1 κ — вершинная, граф блоков — дерево (есть алгоритм), двусвязные состоят из ручек и имеют циклы через пары вершин/рёбер. Рёберно двусвязные не имеют мостов и состоят из замкнутых ручек. Есть нер-во $\kappa \leqslant \lambda \leqslant \delta$.

Для обеих связностей: несвязный/пустой граф 0-связен; если граф k-связен, то и $k-1, \dots, 0$-связен. По умолчанию будет вершинная связность.

Граф рёберно k-связен, если можно удалить строго меньше k рёбер и он останется связным. Рёберная связность $\lambda(G)$ — такое максимальное k, оно же размер минимального рёберного разреза (есть разрез, если при удалении граф распался на компоненты связности). В пустых/несвязных графах считаем $\lambda = 0$, в т.ч. в K_1.

Подмножество вершин S называется вершинным разделяющим множеством/вершинным разрезом, если $G - S$ несвязен. Вершинная связность $\kappa(G)$ — минимальный размер $|S|$ такой, что либо это разрез, либо $|V \setminus S| = 1$ (чтобы положить $\kappa(K_n) = n - 1$, $K_5 = 4$). Осторожно: связный K_1 имеет $\kappa = 0$, т.е. он не 1-связен. Альтернативное определение: граф k-связен (вершинно, по умолчанию), если $|V| \geqslant k+1$ и при удалении менее чем k вершин остаётся связен; тогда κ — максимальное k, для которого граф k-связен.

$\delta(G) = \min \deg v$, $\Delta(G) = \max \deg v$. Тогда $\lambda(G) \leqslant \delta(G)$ (удалили смежные с вершиной). И ещё $\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$; два случая: если в какой-то компоненте есть вершина, не инцидентная с разрезом, убили разрез. Если нет (пример — конвертик), то выберем любое ребро разреза $x \to y$, удалим остальные за $\lambda-1$ вершину, если ещё в какой-то компоненте вершины остались — удаляем x или y, добивая разрез, если нет — то мы удалил все вершины, кроме двух, удаляем ещё одну, $|V| = 1$, успех.

Рассмотрим графы с $\kappa = 1$, два ребра похожи, если равны или лежат на одном простом цикле, это эквивалентность (доказать транзитивность), рёбра разбились на блоки (каждый блок — либо ребро, либо несколько циклов). Теорема: G двусвязен $\iff$ любые два ребра похожи $\iff$ через любые две вершины есть простой цикл. Если двусвязен, то любые два смежных ребра похожи (можно удалить общую вершину и найти путь), пользуемся транзитивностью и связностью. Если есть две вершины, то можно в каждой выбрать по ребру. Если через любые две есть цикл, то нет точек сочленения: пусть есть, удалили, получили компоненты, но раз нет пути $x \to y$, то не было цикла через x, y, упс. Теперь рёбра разбиты на блоки, можно построить двудольный $B(G)$ для блоков и точек сочленения (соседствует с разными блоками $\iff$ точно точка, доказать, отсюда сделать вывод «точки — границы блоков»), $B(G)$ ацикличен (нашли цикл через разные блоки). Листы — только блоки, «крайние блоки», не точки. Алгоритм Хопрофта-Тарьяна для поиска: обошли DFS-ом, посчитали для каждого поддерева, насколько рёбра прыгают вверх, не забыли про корень.

Если H — подграф G, то простой путь P — его ручка $\iff$ концы P лежат в H, а внутренние — нет. Разложение на ручки: P_0 (цикл), $P_1, P_2, \dots$ (ручки для объединения предыдущих). Разложим на ручки $\Rightarrow$ двусвязен, т.к. цикл двусвязен, добавление/подразбиение ребра её не нарушает. Если двусвязен, то можно на ручки: взять цикл, потом итерация: найти ребро не в разбиении, найти цикл через него и разбиение, получить ручку.

