

◀

2. g, h — голоморфна в окрестности a, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{g}{h} = \lim_{z\to a} \frac{g(a)}{h'(a)}$$

▶

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{g}{h} = \lim_{z\to a} \frac{g(z)(z-a)}{h(z)} = \lim_{z\to a} g(z)\frac{z-a}{h(z)-h(a)} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

◀

3. a — полюс k-ого порядка.

$$\operatorname*{res}_{z=a} f = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-a)^k f(z)\right)$$

▶

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \dots + c_{-2}(z-a)^{k-2} + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^{n+k}$$

После дифференцирования останется только $(k-1)!\, c_{-1}$. ◀

Замечание 7.9.3. Если вы посчитаете, что порядок полюса больше, чем на самом деле, формула всё ещё работает — мы не пользовались $c_{-k} \neq 0$.

4. ∞ — устранимая особая точка.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z))$$

▶

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = \frac{c_{-1}}{z} + \underbrace{c_0}_{=f(\infty)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$$

$$z(f(\infty) - f(z)) = -c_{-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \to -c_1 = \operatorname*{res}_{z=\infty} f$$

◀

5. ∞ — устранимая особая точка, $f(z) = \varphi\left(1/z\right)$, φ голоморфна в окрестности 0. Тогда

$$\operatorname{res} z = \infty f = -\varphi'(0)$$

▶

$$\lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) = \lim_{w\to 0} \frac{1}{w}(\varphi(0) - \varphi(w)) = -\varphi'(0)$$

◀

6.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f = -\operatorname{res} z = 0 \frac{f\left(1/z\right)}{z^2}$$

▶

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

$$h(z) = \frac{f\left(1/z\right)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}}$$

$$\frac{c_{-1}}{z^{-1+2}} = \frac{c_{-1}}{z^1}$$

◀

7. f — чётная функция.

$$\operatorname*{res}_{z=0} f = \operatorname{res} z = \infty f = 0$$

▶ В ряде Лорана только чётные степени. ◀

Пример 7.9.1.

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z+1} \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{|x|<4} \operatorname*{res}_{z=x} \frac{z^4}{e^z+1} = -4\pi^5 i$$

$$e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 = e^{x+iy} \Leftrightarrow x = 1 \land y = \pi + 2\pi k$$

$$|z| < 4 \Rightarrow z = \pm\pi i$$

$$\operatorname*{res}_{z=\pm\pi i} = \left.\frac{z^4}{(e^z+1)'}\right|_{z=\pm\pi i} = -\pi^4$$

Пример 7.9.2.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$$

Давайте считать на верхнем полукруге радиуса R.

$$\int\limits_{\mathbb{T}_r} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \operatorname{res} f$$

$$\int\limits_{\mathbb{T}_r} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{c_R} f(z)\mathrm{d}z$$

$$\left|\int\limits_{c_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi R \max_{c_R} |f(z)| \leqslant \frac{\pi R}{R^{2n}-1} \to 0$$

$$\operatorname*{res}_{z=e^{i\varphi_k}} \frac{1}{1+z^{2n}} = \frac{1}{(1+z^{2n})'}\bigg|_{z=e^{i\varphi_k}} = \frac{1}{2nz^{2n-1}}\bigg|_{z=e^{i\varphi_k}} = \frac{1}{2n}\frac{z}{z^{2n}}\bigg|_{z=e^{i\varphi_k}} = -\frac{1}{2n}e^{\frac{\pi i(1+2k)}{2n}}$$

$$I = -2\pi i \cdot \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\pi i(1+2k)}2n = \frac{-\pi i}{n}\frac{e^{\pi i/2n}\left(1-e^{n\cdot\pi i/n}\right)}{1-e^{\pi i/n}} = \frac{\pi}{n}\frac{2i\cdot e^{\pi i/2n}}{e^{\pi i/n}-1} = \frac{\pi}{n}\frac{2i}{e^{\pi i/2n}-e^{-\pi i/2n}} = \frac{\pi}{n\sin \pi/2n}$$

Лемма 7.9.2 (Жордана)**.** $C_{R_n} \subset \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = R_n \wedge \operatorname{Im} z > -a\}$, $R_n \to +\infty$, $\sup_{z\in C_{R_n}} |g(z)| = M_n \to 0$, $\lambda > 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{C_{R_n}} e^{i\lambda z}g(z)\mathrm{d}z = 0$$

▶

$$\left|\int\limits_{C_{R_n}} e^{i\lambda z}g(z)\mathrm{d}z\right|$$

Оценим нижние дужки, их угол α_n:

$$|e^{i\lambda z}| = |e^{i\lambda(x+iy)}| = e^{-\lambda y} \leqslant e^{\lambda a}$$
$$|g(z)| \leqslant M_n$$
$$\left|\int\limits_{C_{R_n}} e^{i\lambda z}g(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \alpha_n R_n \cdot \underbrace{M_n e^{\lambda a}}_{\to 0}$$
$$\alpha_n R_n \sim \sin a_n R_n = a \Rightarrow |\alpha_n R_n| \text{ ограничена}$$

четверть окружности из первого квадранта: $z = R_n e^{i\varphi} = R_n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\sin\varphi \geqslant \frac{2\pi}{\pi}$.

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R_n \sin\varphi} \leqslant e^{-\lambda R_n \frac{2\varphi}{\pi}} \left|\int\limits_{C_{R_n}} e^{i\lambda z}g(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} g(R_n e^{i\varphi})e^{i\lambda R_n e^{\varphi}}\mathrm{d}(R_n e^{i\varphi})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left|g(R_n e^{i\varphi})e^{i\lambda R_n e^{\varphi}}\mathrm{d}(R_n e^{i\varphi})\right| \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} M_n e^{-\lambda R_n\frac{2\varphi}{\pi}}R_n\mathrm{d}\varphi =$$

$$= M_n R_n \frac{\pi}{\lambda R_n} e^{-\lambda R_n\frac{2\varphi}{\pi}}\bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{M_n\pi}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda R_n}\right) \leqslant \frac{M_n\pi}{\lambda} \to 0$$

