1 Сложение производящих функций (обычных/эксп.) — было два непересекающихся мн-ва X и Y, на каждом были метки, получили $X \cup Y$.

Произведение экспоненциальных — разбили n различимых элементов на два подмножества, на одном a_n способов, на другом — b_n способов (обобщается до произведения k функций). Примеры: разбить студентов на две группы и выбрать в одной группе старосту, число беспорядков (перестановка = неподвижные точки + беспорядок), раскладка n различимых предметов по k различимым ящикам с ограничениями вроде «в первый только чётное, во второй только нечётное» (показать формулки, в т.ч. без ограничений и для $\geqslant 1$; получим $\hat{S}(n,k) = \sum (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$).

Произведение обычных — разбили n неразличимых предметов на две группы, на одном a_n способов, на другом — b_n (обобщается до k множителей). Примеры: раскладка n неразличимых по k ящикам (в каждом ящике есть ограничение на число предметов: 0 или 1, сколько угодно, не-ноль, показать, что формулы на члены правильные).

Ещё произведение обычных, если мы бьём линейно упорядоченное мн-во на префикс и суффикс. Пример: преподаватель пилит семестр на лекции и практики, на лекциях уезжает один раз, на практиках два раза ($\binom{n+1}{4}$). Пример: числа Каталана из путей Дика. Отдельно посчитали тривиальный при $n = 1$, отдельно нетривиальные. В нетривиальном выделили парную скобку, разбили на два блока (внутри скобок и снаружи).

2 Марки — задача о рюкзаке (наклеить марок на 18 рублей такими-то), но порядок важен. Тогда рекуррента простая линейная, можно решить. Можно умнее: сначала зафиксировали число марок k, а потом выбрали номиналы у i-й — это $(f(z))^k$. Получили композицию $f(z)$ и функции $\frac{1}{1-z}$ (запрещено $a_0 \neq 0$), больше композиции обычных не умеем. Смысл: распределяем n неразличимых предметов по k различимым блокам (k заранее неизвестно), в каждом блоке a_{n_i} способов (считаем $a_0 = 0$, т.е. пустые блоки нельзя, иначе странно получится). Альтернативно: пилим линейно упорядоченное на куски.

3 Если порядок неважен, тоже ДП, но уже удаляем типы марок: $\Phi(n; 4, 6, 10) = \Phi(n-10; 4, 6, 10) + \Phi(n; 4, 6)$. Тут уже так просто не написать производящие. Можно умнее: ищем решения $4a + 6b + 10c = n$, это раскладка неразличимых предметов по трём различимым ящикам с ограничениями, выразили через произведение обычных ПФ, успех. Разбиений на слагаемые без учета порядка — $p(n)$ (полагают $p(0) = 1$, $p(-n) = 0$). Переформулировка: решить уравнение $\sum x_i = n$, $0 \leqslant x_i \leqslant x_{i+1}$. Переформулировка: $1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots = n$, опять разложили по ящикам. Можно записать решение как бесконечное произведение (хоть мы его формально и не вводили).

Ещё задача: кол-во разбиений, когда каждое число входит от 0 до 1 раза ($(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\dots$). Можно переписать как $1 + z^2 = \frac{1-z^4}{1-z^2}$, посокращать, получим разбиения на нечётные слагаемые.

4 Определить разбиение n на ровно k слагаемых (натуральных) без учёта порядка. Это $p_k(n)$, причём $\sum p_k(n) = p(n)$. А раскладка неразличимых шариков по неразличимым ящикам — это разбиение на не более чем k слагаемых, зовётся $P_k(n)$, для любого $k \geqslant n$ имеем $P_k(n) = p(n)$. Показать связь между p_k и P_k (разность соседних, сумма) и $P_k(n) = p_k(n+k)$ (откусываем от слагаемого единичку), отсюда неважно, кого изучать — P_k или p_k.

Утверждение: $p_k(n)$ есть сумма $p_i(n-k)$ по i от 1 до $\min(k, n-k)$ (при больших i либо занулится $p_o(n-k)$, либо будет много слагаемых). Док-во: i — это просто посчитано число слагаемых $\geqslant 2$. Утверждение: $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$, т.к. либо убили единицу, либо откусили единицу от всех.

Диаграмма Ферре (как Юнг, только точки вместо квадратов): каждая строка — слагаемое. Можно передоказать утверждения выше. Двойственная диаграмма — повернули на 90 градусов. Утверждение: $P_k(n)$ равно числу разбиений на сколько-то частей, каждая $\leqslant k$ (перешли к двойственной). Но тогда можно записать производящую функцию с k множителями (привет от Эйлера). Утверждение: $p_k(n)$ равно числу разбиений на сколько-то частей, каждая $\leqslant k$, а одна $= k$. Это опять производящая функция (почти такая же, домножилась на z^k).