Рёберная двусвязность $\iff$ не должно быть мостов. Если вершнно двусвязен, то и рёберно двусвязен (не в обратную, «бабочка»). Замкнутая ручка — простой цикл, имеющий со старым графом лишь одну общую точку. Рёберно двусвязен $\iff$ можно разложить на цикл, ручки, замкнутые ручки (без доказательства). Можно ещё вводить для орграфов, там будем смотреть на сильную связность.

2 Уитни-1: двусвязен $\iff$ есть два пути. Гёринг: минимальное отделяющее X от Y равно кол-ву путей. Менгер: то же самое для вершин. Уитни-2: k связен $\iff$ есть k путей.

Теорема Уитни: граф на $\geqslant 3$ вершинах двусвязен $\iff$ для между любой парой вершин есть два непересекающихся по внутренности пути (это же цикл). Определение: если $X, Y \subseteq V$, то путь между X и Y — любой простой, начинается в X, кончается в Y, по $X \cup Y$ в середине не идёт. Допускается путь из единственной вершины из $X \cap Y$. R отделяет X от Y (вершинно отделяющее мн-во), если любой путь из X в Y цепляет какой-то вершиной R (в т.ч. конечной). Например, $R = X$ подходит. Теорема Гёринга: кол-во вершин k в минимальном отделяющем X от Y равно макс. числу l попарно непересекающихся (в т.ч. по концам) путей из X в Y. Очевидно $l \leqslant k$ (так как путь проходит через R), покажем $k \leqslant l$. При $k = 0$ очевидно, при $k = 1$ очевидно т.к. есть путь. При $k \geqslant 2$ индукция по размеру графа ($n \geqslant 2$), база $\overline{K_2}$ очевидна (т.к. тогда $|X| = |Y| = 2$). Если есть $z \in X \cap Y$, то удалили, индукция, добавили тривиальный путь $\{z\}$.

Если $X \cap Y = \emptyset$, то взяли ребро e на пути между ними ($k \geqslant 1$), его начало $\notin Y$, конец $\notin X$. Удалили e (вершины оставили), если k не изменилось, то успех. Если изменилось, то хотим найти какое-нибудь отделяющее R, причём не хотим $R \supseteq X, Y$. Для этого возьмём отделяющее в графе $G - e$, назовём R'. $R' \cup \{e\}$ отделяющее в G, значит, $R_x = R' \cup \{x\}$ и R_y тоже отделяющие. Одно из них не содержит целиком либо X, либо Y, назовём его R. Тогда если R не содержит целиком X, удалим $\bar{X} = R \setminus X$, воспользуемся индукцией для R и X, найдём k непересекающихся путей из X в R. Аналогично для Y. Потом состыкуем (осторожно с пересечениями).

Теорема Менгера: количество $\kappa(x, y)$ вершин в минимальном отделяющем несмежные вершины x и y (нельзя брать x и y в мн-во) равно макс. числу попарно непересекающихся простых путей из x в y. Док-во: X — соседи x, Y — соседи y, тогда разделяет $x/y \iff$ разделяет X и Y, т.к. путь $X \to Y$ есть обрезанный путь $x \to y$, тогда нашли $\kappa(x, y)$ путей по Гёрингу.

Теорема Уитни: граф k-связен $\iff$ между любыми двумя вершинами есть k путей без общих внутренних вершин. $\Leftarrow$: вершин $\geqslant k+1$, удалить мало вершин для потери связности нельзя, упс. $\Rightarrow$: сначала применили Менгера, теперь x и y соединены ребром e. Тогда если в $G - e$ путей между x и y хотя бы $k-1$, то успех. Иначе их не более $k-2$, тогда можно найти разделяющее мн-во R размером $k-2$ (оно не разделяющее в G, иначе упс). Тогда оно отделяет некую z либо от x, либо от y, но тогда можно добавить в R либо y, либо x, и получим разделяющее в G размера $k-1$, упс.

3 Бержи — максимум, если нет дополняющих.