Вторая четверть так же. ◀

Лемма 7.9.3 (О полувычете)**.** a — полюс 1 порядка f, $c_\varepsilon = \{z \in C \mid |z-a| = \varepsilon \wedge \alpha \leqslant \arg(z-a) \leqslant \beta\}$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{c_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = (\beta-\alpha)i \operatorname*{res}_{z=a} f$$

▶

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z) \quad g \text{ голоморфна}$$

$$\int\limits_{c_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{c_\varepsilon} \frac{c_{-1}}{z-a} + \int\limits_{c_\varepsilon} g(z)\mathrm{d}z$$

$$\left|\int\limits_{c_\varepsilon} \mathrm{d}z\right| \leqslant M\varepsilon(\beta-\alpha)$$

$$\int\limits_{c_\varepsilon} \frac{c_{-1}}{z-a}\mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{c_{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\varepsilon i e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi c_{-1} i(\beta-\alpha)$$

◀

Замечание 7.9.4. Главное значение интеграла: вспомним, как мы определяли сходимость интеграла на отрезке без точки. Мы брали два интеграла — слева и справа, — отступив от точки на ε_1 и ε_2, и складывали. Так мы говорили, что интеграл сходится, если сумма этих интегралов сходится при независимо стремящихся к нулю отступах.

Введём понятие главного значения интеграла, как предела на *симметричных* окрестностях.

$$v.p. \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right)$$

Например,

$$v.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$$

Свойства:

1. Если интеграл сходится, то главное значение сущесвтует и равно интегралу.

2. Линеен.

3. Аддитивен, если разбиваем на две части не особой точкой.

Пример 7.9.3.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} e^{ix}}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Im} v.p. \int\limits_{-\infty} \frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}x \quad \textbf{TODO} \qquad \textit{why????}$$

Параметризуем **TODO** AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

7.9.1. Отступление про логарифм

Теорема 7.9.5. Ω — односвязная область, $f \in H(\Omega)$, $\forall z \in \Omega, f(z) \neq 0$. Тогда

$$\exists g \in H(\Omega)\colon e^g = f$$

▶

$$f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega) \Rightarrow \frac{f'}{f} \in H(\Omega) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z \text{ — замкнута} \Rightarrow$$
$$\xRightarrow{\Omega \text{ односвязная}} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z \text{ — точная} \Rightarrow \exists F \in H(\Omega)\colon F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Возьмём $g = F + c$. Хотим $e^g = f$.

$$e^g = f \Leftarrow e^{-g} f = 1$$
$$e^{-g} f = e^{-F} e^{-c} f$$

Достаточно показать, что $e^{-F} f = const \neq 0$.

$$\left(e^{-F} f\right)' = -F' e^{-F} f + e^{-F} f' = e^{-F} \underbrace{(f' - F f)}_{=0} = 0 g(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z) \in H(\Omega)$$

Подберём c так, чтобы получить единицу. ◀

Замечание 7.9.5. Хотим понять, как же выглядит эта обратная функция.

$$z = e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$$
$$|z| = e^u \Rightarrow u = \ln|z|$$
$$v = \arg z \quad (\text{с точностью до } 2\pi)$$
$$g(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z) \in H(\Omega)$$

Таким образом, $\arg f(z) \in H(\Omega)$, и в теореме можно выбрать такие углы, чтобы аргумент был непрерывен.

Следствие 7.9.5.1. Рассмотрим плоскость $\mathbb{C}$ без кривой из нуля, идущей на бесконечность. На этой области существует логарифм $\log z$: хотим применить теорему выше, $f = z$ голоморфна и непрерывна.

Замечание 7.9.6. Есть формула $\log z = \ln|z| + i \arg z$, требующая непрерывность аргумента. У нас она есть, так как выбор значения в одной точке однозначно продолжается по непрерывности на всю плоскость, а бегать по кругу нам не даст кривая.

Замечание 7.9.7. По этой же причине все варианты непрерывной функции аргумента отличаются на $2\pi k$.

Обозначения:

- $\ln x$ — логарифм положительных вещественных чисел.
- $\log z$ — хоть какое-то значение логарифма комплексного числа.
- $\arg z$ — хоть какой-то аргумент комплексного числа.
- $\operatorname{Ln} z$ — голоморфный логарифм, определённый на односвязной области, не содержащей ноль.
- $\operatorname{Arg} z$ — непрерывный аргумент, определённый на односвязной области, не содержащей ноль. Определяется областью и значением в одной точке.

Следствие 7.9.5.2. Γ — несамопересекающаяся кривая из 0 в бекснонечность. В $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ существует функция $z^p \in H(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$:

$$z^p = e^{p \operatorname{Ln} z}$$

1. $p \in \mathbb{R}$: $|z^p| = |z|^p$

   ▶

   $$|z^p| = |e^{p \operatorname{Ln} z}| = e^{\operatorname{Re} p \operatorname{Ln} z} = e^{p \ln z} = |z|^p$$

   ◀

2. $p \in \mathbb{Z}$: всё как раньше.

   ▶

   $$z^n = e^{n \operatorname{Ln} z} = e^{n(\ln|z| + i \arg z)} = e^{n \log z} \underbrace{e^{2i\pi k}}_{=1} = (e^{\log z})^n$$

   ◀

Замечание 7.9.8. Не всегда $\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} w = \operatorname{Ln} zw$, $z^p w^p = (zw)^p$. Если при этих соотношениях нигде нет прыжка через границу односвязной области, то нормально.

Пример 7.9.4.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p+1}}{1+t} \mathrm{d}t = \cdots \quad 0 < p < 1 \quad t = x^2$$

$$\cdots = 2 \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2p-1}}{1+x^2} \mathrm{d}x}_{\eqqcolon I}$$

$$f(z) = \frac{e^{(2p-1) \operatorname{Ln} z}}{1+z^2} \quad \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0 \land z \neq 0\} \quad \operatorname{Ln} 1 = 0$$

Функция на изначальной области совпадает с нужной.

Начнём считать интеграл по области: полуокружность большого радиуса c_R против часовой, от неё к нулю, обходя его по окружности радиуса c_ε. Единственная особая точка — i.