Формула Эйлера: раскрыли скобки в бесконечном произведении в знаменателе ($Q(z)$), после очередной меняются только старшие коэффициенты. Чередуются 0, ± 1 по правилу: $Q(z) = 1 + \sum_{d=1} (-1)^d (z^{\frac{3d^2-d)}{2}} + z^{\frac{3d^2+d)}{2}})$. Числа $\omega(d) = \frac{3d^2-d}{2}$ и $\omega(-d)$ (симметричное) — пентагональные числа, суммы префиксов $1 + 4 + 7 + 10 + \dots$. Док-во: посмотри, когда получим какой знак: когда разбиений n на нечётные слагаемые больше/меньше, чем на чётные. Почти для всех совпадает, не совпадает только для пентагональных. Проводим биекцию для разбиений: взяли Ферре, разбили на трапеции (трапеция — кусок снизу, возрастает наверх ровно на единицу), d — длина нижней строчки, а l — высота самой верхней трапеции. Первый блок — все из $\geqslant 2$ трапеций, у которых $d \geqslant l$; из одной трапеции с $d > l$. Второй блок — $\geqslant 2$ трапеции, у которых $d < l$; из одной трапеции с $d < l - 1$. Третий — одная трапеция с $d = l$, $d = l - 1$. Первый блок переводится во второй и обратно: отрезали нижнюю строку, наклонили на 45 градусов, приклеили к диагонали. Чётность меняется.

Отсюда, зная явную формулу для $Q(z)$, можно быстро получить рекурренту для $p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) - \dots$.

5 Композиция экспоненциальных $e^{F(z)}$ (ввели по определению как сумму ряда) — это взяли n различных предметов, разложили по скольки-то неразличимым ящикам, над каждым ящиком a_{n_i} действий ($a_0 = 0$), это *экспоненциальная формула*. Например, $e^{e^z-1} = B(z)$ — числа Белла (разбили n элементов на неупорядоченные непустые блоки). Вывод рекурренты из композиции: продифференцировали e^{e^z-1}, получили формулы для c_n по a_n и предыдущим c_n. Иногда надо наоборот, вычислять a_n (ещё одна формула). Так можем посчитать число связных графов (замкнутая формула для ПФ для всех графов не нужна, кстати).

Композиционная формула $G(F(z))$ — сначала разложили различимые по неразличимым ящикам, действия над ящиком, а потом ещё b_k действий со всеми ящиками. А если хотим различимые ящики, то надо $G = \frac{1}{1-z}$ (ЭПФ), т.к. мы сначала ящики неупорядочили, а потом переставили $n!$ способами. Если переставляем лишь циклически, вылезет логарифм: $1 - \ln(1 - F(z))$.

6 Хотим рекурренты (адские) для вычисления коэффициентов $G(F(z))$. Играемся с примерами вроде «разбить людей на пары, в каждой паре a_2 действий, а с парами b_k действий», получаем Фаа ди Бруно: c_n есть сумма во всем разбиениям $n = 1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n$, какой-то почти мультиномиальный коэффициент на $b_{\sum k_i}$ на произведение $\left(\frac{a_i}{i!}\right)^{k_i}$.

Давайте теперь ещё и отделим k, обозначим функцию $B_{n,k}(a_1, \dots, a_n)$ — это полиномы Белла, целые коэффициенты от a_i. Теперь формула для c_n выражается через $B_{n,k}$ и простую сумму по всем k. Если есть рекурренты для Белла, то они никак не зависят от a_i, b_i, давайте выберем удобные и отсюда найдём $B_{n,k}$. Положим $b_k = t^k$ (t — метка) и любую $F(z)$, композицию можно вычислить по экспоненциальной формуле. Отсюда получили рекурренту для $B_{n,k}$ (сумма по $i = k \dots n$ каких-то $B_{i,k}$ с коэффициентами-переменными).

Если считать, что $a_i = 1$ (кроме a_0), то в каждом ящике ничего не делаем, тогда $B_{n,k}(1, \dots, 1)$ — кол-во способов разложить n различимых по k непустым неразличимым ящикам, т.е. число Стирлинга второго рода $S(n,k)$. Тогда если подставить в рекурренту, получим рекурренту для Стирлинга (там будет сумма по всем разбиениям n на k слагаемых, ничего страшного).