Паросочетание — мн-во рёбер без общих концов, тогда интересны только простые графы. Вершина может быть (не) покрыта парсочем. Парсоч совершенен, если всех покрывает. Максимален, если больше всех по размеру, количество рёбер в нём — $\alpha'(G)$. Наибольшее по включению можно строить жадно, может не дать $\alpha'(G)$. Если есть парсоч M, то можно определить M-чередующийся путь (рёбра то в M, то не в M). Если оба конца M-чередующегося не покрыты, то он M-дополняющий. По такому пути можно инвертировать рёбра, увеличить размер (matching augmentation).

Теорема Бержа: M максимально $\iff$ нет M-дополняющих путей. $\Rightarrow$ уже проверили. $\Leftarrow$: взяли максимальное M', рассмотрели $M \triangle M'$, в нём степени не более двух, т.е. там чётные циклы и пути. Но $|M'| > |M|$, значит, есть путь правильной нечётности, он M-дополняющий.

Кун в двудольном (за куб от числа вершин): взяли непокрытую вершину, dfs, нашли M-дополняющий путь, пока не надоется. **TODO**

Эдмондс в произвольном: **TODO** .

4 α — независимое, β — покрывающее, со штрихом — из рёбер, ω — клики. Связь: $\alpha + \beta = n$. Если нет изолированных, то Галлаи: $\alpha' + \beta' = n$. Ещё $\alpha' \leqslant \beta$, а в двудольных по Кёнигу-Эгервари $\alpha' = \beta$.

Паросочетание — это рёберно независимое множество. Можно ввести вершинно независимое множество — S из вершин, никакие две не смежны. Бывает максимальное, его размер — число независимости графа $\alpha(G)$ (без штриха). Можно жадно набрать наибольшее по включению, поиск максимального NP-труден, проверка существования размера $\geqslant k$ NP-сложна. В дополнении G независимое перейдёт в клику (кликовое число $\omega(G)$ — размер макс. клики), $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$.

Вершинное покрытие покрывает все рёбра, минимальное имеет размер $\beta(G)$. Теорема: S независимо $\iff$ $V \setminus S$ вершинное покрытие. Следствие: $\alpha(G) + \beta(G) = n$ (два неравенства: воспользовались максимальностью α и минимальностью β).

Рёберное покрытие покрывает все вершины (есть только если $\delta > 0$, нет изолированных). Размер минимального равен $\beta'(G)$. Лемма: минимальное рёберное покрытие L есть объединение звёзд (дерево у которого все вершины, кроме одной — листы). Док-во: циклов в L точно нет (можно удалить), а если есть ребро, у которого каждый конец степени $\geqslant 2$, то ребро можно удалить. Повторяем, в конце получаем звезду (от противного будет путь из трёх рёбер, упс). Дополнение независимого рёберного не есть покрытие, но теорема Галлаи: если в графе $\delta > 0$, то $\alpha' + \beta' = n$ (sic, число вершин, не рёбер). Доказываем два неравенства. Берём макспарсоч M, он не покрыл $n - 2\alpha'$ вершин (мн-во U). U независимо, можно выбрать по ребру из вершины, покрыть вершины $n - \alpha'$ рёбрами, т.о. показали $n - \alpha' \geqslant \beta' \iff n \geqslant \alpha' + \beta'$. Обратное: берём минимальное покрытие L, каждая компонента L — звезда из хотя бы двух вершин. Не-центров звёзд столько, сколько рёбер, т.е. β', а центров (и звёзд) — $n - \beta'$. Найдём в L макспарсоч M, он размера ровно $n - \beta'$ (в каждой компоненте можно выбрать ровно одно ребро). Т.о. $\alpha' \geqslant n - \beta' \iff \alpha' + \beta' \geqslant n$, что и требовалось.