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{e^{(2p-1)\operatorname{Ln} z}}{(1+z^2)'}\right|_{z=i} = \frac{e^{(2p-1)\operatorname{Ln} i}}{2i}$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i\operatorname{Arg} i = \frac{i\pi}{2}$$

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\mathrm{d}z = \pi e^{(2p-1)^{i\pi/2}}$$

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} = \int\limits_{c_R} + \int\limits_{c_\varepsilon} + \underbrace{\int\limits_{\varepsilon}^{R}}_{\to I} + \int\limits_{-R}^{-\varepsilon}$$

$$|1-z^2| \geqslant |z^2| - 1 \geqslant 1 - |z^2| \left|\int\limits_{c_R}\right| \leqslant \pi R \max_{|z|=R\wedge \operatorname{Im} z\geqslant 0} |f(z)| \leqslant \pi R \max \frac{|z|^{2p-1}}{|z|^2-1} = \pi R\frac{R^{2p-1}}{R^2-1} \to 0$$

$$\left|\int\limits_{c_\varepsilon}\right| \leqslant \pi\varepsilon \max_{|z|=\varepsilon\wedge \operatorname{Im} z\geqslant 0} |f(z)| \leqslant \pi\varepsilon \max \frac{|z|^{2p-1}}{1-|z|^2} = \pi\varepsilon\frac{\varepsilon^{2p-1}}{1-\varepsilon^2} \to 0$$

Остался последний фрагмент

$$\int\limits_{-R}^{-\varepsilon}$$

$$z = -x \quad \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln x + i\operatorname{Arg}(-x) = \ln x + \pi i$$

$$f(-x) = \frac{e^{(2p-1)\operatorname{Ln}(-x)}}{1+(-x)^2} = \frac{e^{(2p-1)(\ln x + \pi i)}}{1+x^2} = \frac{x^{2p-1}e^{(2p-1)\pi i}}{1+x^2} \int\limits_{-R}^{\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = e^{(2p-1)\pi i}\int\limits_{\varepsilon}^{R} \to e^{(2p-1)\pi i} I$$

$$I\left(1 + e^{(2p-1)\pi i}\right) = e^{(2p-1)^{i\pi/2}}\pi$$

$$I = \frac{\pi e^{(2p-1)^{i\pi/2}}}{e^{(2p-1)\pi i}+1} = \dots = \frac{\pi}{2\cos p\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sin(p\pi)}$$

Пример 7.9.5.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x}\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = 2I - 2\int\limits_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{I}{2} \qquad \int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{3I}{2}$$

$$f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(1-z)}{z} \quad \operatorname{Ln} 1 = 0 \quad \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0 \wedge z \neq 1\}$$

Бегаем по контуру: радиус R против часовой до -1, потом почти до 1, огибаем её на растоянии ε.

Особых точек нет.

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = 0 = \underbrace{\int\limits_{-1}^{1-\varepsilon}}_{\to\frac{3I}{2}} + \int\limits_{c_\varepsilon} + \int\limits_{c}$$

$$\left|\int\limits_{c_\varepsilon}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\varepsilon\max|f(z)| \leqslant \frac{\pi\varepsilon}{2}\frac{|\ln\varepsilon| + const}{1/2} \to 0$$

$$z = e^{i\varphi}\int\limits_{c} = \int\limits_{\approx\varepsilon}^{\pi}\frac{\ln|1-e^{i\varphi}|i\operatorname{Arg}(1-e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}}ie^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\approx\varepsilon}^{\pi}(-\operatorname{Arg}(1-e^{i\varphi}) + i\ln|1-e^{i\varphi}|)$$

Перейдём везде к вещественной части. **TODO** очень нужна картинка про углы.

$$\frac{3I}{2} + o(1) - \int\limits_{\approx\varepsilon}^{\pi}\operatorname{Arg}(1-e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi = 0$$

$$\frac{3I}{2} = \int\limits_{0}^{\pi}\operatorname{Arg}(1-e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{0}^{\pi} -\frac{\pi-\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi^2}{4}$$

ПРОПУСК — черновик

Теорема 7.9.6.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

▶

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} \quad 0 \leqslant x < 1$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x} \quad \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$$

$$\varphi(1) = \underbrace{\varphi(0)}_{=0} + \int\limits_{0}^{1}\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$$

Последний интеграл вроде уже считали в прошлый раз. ◀

Теорема 7.9.7. Пусть:

- f — мераморная
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — все её полюсы,
- ∞ — либо устранимая особенность, либо полюс,
- $G_k(z)$ — главная часть ряда Лорана в a_k

- $G(z)$ — главная часть в ∞ (то есть $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$).

Тогда

$$f(z) = c + G(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k(z)$$

▶ Рассмотрим функцию:

$$h(z) = f(z) - G(z) - \sum_{k-1}^{n} G_k(z)$$

У неё нет вообще полюсов (про бесконечность пока не говорим), она голоморфна в $\mathbb{C}$.

Распишем сумму:

$$G_k(z) = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{c_{k,j}}{(z-a_k)^j}$$

У $h(z)$ полюсы могли быть только в a_k, но посмотрим на конкретную точку a_k. В $h(a_k)$ нет главной части, тогда либо нет проблем, либо устранимая особая точка, тогда нужным образом чтобы устранить особенность **TODO** Wat?

Теперь разберёмся с бесконечностью. На бесконечности ряд Лорана $f(z) - G(z)$ имеет неположительные степени, поэтому есть конечный предел, тогда $h(z)$ имеет конечный предел на бесконечности. Так как непрерывна и есть предел на бесконечности, то по теореме Лиувилля $h = const$. ◀

Теорема 7.9.8. f — голоморфна, за исключением бесконечного числа точек a_1, a_2,..., являющихся полюсами, причём это изолированные точки. Пусть $\exists R_n \to +\infty$ такая, что $M_{R_n} = \max_{|z|=R_n} |f(z)| \to 0$. Тогда

$$f(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} G_k(z)$$

G_k как в предыдущей теореме.