7 А если надо ящик циклически упорядочивать, то $a_n = (n-1)!$, внутре у ней $(F(z))$ логарифм. Если подставить в экспоненциальную, то все сократится, получим $\frac{1}{1-z}$ — это и число перестановок n элементов, и кол-во разбиений на блоки, причём каждый блок циклически упорядочен. Это потому что любая перестановка есть произведение циклов. Получаем, что числа $n!$ есть коэффициенты, аналогичные B_n (которые вылезают при $a_n = 1$). Снова подставим $b_k = t^k$, получим кол-во перестановок с k циклами, а коэффициенты $c(n,k)$ при $t^k \frac{z^n}{n!}$ — числа Стирлинга первого рода. Можно для них записать формулу (сумма по всем разбиениям n), можно записать производящую функцию $(e^{t(-\ln(1-z))} = (1-z)^{-t})$.

Потом можно взять частную производную по t, получить $(1-z)C'_z = tC(z,t)$, отсюда рекуррента $c_{n+1}(t) = nc_n(t) + tc_n(t)$. А отсюда — $c(n+1,k) = nc(n,k) + c(n,k-1)$. Можно ещё из производящей можно написать бином Ньютона, тогда коэффициент при $\frac{z^n}{n!}$ это сумма $\sum c(n,k)t^k$, оно же — разложение восходящей факториальной степени $(t)^n$ по степеням t^k, это ещё один смысл Стирлинга.

Можно ввести числа со знаком $s(n,k)$, если в факториальной степени подставить $-t$ вместо t. Тогда $s(n,k)$ получатся коэффициентами в убывающей факториальной степени. Ещё можно заметить, что $S(n,k)$ появлялись с условием $t^n = \sum S(n,k)(t)_k$, поэтому s и S взаимно обратны (если перемножить как матрицы, то получим либо ноль, либо единицу, если $n = k$). Трактуем так: есть базис из t^k, есть базис из $(t)_k$, числа Стирлинга — переходы из одного базиса в другой.

Если в перестановке нет единичных циклов (но есть остальные), надо просто написать $e^{-\ln(1-z)-z} = \frac{e^{-z}}{1-z}$, это как раз формула для числа беспорядков, что хорошо.

Давайте теперь положим $a_n = (n-1)!\,x_n$, где x_i — переменные. Обозначим коэффициент при $\frac{z^n}{n!}$ за $\tilde{Z}(x_1, \dots, x_n)$ (дополненный цикловой индекс). Алгебраически можно подставить в Фаа ди Бруно и действительно обнаружить, что это сумма по всем перестановкам с мономами, характеризующими кол-во циклов каждой длины. А цикловой индекс $Z(\dots)$ — это то же самое, но поделить на $n!$. Рекуррентная формула для дополненных индексов — посмотрели, в каком цикле лежит элемент $n+1$.

8 Построим ЭПФ для числа корневых деревьев $T(z)$, корневых лесов $F(z) = e^{T(z)}$. А вот леса на $(n-1)$ вершине похожи на деревья на n вершинах, пишем $T(z) = zF(z) \iff T(z)e^{-T(z)} = z$, обозначим $G(z) = ze^{-z}$, надо решить уравнение $G(T(z)) = z$. Вернёмся к формальным степенным рядам: композиция образует моноид, можно ввести обратный в смысле композиции (у ряда с $a_0 = 0$ есть тогда и только тогда, когда $a_1 \neq 0$, единственен). Отсюда есть рекуррента для коэф. $T(z)$ через коэф. $G(z)$.

Можно рассмотреть поле рядов Лорана, вычет — как в матане. Теорема Лагранжа: если $f(g(z)) = g(f(z)) = z$, то коэффициент b_n равен вычету ряда $1/(nf^n(z))$. Док-во: распишем $g(f(z)) = z$, дифференцируем по z, делим на $f^n(z)$, слева остался только z^{-1}, т.к. $f^k(z) \cdot f'(z) = \mathcal{O}((f^{k+1})')$ при $k \neq -1$, а у производной вычет ноль.

Для решений уравнений $g(z) = zr(g(z))$, в котором у g есть обратный к композиции, а у r свободный коэф. не ноль, можно рассчитать коэф. $g(z)$ по формуле ${}^1/_n[z^{n-1}]r^n(z)$. Док-во: перепишем уравнение в виде дроби, чтобы справа остался z, ввели $f(z)$, воспользуемся Лагранжем.

TODO

9 **TODO**

10 **TODO**

11 **TODO**

12 **TODO**