Очевидно, что $\alpha' \leqslant \beta$: на каждое ребро парсоча нужна хотя бы одна вершина, так можно доказывать максимальность α' (но не получится в C_5). В двудольном графе по Кёнигу-Эгервари $\alpha' = \beta$. Добавляем исток/сток, тогда S их разделяет $\iff$ покрывает все рёбра исходного (т.к. сток/исток нельзя брать в S). А мн-во непересекающихся путей между x и y образует парсоч в исходном графе. Но по Менгеру это равно минимальному размеру S, что и требовалось. Переформулировка теоремы в матричном виде — представили A как матрицу $n \times m$ смежности двудольного графа на $n + m$ вершинах,

5 Теорема Татта: в произвольном G есть совершенный парсоч $\iff$ для любого $S \subseteq V$ количество нечётных компонент в $G - S$ ($c_{\text{odd}}(G - S)$) не больше $|S|$. Необходимость очевидна (посмотрели на рёбра парсоча, выходящие из компонент $G - S$). Достаточность: у нас граф точно на чётном числе вершин и не равен K_n (иначе неинтересно). Если совершенного нет, то берём несмежные вершины, соединяем, если оно всё ещё не появится, так насытим граф. Условие при этом не нарушится. Найдём в насыщенном G мн-во U вершин степени $n - 1$, в лемме покажем, что $G - U$ есть объединение несвязных полных графов. Тогда в чётных компонентах можно найти парсоч, в нечётных — почти парсоч, лишние вершины подцепить к U, а остаток из U между собой (U же со всем подряд связно). Нашли совершенный парсоч, противоречие с насыщенностью, упс.

Лемма, от противного: пусть есть левая компонента, тогда в ней $\geqslant 3$ вершин (иначе она K_n), найдём индуцированный путь $a \to b \to c$, найдём несмежную с b вообще во всём графе ($b \notin U$), она — $d \notin U$. Значит, добавление и $e_1 = \{a, c\}$, и $e_2 = \{b, d\}$ создаёт совершенные парсочи (по насыщенности), рассмотрели их симм. разность, это циклы. Если e_1 и e_2 на разных циклах, то циклы можно инвертировать, получить парсоч в исходном, упс. Если на одном, то в нём есть хорды $b \to a, c$, можно отрезать одной из них кусок цикла и инвертировать кусок с хордой, упс.

6 Лемма: для любого S верно: $c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \equiv n \mod 2$. Док-во: убрали чётные компоненты, $c_{\text{odd}}(G - S) + |S| \equiv n$, заменили знак (mod2), успех. Теорема Петерсена: связный кубический (3-регулярный) граф G с не более чем двумя мостами имеет совершенный парсоч. Док-во от противного по Татту: если не имеет, то есть S, причём из Татта $c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \geqslant 1$. Т.к. n чётно, то справа на самом деле двойка. Рассмотрим нечётную компоненту графа $G - S$, тогда из неё торчит нечётно рёбер (сумма степеней). Если $m_i = 1$, то имеем мост $\Rightarrow$ не более двух таких m_i (по условию теоремы). Суммируем m_i по нечётным компонентам, получаем $\geqslant 3(c_{\text{odd}}(G - S) - 2) + 2$, используем оценку на c_{odd}, получаем $\geqslant 3|S| + 2$, что-то много рёбер входит в S, упс. Контрпример с тремя мостами: три почти-K_5 (домики), соединены крышами с вершиной.

Без док-ва теорема Плесника (без док-ва): если G k-регулярен и $(k-1)$-рёберносвязен с чётным числом вершин, то можно удалить любое $k-1$ ребро и всё равно найти совершенный парсоч. Матрица Татта: квадратная $n \times n$, на диагонали нули, над ней — x_{ij} (ноль, если ребра нет, не-ноль иначе), под ней — с другими знаками (антисимметрично). Можно рассмотреть определитель, для нечётных n он ноль (так как должен поменять знак для минус матрицы). А для чётных он равен P^2, где P — полином, пфаффиан матрицы (тут и далее — без доказательств). Определение: рассмотрели все разбиения n на пары, отсортировали их как можно разумнее, сконкатенировали, получили перестановку из S_n (у которой первый элемент всегда единица). Пфаффиан — сумма произведений соответствующих $t_{x_i,x_{i+1}}$ со знаком перестановки. Тогда это какая-то сумма по паросочетаниям. Можно так проверять наличие совершенного: подставили случайные t_{ij}, посчитали пфаффиан (или определитель), порадовались с хорошей вероятностью. А ещё некоторые графы пфаффовы — допускают такую ориентацию, что если поменять знаки в матрице Татта, то в пфаффиане все слагаемые с одним знаком, так можно считать число паросочетаний. Планарные, внезапно, пфаффовы.