▶

$$I_n(z) = \int\limits_{|\zeta|=R_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \quad |z| < R_n$$

Оценим на бесконечности:

$$I_n(z) \to 0 \quad |I_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi R - n \frac{M_{R_n}}{R_n - |z|} \to 0$$

Смотрим, что даёт теорема о вычетах:

$$I_n(z) = \underbrace{\operatorname*{res}_{\zeta=z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{=f(z)} + \sum_{|a_k|<R_n} \operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Посчитаем вычет:

$$\operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \operatorname*{res}_{\zeta=a_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}$$

объяснение: $h(\zeta) = f(\zeta) - G_k(\zeta)$ — голоморфна в окрестности a_k, $\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}$ — голоморфная в окрестности a_k, значит $\operatorname{res}_{\zeta=a_k} \frac{h(\zeta)}{\zeta-z} = 0$.

Возвращаемся к интегралу (R выбираем так, что $|z| < R$ и $|a_k| < R$):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \operatorname*{res}_{\zeta=z} + \operatorname*{res}_{\zeta=a_K}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{G_k}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}2\pi R\frac{\max_{|\zeta|=R}|G_k(\zeta)}{R-|z|} \to 0 \quad \text{при } R\to\infty$$

Числитель стремится к нулю при $R \to +\infty$, остальная штука ограничена. Тогда, первое равенство ниже т.к. сумма $= 0$:

$$\operatorname*{res}_{\zeta=a_k}\frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} = -\operatorname*{res}_{\zeta=z}\frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} = -G_k(z)$$

$$I_n(z) = f(z) - \sum_{a_k<R_n} G_k(z) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

◀

Теперь подставим что-нибудь интересное в теорему и посмотрим, что получится:

Пример 7.9.6.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}$$

Полюсы $\pm\pi k$.

$R_n = \pi(n+\frac{1}{2})$ Докажем, что на $|z| = R_n$ $\operatorname{ctg} z$ ограничен. Так как в знаменателе $f(z)$ ещё z, то получим, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{|z|=R_n} f(z) = 0$$

TODO РИСУНОК! (кружок, нарезанный вертикальными полосами ширины π).

ctg — периодическая функция. Сдвинеим кусочки окружности в полосу $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi$. Докажем, что при сдвигах части окружности точно не попадут в какой-то фиксированый круг вокруг нуля и π.

До последней полосы части точно не пересекают маленькие круги, и если мы возьмём вокруг π окружность радиуса, меньшего $\frac{\pi}{2}$, то не заденем

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi \wedge |z| \geqslant \frac{\pi}{4} \wedge |z-\pi| \geqslant \frac{\pi}{4}\}$$

Докажем, что $\operatorname{ctg} z$ ограничен в таком множестве.

$$|\operatorname{ctg}(x+iy)| = \left|\frac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)}\right| = \left|\frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{e^{ix-y-e^{-ix+y}}}\right| \xrightarrow{y\to\pm\infty} 1$$

То есть получается, вне A вдалеке есть огранниченность, а внутри непрерывная функция на компакте, т.е. тоже ограничена.

$$M_{R_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} G_k(z)$$

Возьмём точку πk, $k \neq 0$, там полюс 1-го порядка, $G_k(z) = \frac{res}{z-\pi k}$.

$$\operatorname*{res}_{z=\pi k}\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \operatorname*{res}_{z=\pi k}\frac{\frac{\cos z}{z}}{\sin z} = \left.\frac{\frac{\cos z}{z}}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi k} = \frac{1}{\pi k}$$

$G_0(z) = \frac{1}{z^2}$

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{\cos z}{z \sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \ldots}{z(z - \frac{z^3}{6} + \ldots)} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \ldots}{z^2(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^2} 1 + \underbrace{cz^2}_{\text{т.к. чётные степени}} + \ldots$$

Тогда $c_0(z) = \frac{1}{z^2}$

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=-\infty}^{+infty} \frac{1}{\pi k(z - \pi k)}$$

при этом расширяется по $+$ и $-$ одновременно т.к. в теоерме предел по модулю, сгрупируем $-k$ и k чтобы не париться

$$G_k + G_{-k} = \frac{1}{\pi k(z - \pi k)} + \frac{1}{-\pi k(z + \pi k)} = \frac{1}{\pi k} \frac{(z + \pi k) - (z - \pi k)}{z^2 - \pi^2 k^2} = \frac{2}{z^2 - \pi^2 k^2}$$

Итого:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$$

Пример 7.9.7.

$$\operatorname{ctg} z = (\ln \sin z)'$$

$$\frac{\sin z}{z} = \int_0^z (\operatorname{ctg} w - \frac{1}{w}) \mathrm{d}w$$

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2w}{(w^2 - \pi^2 k^2)} \mathrm{d}w = \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w - \pi k} + \frac{1}{(w + \pi k)} \right) =$$

$$= \,^{\infty}_{k=1} \int_0^z (\frac{1}{w - \pi k} + \frac{1}{w + \pi k}) \mathrm{d}w = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(w - \pi k) + \ln(w + \pi k)) \Big|_{w=0}^{w=2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(z - \pi k) + \ln(z + \pi k) - \ln(\pi k) - \ln(-\pi k))$$

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} - \frac{z^2 - \pi^2 k^2}{\pi^2 k^2}$$

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2 k^2 - z^2}{\pi^2 k^2}$$

Обоснования: если $|w| \leqslant r$, то

$$\left| \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} \right| \leqslant \frac{2r}{\pi^2 k^2 - r^2} = O(\frac{1}{k^2})$$

значит есть равномерная сходимость, поэтому можно было переставить сумму и интегрирование.

$$\ln \frac{\pi^2 k^2 - z^z}{\pi^2 k^2} \qquad \textbf{TODO}$$

$$\operatorname{ctg} z = (\ln \sin z)'$$

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \int_p^z (\operatorname{ctg} w - \frac{1}{w}) \mathrm{d}w$$

$$\frac{\sin z}{z} = e^{\int_0^z (\operatorname{ctg} w - \frac{1}{w})} \mathrm{d}w$$

конец черновика

Теорема 7.9.9. Пусть f – голоморфна в Ω за исключением конечного числа полюсов, C – замкнутый, стягиваемый контур, не проходящий через нули и полюса. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P$$

где N — количество нулей внутри C (с учётом кратности), P – количество полюсов внутри C (с учётом кратности).

▶

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \quad g(a) \neq 0$$
$$f'(z) = m(z-a)^{n-1}g(z) + (z-a)^m g'(z)$$
$$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'}{g}$$

Что такое интеграл который мы считаем? Это сумма вычетов:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'}{f} = \sum_{a_i \text{в контуре}} res_{z=a_i}\frac{f'}{f]}$$

Какие точки будут особыми для $\frac{f'}{f}$? Точки котрые нас интересуют — нули f и полюса. Распишем вычет:

$$res_{z=a}\frac{f'}{f} = res_{z=a}\frac{m}{z-a} + res_{z=a}\frac{g'}{g} = m$$

◀

Следствие 7.9.9.1. $f \in H(\Omega)$, $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N$, C – замкнутый, стягиваемый контур, не проходящий через нули f. N – количество нулей (с учётом кратности), попавших внутрь контура.

Следствие 7.9.9.2 (Принцип аргумента). $f \in H(\Omega)$, C — замкнутый, стягиваемый контур не, проходящий через нули f. Вот есть замкнутый контур, выбираем на нём какую-то точку, потом делаем оборот. Смотрим на изменение аргумента. Тогда

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_c \arg f(z)$$

▶ f'/f имеет первообразную $\operatorname{Ln} f$.

$$\operatorname{Ln} f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z)$$

За оборот первое слагаемое не изменится, а второе — ровно на нужную величину.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} i\Delta_c \arg f(z)$$

◀

Теорема 7.9.10 (Руме). $f, g \in H(\Omega)$, C — стягиваемый контур, и $\forall z \in C, |g(z)| < |f(z)|$. Тогда количество нулей с учётом кратности у f и $f+g$ равны.

▶

$$N_f = \frac{1}{2\pi}\mathit{\Delta}_C \arg f \quad N_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\mathit{\Delta}_C \arg(f+g)$$
$$\mathit{\Delta}_C \arg(f+g) = \mathit{\Delta}_C \arg\left(f\cdot(1+{}^g/_f)\right) = \mathit{\Delta}_C \arg f + \mathit{\Delta}_C \arg\left(1+\frac{g}{f}\right)$$

Осталось понять, что второе слагаемое ноль.

$$\left|\frac{g}{f}\right| < 1 \Rightarrow 1+\frac{g}{f} \in \{|z-1|<1\}$$

Ой, раз кривая в таком круге, то она вокруг нуля вообще не проходит. ◀

Пример 7.9.8.

$$z - e^{-z} = \lambda > 1$$

Хотим понять, что в правой полуплоскости ровно один корень. Будем смотреть на контур — границу правого полукруга радиуса R с центром в нуле.

$$f(z) = z-\lambda \quad g(z) = e^{-z}$$

$z = iy$:

$$|f(iy)| = |iy-\lambda| = \sqrt{\lambda^2+y^2} \geqslant \lambda > 1$$
$$|g(iy)| = 1$$

$z = Re^{i\varphi}$:

$$|f(Re^{i\varphi})|^2 = |Re^{i\varphi}| = (R\cos\varphi-\lambda)^2 + (R\sin\varphi)^2 = R^2 - 2R\lambda\cos\varphi + \lambda^2 \xrightarrow{R\to+\infty} +\infty$$
$$|g(Re^{i\varphi})| = |e^{-Re^{i\varphi}}| = e^{-2R\cos\varphi} \leqslant 1$$

Можно применить теорему, а ведь у f всего один корень.

Следствие 7.9.10.1 (Основная теорема алгебры). Если $P(z)$ — многочлен степени n, то он имеет ровно n корней с учётом кратности.

▶

$$P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0$$
$$f(z) = z^n \quad g(z) = c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0$$

У $f(z)$ ровно n корней, осталось найти контур, на котором выполнено неравенство. Возьмём окружность радиуса $R \geqslant 1$.

$$|f(z)| = R^n \quad |g(z)| \leqslant |c_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |c_0| \leqslant R^{n-1}\underbrace{(|c_{n-1}| + \dots + |c_0|)}_{\eqqcolon R_0}$$

Возьмём $R > R_0$, получим, что внутри него f и $P = f+g$ имеют равное число корней, то есть n. ◀

Пример 7.9.9 (Диагональная последовательность).

$$C_n^k \quad C_{2n}^n$$

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k w^{n-k}$$

$$\frac{1}{1-w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty}(z+w)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{w=0}^{+\infty} C_n^k z^k w^{n-k}$$

$$f(z) = \sum_{n,k=0}^{+\infty} a_{nk} z^n w^k$$

$$\sum a_n n z^n \frac{1}{\zeta}$$

$$\frac{1}{\zeta} f(\zeta, \frac{z}{\zeta})$$

$$= \sum a_{nk}\zeta^n \frac{z^k}{\zeta^k}\frac{1}{\zeta}$$

$$\int\limits_{|\zeta=r|} \frac{f(\zeta, {}^z/_\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta = \int\limits_{|\zeta=r|} \sum_{n,k=0}^{+\infty} a_n k \frac{z^k}{\zeta^{1+k-n}}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{n,k=0}^{+\infty} a_{nk} z^k \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{1+k-n}} = \sum_{n,k=0}^{+\infty} a_n k z^k \begin{cases} 2\pi i & n=k \\ 0 & n\neq k\end{cases} = 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n z^n$$

$$\frac{1}{1-w-z} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} C_{m+j}^j z^m w^j$$

$$\int\limits_{|\zeta|=r} \frac{\frac{1}{1-\zeta-{}^z/_\zeta}}{\zeta} = 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n z^n =$$

$$= \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-\zeta^2-z} = \int \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^2-\zeta+z} = -2\pi i \operatorname*{res}_{\zeta=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}} \dots = -2\pi i \frac{1}{2\zeta-1}\Big|_{\zeta=\dots} = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{1-4z}}$$

Корень откинули, потому что чтобы всё сходилось ζ и ${}^z/_\zeta$ должны быть маленькими. **TODO** хреееееень.

Ещё произведение Адамара.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$C(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n$$

$$f(z,w) = A(z)B(w) = \sum_{n,k=0}^{+\infty} a_n b_k z^n w^k$$

Сново нужна диагональ.