7 Дефицит графа — $\operatorname{def}(G) = n - 2\alpha'(G)$ (сколько вершин не покрыли максимальным). Теорема Бержа: $n - 2\alpha'(G) = c_{\text{odd}}(G-S) - |S|$ (превращается в Татта для совершенного парсоча), так можно показывать максимальность паросочетания. Сначала покажем, что для любого S: $n - 2\alpha' \geqslant m := c_{\text{odd}}(G-S) - |S| \iff 2\alpha' \leqslant n - m$. Это просто: рассмотрим макспарсоч, он не покрыл x нечётных компонент, тогда из оставшихся рёбра пошли в S. Второе нер-во: добавим к графу m вершин, соединим их со всеми вообще, проверим условие Татта для нового графа, оно есть: отдельно пустое S (была лемма про чётность $c_{\text{odd}}(G-S) - |S|$, значит, $m \equiv n$), отдельно не удаляющее все новые (останется одна компонента), отдельно удаляющее все новые (удалили-то хотя бы $m \Rightarrow$ разность $\leqslant 0$). Найдём в нём макспарсоч (размера $(n+m)/2$), выкинем добавленные вершины, осталось хотя бы $(n-m)/2$ рёбер (это парсоч в исходном), отсюда $2\alpha' \geqslant n - m$.

8 Жадник: красит в $\Delta + 1$ цвет по порядку, Брукс — можно даже в Δ (если не полный и не нечётный цикл).

Раскраска графа (по умолчанию — вершин) правильная, если смежные покрашены в разное. Граф бывает k-раскрашиваем, минимальное k — его хроматическое число $\chi(G)$. Тут смотрим только на простые графы (если петля — сразу нельзя покрасить, если мультиребро — можно убрать), еще можно смотреть отдельно на компоненты. Случай $\chi(G) = 1$ — пустой граф, $\chi(G) = 2$ — двудольный (без нечётных циклов). Классическая задача: расписание экзаменов, два экзамена нельзя в один день, если есть пересечение по студентам. Ещё одна: какие-то химикаты нельзя хранить в одной комнате. Проверка на 3,4-раскрашиваемость (и выше) NP-полна, а поиск χ — и подавно.

Жадный алгоритм: взяли порядок вершин, красим слева направо в минимальный цвет. Покрасит в не более $\Delta + 1$ цвет. Значит, $\chi \leqslant \Delta + 1$ и в любом k-хроматическом есть вершина степени хотя бы $k - 1$. В двудольных графах вообще не достигается, а вот для K_n и C_{2k+1} достигается. Теорема Брукса: если простой связный граф не полон и не нечётный цикл, то $\chi \leqslant \Delta$. Случаи $\Delta \leqslant 2$ разобрали отдельно (K_1, K_2, циклы). Если граф не регулярен, то найдём вершину степени $< \Delta$, запустим из неё dfs, в таком порядке запустим жадник (у каждой покрашены только дети, а для всех, кроме корня, есть ещё родитель, успех). Если регулярен, но есть точка сочленения: по ней пилим граф на блоки, каждый красим, потом перекрашиваем, чтобы цвет точки сошёлся. Если нет точек, то двусвязен. Ниже покажем, что тогда есть x, смежные с ней (но не между собой) y и z, причём $G - y - z$ связен (чтобы по-прежнему был один корень дерева). Тогда расположим их в начале списка (покрасятся в один цвет), а остальные — dfs'ом из x. Все, кроме x, жадно покрасятся в $\leqslant \Delta$, а x — тоже, так как два соседа имеют один цвет.