Ещё будет метод Дарбу. Вот есть $f(z) = \sum a_n z^n$, мы явно знаем f. Оказывается, можно относительно легко понять, как растут коэффекиенты a_n.

Пример 7.9.10 (Метод Дарбу). Хотим понять скорость роста коэффицентов. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z| < R$, тогда он сходится абсолютно в круге $|z| \leqslant r < R$ (отступили от границы), значит $a_n r^n \to 0 \Rightarrow a_n = o(r^{-n})$.

Пусть есть полюс: **TODO** картинка.

$$g(z_0) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

$f(z) - g(z)$ будет сходиться в большом круге. Явная формула для случая полюса?

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m-1}^{m-1} \left(\frac{z}{a}\right)^n \Rightarrow C_{n+m-1}^{n} \sim \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}$$

Но проблемы могут быть не только из-за особой точки или полюса:

$$f(z) = \frac{\sqrt{1-\alpha z}}{(1-z)^2} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$g(z) = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{(1-z)^2} h(z) = f(z) - g(z) = \frac{1}{(1-z)^2}(\sqrt{1-\alpha z} - \sqrt{1-\alpha}) = \frac{1}{(1-z)^2}\frac{(1-\alpha z)-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha z}+\sqrt{1-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-z}\frac{}{\sqrt{1}}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \quad b_n = n\sqrt{1-\alpha}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha z}+\sqrt{1-\alpha}} \text{ голоморфна в круге радиуса } {}^{1}\!/\!{}_{\alpha}$$

значит там её коэф-ы $o(r^{-n})$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

Значит коэф-ы произведения $O(1)$, то есть $a_n = \sqrt{1-\alpha} n + O(1)$. Ваще это из книжки «Грин, Кнут. Математические методы анализа алгоритмов.»

Пример 7.9.11 (Суммирование рядов).

$$\sum_{n=3}^{+\infty} f(z)$$

А мы хотим это посчитать по теореме о вычетах. Для этого нужна функция, имеющая по особенности во всех натуральных точках.

$$\operatorname*{res}_{z=n} \frac{f(z)}{\sin \pi z} = \left.\frac{f(z)}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=n} = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi}$$

Ну почти получилось.

$$\operatorname*{res}_{z=n} f(z) \operatorname{ctg} \pi z = \left.\frac{f(z) \cos \pi z}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=n} = \frac{f(n)}{\pi}$$

Клёво! Осталось посчитать интеграл.

$$f(z) = \frac{1}{n^2} \quad g(z) = \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} \quad \operatorname*{res}_{z=n} g(z) = \frac{1}{\pi n^2}$$

Есть ещё особенность в нуле.

$$\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2} = \frac{\cos\pi z}{z^2\sin\pi z} = \frac{1-\frac{\pi^2z^2}{2}+\frac{\pi^4z^4}{24}-\dots}{z^2\pi z\left(1-\frac{\pi^2z^2}{6}+\frac{\pi^4z^4}{5!}-\dots\right)} =$$

$$= \frac{1}{\pi z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{2}+\frac{\pi^4z^4}{24}-\dots\right)\left(1-\frac{\pi^2z^2}{6}+\dots\right)^{-1} = \frac{1}{\pi z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{3}+\dots\right)$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} g(z) = -\frac{\pi}{3}$$

Теперь считаем. Мы знаем, что котангенс ограничен на окружности полуцелого радиуса.

$$\int\limits_{|z|=n+0,5}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(-\frac{\pi}{3}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi k^2}\right)$$

$$\left|\int\limits_{|z|=n+0.5}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant M\frac{2\pi(n+0,5)}{(n+0,5)^2}\to 0$$

$$2\pi i\left(-\frac{\pi}{3}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi k^2}\right)\to 0$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

7.10. Конформные отображения

𝔇𝔢𝔣 7.10.1. Линейное отображение называется конформным, если оно сохраняет угол между векторами и ориентацию.

Теорема 7.10.1. $L\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — линейное над $\mathbb{R}$. Тогда L конформно тогда и только тогда, когда $L(z)=\lambda z$ для какого-то $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

▶ **$\Leftarrow$:** Просто посмотрим $|\lambda|$ и $\arg\lambda$ — всё растянется и повернётся, конофрмно.

$\Rightarrow$: Возьмём базис. Значит его образ тоже базис. Осталось показать, что их длина не поменяется. Для этого посмотрим на e_1+e_2. Сначала мы были под углом $\frac{\pi}{4}$, должны были остаться, значит длины образов равны.

◀

𝔇𝔢𝔣 7.10.2. f конформно в точке z, если d_zf линейно конформно и не равно нулю.

𝔇𝔢𝔣 7.10.3. Отображение $f\colon \Omega_1\to\Omega_2$ конформно, если оно биективно и конформно в каждой точке.

Замечание 7.10.1. Если $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{C}$, то определение равносильно биективной голоморфности. Для $\overline{\mathbb{C}}$ надо ещё описать, что такое комфорность на бесконечности. f конформна на бесконечности, если $f(1/z)$ комформна в нуле. f конформна в точке, образ который бесконечен, если $1/f$ комформна в той же точке.

𝔇𝔢𝔣 7.10.4. $f\in H(\Omega)$ — определена на области, $f\neq const$. Тогда $f(\Omega)$ — область.

Замечание 7.10.2. Непрерывности или вещественной дифференцируемости не хватит: $|z|^2\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}$.

▶ Покажем, что $f(\Omega)$ — открыто. Для этого хотим показать, что $\exists\varepsilon > 0\colon \forall|z-a| < \varepsilon, |f(z)-b| \neq 0$. От противного: пусть не так, и для каждого ε есть точка z_ε, что $f(z_\varepsilon) = b$. Получили, что $z_n \to a \wedge f(z_n) = b$, по теореме о единственности $f(z) \equiv b$.

Далее, на компакте достигается минимум

$$r = \min_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - b| > 0$$

Докажем, что $B_{r/2}(b) \subset f(\Omega)$. Возьмём $w \in B_{r/2}(b)$.

$$f(z) - w = f(z) - b + b - w$$
$$|f(z) - b| \geqslant r > |b - w|$$

По теореме Руше $N_{f-w} = N_{f-b} \geqslant 1$, то есть существует z, что $|f(z) - w| = 0$.