Лемма: в вершинно двусвязном регулярном ($\Delta \geqslant 3$) есть индуцированный путь $y \to x \to z$, причём $G - y - z$ связен. Выберем любую вершину w. Если точек сочленения в $G - w$ нет, то найдём в G вершину на расстоянии 2 от w (если нет, то G был полон), нашли нужную тройку. А если есть, то посмотрим на крайние блоки B_1 и B_2 (листья в дереве блоков), в каждом ровно одна точка сочленения: v_1 и v_2 (не упростить до одной общей точки сочленения $v_1 = v_2$, т.к. бывает бамбук из блоков). Найдём в $B_1 - v_1$ и в $B_2 - v_2$ смежные с w (есть, т.к. исходный двусвязен, удалить можно любую вершину; а блоки крайние — фиг из них куда-то выйдем). Они несмежны, т.к. иначе блоки схлопнутся. При этом $G - v_1 - v_2$ связен, т.к. степень w хотя бы 3, блоки были двусвязные, значит, можно из каждого безопасно удалить по вершине, а w потом подцепить.

Граф k-критический, если $\chi = k$ и любой собственный подграф можно раскрасить в $k - 1$. В любом графе есть $\chi(G)$-критический подграф (удаляем рёбра/вершины пока не надоест). Критический связен, т.к. можно удалить менее сложную компоненту. В критическом нет вершинно разделяющего S, являющееся кликой. От противного: пусть есть, тогда $G - S$ развалился на компоненты, можно к каждой добавить S (это т.н. S-компоненты), покрасить в $k - 1$ цвет (по критичности). Т.к. S клика, то все её вершины в разные цвета в разных компонентах, можно перенумеровать цвета и согласовать, упс. Следствие: точек сочленения нет, иначе есть $S = K_1$. Следствие: критический двусвязен.

Теорема Дирака: если в k-критическом есть вершинно разделяющее мн-во $\{x, y\}$, то G есть объединение двух S-компонент, у одной x и y всегда разных цветов, у другой — всегда одного. Следует из того, что у хотя бы одной S-компоненты не должно быть раскраски, при которой все вершины S разного цвета (иначе сможем все компоненты перекрасить и согласовать). Аналогично, хотя бы у одной не должно быть раскраски, при которой все вершины S одного цвета.

9 Мицельский — плохо красящийся граф без треугольников. Туран: если рёбер больше, чем в полном k-дольном, то есть большая клика.

Клику надо красить в разные цвета, поэтому $\omega(G) \leqslant \chi(G)$. Но есть конструктивный Мицельский: для любого k можно построить граф без треугольников с $\chi = k$. Начинаем с чего угодно (проще с K_2), потом делаем для увеличения k так: для каждой x_i создали y_i, соединили новую со всеми соседями x_i, а потом создали z и подцепили ко всем y_i. Док-во по индукции: треугольников нет (y_i несмежны, и соседи x_i/y_i тоже несмежны), окрасить в $k+1$ можно (y_i —

так же, как и x_i, а z в новый), а вот в k нельзя (окрасим z в цвет k, все y_i покрасились в цвета до $k-1$; если все x_i окрашены в $k-1$ цвет — успех; если нет — перекрасим плохие x_i в цвет соотв. y_i, успех). Теорема Эрдёша (без док-ва): для любого k есть k-хроматический с обхватом $\geqslant k$ (обхват — минимальная длина цикла). Это более круто, чем Мицельский, конструктивного док-ва у Эрдёша не было, потом сделали.

Граф k-долен, если можно разбить вершины на доли (покрасить в k цветов). Бывает полный k-дольный граф, его дополнение — k клик. Макс. число рёбер в k-дольном графе (при фикс. числе вершин) достигается в полном графе, где все доли почти равны (разница не больше единицы, такое разбиение n единственно), это числе обозначим за $M(n,k)$, надо доказать (если есть разница больше единицы — передвинем вершину между долями). Считается так: число рёбер в полном графе минус число рёбер в дополнении (сколько-то клик одного размера, сколько-то клик другого размера), в формуле будет $n \bmod k$, проверить $M(3,2)=2$.

Туран: если в графе на $n=tk+r$ вершинах больше $M(n,k)$ рёбер, то есть клика размера $k+1$ ($\Rightarrow \chi > k$). Возьмём граф G на n вершинах без больших клик с макс. числом рёбер. Покажем индукцией по t (ага, по частному при фикс. остатке), что в графе не более $M(n,k)$ рёбер. База тривиальна: у нас $n=r$, т.е. граф K_n. Переход: сейчас в G клики K_{k+1} нет, но при добавлении любого ребра появляется (т.к. число рёбер максимально). Значит, сейчас есть клика S размера k, в неё $\binom{k}{2}$ рёбер, а все остальные вершины смежны с не более чем $k-1$ вершиной из S (иначе нашли клику $k+1$). При этом в $G-S$ тоже нет клики размера $k+1$, т.е. в нём не более $M(n-k,k)$ рёбер, складываем число рёбер в клике, в $G-S$ и в разрезе $[S; G-S]$, получили в точности $M(n,k)$.

10 Граф совершенен, если для любого индуцированного подграфа $\omega=\chi$ (индуцированный, чтобы не смотреть на случай «хитрый граф + независимая клика»). Слабая гипотежа Бержа: G совершенен $\iff$ $\bar{G}$ совершенен (иногда удобнее доказывать совершенность для дополнения). Сильная гипотеза Бержа (без док-ва): G совершенен $\iff$ ни G, ни $\bar{G}$ не имеют индуцированного нечётного цикла длины хотя бы пять.

Двойственность от кэпа (нужна в док-ве): $\alpha(G)=\omega(\bar{G})$, $\chi(G)=\vartheta(\bar{G})$ (минимальное число клик для покрытия, т.к. клика в $\bar{G}$ есть независимое мн-во в G). Если дополнение графа совершенно, то в нём $\chi(\bar{G})=\omega(\bar{G})$, отсюда по капитану $\alpha(G)=\vartheta(G)$. Если же сам граф совершенен, то в нём $\chi(G)=\omega(\bar{G})$, откуда по капитану $\alpha(\bar{G})=\vartheta(\bar{G})$. Т.е. слабая гипотеза — равносильность этих двух равенств (т.к. для подграфов можно по индукции). А, ещё в любом графе $\vartheta(G)\geqslant\alpha(G)$ (так как независимые вершины не могут лежать в одной клике) и $\chi(G)\geqslant\omega(G)$. Т.о. для слабой гипотезы достаточно по индукции показывать, что в совершенном G верно: $\chi(\bar{G})\leqslant\omega(\bar{G})$.

Операция расширения вершины на ребро: скопировали x в x', соседей оставили тех же, соединили $x\to x'$. Тогда если G был совершенен, то расширенный G' тоже совершенен. Док-во: индукция по числу вершин (база — K_1). Переход: любой собственный индуцированный подграф G' — либо подграф G, либо расширенный подграф G, т.е. по предположению всё ок. Осталось показать, что $\chi(G')\leqslant\omega(G')$. Если x лежала в максимальной клике, то мы эту клику увеличили на 1, увеличили $\omega(G')$, а x' можем покрасить в новый цвет. Пусть не лежал и был окрашен в цвет i. Знаем, что в каждой клике есть вершина цвета i (т.к. граф был совершенен). Пусть в цвета i окрашены вершины из мн-ва $S\cup\{x\}$. Тогда в графе $G-S$ все максимальные клики убились (он совершенен $\Rightarrow$ можно покрасить в $\omega-1$ цвет). Т.к. $S\cup\{x\}$ — вершинно независимое, то $S\cup\{x'\}$ тоже вершинно независимо. Значит, можно его вернуть в $G-S$ и покрасить в новый цвет $\omega-1+1$, успех.