Теперь связность. Была ломаная, связывающая две точки. После преобразования оно перейдёт в гладкую ломаную. Можем подогнать ломаной — производные ограничены, значит какими-то маленькими шажками можно пройти. ◀

𝔇𝔢𝔣 7.10.5. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ однолистна, если она инъективна ($f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$).

Теорема 7.10.2. Если $f \in H(\Omega)$ и однолистна, то про $f' \neq 0$ нигде.

▶ $a \in \Omega$. Пусть $f'(a) = 0$ и $b := f(a)$. Сделаем всё, как в прошлом доказательстве. Найдём радиус, возьмём круг $B_\varepsilon(a)$, теорему Руше применим.

$$N_{f-w} = N_{f-b} \geqslant 2$$

так как a — ноль кратности 2. Значит, $f(z) = w$ имеет два решения, но вдруг это решение двойной кратности?

Не могло так быть. Вспомним рассуждения вокруг теоремы о единственности. Давайте предположим, что везде, где бы мы не взяли, корни кратные. Получили последовательность z_n, сходящуюся к a, что $f'(z_n) = 0$. Значит вся производная ноль, вся функция константа, а она не однолистна. ◀

Следствие 7.10.2.1. $f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots$, f — голоморфна в окрестности ∞ и однолистна $\Rightarrow c_{-1} \neq 0$

▶ $g(z) = f(1/z)$ голоморфна в окрестности 0 и однолистна, следовательно $g'(0) \neq 0$, $g(z) = c_0 + c_{-1}z + c_{-2}z^2 + \ldots$ и $g'(0) = c_{-1}$. ◀

Следствие 7.10.2.2. f имеет полюс в a и однолстна в окрестности a. Тогда это полюс первого порядка.

▶ $g(z) = \frac{1}{g(z)}$ у $g(z)$ в a устранимая особая точка. Тогда она голоморфная и однолистная, и $g'(a) \neq 0$.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \ldots$$

Тогда у $g(z)$ ноль порядка m, но так как $g'(a) \neq 0$, то только первого. ◀

Замечание 7.10.3. $f \in H(\Omega)$, $f'(a) \neq 0$, $a \in \Omega$. Тогда существует окрестность точки a в которой f однолистна.

▶

$$f'(a) \neq 0 \Rightarrow \forall z \in B_\delta(a), |f'(z)| > \varepsilon$$
$$f(z) = f(w) + f'(w)(z-a) + O((z-w)^2)$$

Стоит не просто ошка, а оценка $C(z-w)^2$ с универсальной для всех точек константой. Если найдём такое, то в радиусе $C|z-w| < \varepsilon$ всё будет хорошо. Такое есть из соображений: посмотрим на Тейлора, там будет несколько слагаемых для производных второго порядка, из них выводится. ◀

Замечание 7.10.4. Если $f \in H(\Omega)$ и $\forall z \in \Omega, f'(z) \neq 0$, то f может не быть однолистной.

▶ $f(z) = e^z$ ◀

Def 7.10.6. Ω_1, Ω_2 — области. Их называют комформно эквивалентными, если существует комформная биекция $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$.

Теорема 7.10.3. $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ комформно не эквивалентны.

▶ Пусть есть такое отображение $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, значит оно голоморфно на всей плоскости и ограничено, значит по теореме Лиувилля константна. ◀

Теорема 7.10.4 (Римана о конформных отображениях)**.** Ω, $\tilde{\Omega}$, **TODO**

▶ Существование доказывать не будем ◀

TODO

Следствие 7.10.4.1. Пусть f голоморфна на всей плоскости, а образ не содержит какую-то кривую. Тогда она константа.

▶ γ — та самая кривая. По теореме Римана $\exists g\colon \bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma \to \mathbb{T}$ конформная. Рассмотрим $h(z) = g(f(z))$, $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$. Отсюда $h = const$ и $f = const$. ◀

Замечание 7.10.5. По конформной эквивалентности односвязные области делятся на три класса:

1. $\bar{\mathbb{C}}$
2. $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$: $f\colon \bar{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$.
3. Всё остальное: теорема Римана.

2 и 3 не эквивалентны, так как $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D}$. 1 и 3 не эквивалентны, так как если $f\colon \bar{C} \to \mathbb{D}$ конформна, то $f = const$. 1 и 2 не эквивалентны, так как $f \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow f = const$.

Def 7.10.7. Дробно-линейное отображение или преобразование (ДЛП):

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ad - bc \neq 0$$

Упражнение: однолистно.

Теорема 7.10.5. Если $f \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\})$ и однолистно, то f дробно-линейно.

▶ Посмотрим на эту особую точку z_0. Она не может быть устранимой особой точкой, иначе можно продолжить, и по Луивиллю константа. Она не может быть существенной особой точкой. От противного: ну пусть. Рассмотрим окрестность вокруг z_0 W и кольцо W_1 вокруг окрестности. По теореме Соковского $\operatorname{cl} f(W) = \mathbb{C}$, но вне этого замыкания образа должен быть открытый образ $f(W_1)$, противоречие.

Значит полюс, но не может быть полюсом 2 порядка или выше. Иначе ${}^1/_{f(z)}$ однолистна в окрестности z_0, но $({}^1/_{f(z)})'\,|_{z=z_0} = 0$. Ура.

$$g(z) = f(z) - \frac{A}{z - z_0}$$

Она имеет устраниую особую точку в z_0, значит опять по Луивиллю константа. Значит $f(z) = B + \frac{A}{z-z_0}$ ◀

Теорема 7.10.6. Любое конформное отображение из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$ имеет вид

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-z\bar{a}}$$

где $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$.

▶ Покажем, что они подходят. Возьмём точку на единичной окружности и посмотрим, куда она переходит.

$$|f(e^{i\varphi})| = \left|e^{i\theta}\frac{e^{i\varphi}-a}{1-e^{i\varphi}\bar{a}}\right| = \left|e^{i(\theta-\varphi)}\frac{e^{i\varphi}-a}{e^{-i\varphi}-\bar{a}}\right| = 1$$

Значит граница в границу. Значит всё внутри должно перейти внутрь, а точка a перешла в точку 0. Значит действительно подходит.

Почему других не бывает. Зафиксируем, что $a \to 0$ и $\arg f'(a) = \theta$. Если $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — конформна, то по единственности в теореме Римана $f = g$. ◀

Упражнения.

1. Композиция ДЛП — ДЛП, причём тут замешано произведение матриц: коэффициенты у $f_2(f_1(z))$ считаются так:
$$\begin{pmatrix}\tilde{a} & \tilde{b}\\ \tilde{c} & \tilde{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$$

2. Любое конформное отображение верхней полуплоскости в $\mathbb{D}$ имеет вид
$$e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$$
где $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} a > 0$.

3. Любое конформное отображение верхней полуплоскости в $\mathbb{D}$ имеет вид
$$e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$$
где $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} a > 0$.

Почти всё из книжек «Картан. [Очень много слов про комплексные функции от одной и многих переменных]», «Лаврентоьев, Шабат. Методы теории функций комлексной переменной» и «Евграфов. Аналитические функции».

ПРОПУСК

Утверждение 7.10.1. $f\colon \varOmega \to \varOmega$ — комплексный потенциал в $\varOmega$, $g\colon \tilde{\varOmega} \to \varOmega$ — конформная. Тогда $f \circ g$ — комплексный потенциал в $\tilde{\varOmega}$.

$$f \in H(\Omega), g \in H(\Omega) \Rightarrow f \circ g \in H(\Omega)$$

Если мы взяли линию тока, то она в её маленькой окрестности только растянулась.

$$\operatorname{Im} f = const \Rightarrow \operatorname{Im} f \circ g = const$$

Попробуем решить такую задачу. Есть заданная скорость на бесконечности, есть кривая через всю плоскоть, на бесконечности её касательная горизонтальная. Хотим найти поле скоростей. Надо найти похожую задачу, где всё понятно, и применить конформное отображение. Всё понятно нам про настоящую полуплоскость с скоростью v. Там потенциал vz.

Расмотрим отображение в настоящую полуплоскость g $(g(\infty) = \infty,\ g'(\infty) > 0$ **TODO** это из теоремы Римана — выбрали нулевой аргумент). Если f — комплексный потенциал, то $\bar{f}' = f'$ — поле скоростей. Тогда $vg'(\infty)$ — скорость бесконечности. Осталось подобрать коэфициент $v = \frac{v_\infty}{g'(\infty)}$.

Поле точечного источника в начале координат — поле скоростей имеет вектора на лучах из точки (из соображений симметрии).

$$V = \vec{r}\varphi(r) = \frac{z}{|z|}\varphi(|z|)$$

Пишем формулу для потока через окружность

$$N = \int\limits_{|z|=r} \left\langle \vec{V}, \vec{n} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{|z|=r} \varphi(|z|)\mathrm{d}\sigma = 2\pi r\varphi(|z|)$$

Но заметим, что поток постоянен для любого контура вокруг начала координат, откуда

$$\varphi(r) = \frac{N}{2\pi}\frac{1}{r}$$
$$V = \frac{Nz}{z\bar{z}\cdot 2\pi} = \frac{N}{2\pi\bar{z}}$$
$$\bar{f}' = V \Rightarrow f = \frac{N}{2\pi}\operatorname{Ln} z$$

Поле скоростей и комлпексный потенциал для точечного вихря. Если повернём, то всё перейдёт в себя.

$$V = \frac{iz}{|z|}\psi(|z|)$$
$$\Gamma = \int\limits_{|z|=r} \left\langle \vec{V}, \vec{\sigma} \right\rangle \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{|z|=r} \psi(r)\mathrm{d}\sigma = 2\pi r\psi(r)$$
$$\psi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}$$
$$V = \frac{i\Gamma}{2\pi\bar{z}}$$
$$f = \frac{i\Gamma}{2n}\operatorname{Ln} z$$

А если исток с вихрем, то

$$f = \frac{N + i\Gamma}{2n}\operatorname{Ln} z$$

Теперь решаем задачу обтекания какой-то фигни, зная v_∞. Аналогично, стягиваем голоморфно в отрезок, чтобы $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) > 0$. У отрезка весь потенциал $v_\infty z$.

Если обтекаем окружность, то нужная функция — Жуковского, домноженная на нужную константу.

$$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Но мы ещё забыли, что кроме обтекания есть ещё вихрь вокруг круга.

$$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{i\mathit{\Gamma}}{2\pi} \operatorname{Ln} z$$

Это общее решение, правда $\mathit{\Gamma}$ нужно из физических соображений.

А для всяких клякс

$$f(z) = \frac{v_\infty}{g'(\infty)} \left(g(z) + \frac{1}{g(z)}\right) + \frac{i\mathit{\Gamma}}{2\pi} \operatorname{Ln} g(z)$$

Так раньше всё расчитывали — всё сводится к поиску комфорных отображений. Так обсчитывались первые самолёты, винты кораблей. Сейчас так делаются только грубые прикидки, а дальше используются более сложные модели.

𝔇𝔢𝔣 7.10.8. Точка с нулевой скоростью называется критической.

В случае обтекания круга

$$f'(z) = 0$$
$$f'(z) = v_\infty - \frac{v_\infty}{z^2} + \frac{i\mathit{\Gamma}}{2\pi}\frac{1}{z}$$
$$z = \frac{1}{4\pi v_\infty}\left(\mathit{\Gamma} i \pm \sqrt{16\pi^2 v_\infty^2 - \mathit{\Gamma}^2}\right)$$

$|\mathit{\Gamma}| \leqslant 4\pi v_\infty$: $|z| = 1$. Это значит, что на окружности есть две точки: где поток расщипляется вокруг окружности и схлопывается за ней.

иначе: Точка всего одна, и тогда это выглядит так: какая-то линия потока проходит сбоку от откружности, огибает её и пересекая саму себя уходит дальше.

И тут на прощание была куча весёлых картинок красивых отображений.