Доказываем Бержа индукцией по числу вершин, надо показать, что в совершенном G верно $\chi(\bar{G})\leqslant\omega(\bar{G})$. Пусть $\mathcal{K}$ — мн-во всех клик, а $\mathcal{A}$ — мн-во всех максимальных независимых подмножеств. Если есть клика K, которая пересекается со всеми элементами $\mathcal{A}$, то можно удалить K, получим $\alpha(G)>\alpha(G-K)=\omega(\bar{G}-K)$, т.е. граф $\bar{G}-K$ можно покрасить в не более чем $\omega(\bar{G})-1$ цвет. А т.к. K было кликой в G, то в $\bar{G}$ оно независимое мн-во, можно докрасить в цвет $\omega(\bar{G})$, отсюда $\chi(\bar{G})\leqslant\omega(\bar{G})$.

Теперь от противного покажем, что такая клика есть: пусть для любой клики K_i есть максимальное независимое A_i такое, что $K_i\cap A_i=\emptyset$. Посчитаем для каждой вершины x количество A_i, её содержащих, обозначим $k(x)$ (A_i могут повторяться, никаких проблем). Тогда вершины с $k(x)>0$ индуцируют подграф H (непустой же), он тоже совершенен. Расширим в нём все вершины до клик размера $k(x)$ (останется $\alpha(H')=\alpha(H)$), он по лемме совершенен, т.е. $\omega(H')=\chi(H')$. В нём будет $\sum k(x)=\sum|A_i|=|\mathcal{A}|\alpha(G)$ вершин. Также знаем, что $\chi(H')\geqslant {}^{|V(H')|}/_{\alpha(H')}$ (т.к. вершины одного цвета — независимое мн-во), а $\alpha(H')=\alpha(H)\leqslant\alpha(G)$, т.о. $\chi(H')\geqslant|\mathcal{A}|\alpha(G)/\alpha(G)=|\mathcal{A}|$. Посчитаем $\omega(H')$ по-другому: клика в нём — это раздутая клика в $H\subseteq G$. Пусть это была клика K_r, тогда $\omega(H')=\sum_{x\in K_r}k(x)=\sum_i|K_r\cap A_i|$ (последний переход — расписали $k(x)$). Но клика с независимым множеством пересекается максимум по вершине и $K_i\cap A_i=\emptyset$, т.е. $\omega(H')\leqslant|\mathcal{A}|-1$. Упс: $\omega(H')<\chi(H')$, но H' был совершенен.

11 Кёниг: в двудольном $\chi'=\Delta$. Визинг: в любом графе $\Delta\leqslant\chi'\leqslant\Delta+1$.

Тут уже графы без петель, но с мультирёбрами. Рёберное хроматическое число $\chi'(G)$ — минимальное кол-во цветов, в которые можно покрасить рёбра, никакие две смежных не покрашены в один цвет. Задача: провести турнир «каждый с каждым» в минимальное число дней. Рёбра одного цвета — парсоч, поэтому $\alpha'(G)\chi'(G)\geqslant|E(G)|$. Также рёбра из одной вершины разных цветов, поэтому $\chi'\geqslant\Delta$. Кёниг: в двудольном графе $\chi'=\Delta$. Достроим до Δ-регулярного: сначала добавим вершин в долю, потом берём вершину степени $<\Delta$, обязательно найдём ей пару в другой доле, соединим, повторить. А в Δ-регулярном есть парсоч (по Холлу), его можно покрасить и перейти к $\Delta-1$.

Теорема Визинга: в простом графе $\Delta\leqslant\chi'\leqslant\Delta+1$. Док-во от противного: нашли в G подграф H с максимальным числом рёбер, который можно окрасить в $\Delta+1$ цвет. В каждой вершине есть хотя бы один отсутствуюий цвет, т.к. цветов строго больше степени. Взяли ребро $x\to y_1$ не из H. Пусть в x отсутствует c. Если он отсутствует в y_1, то покрасили ребро, упс. Пусть в y_1 отсутствует c_1. Если его нет и в x, то покрасили ребро, упс. Значит, c_1 есть в x, и это ребро ведёт в y_2. Если в y_2 отсутствует c, то покрасили сдвигом, упс. Пусть в y_2 отсутствует c_2, если его нет и в

x, то упс (перекрасили сдвигом), и так далее.

Неуспех, если в какой-то момент зациклились после вершины y_k: $c_j = c_k$, при этом все c_i встречаются в x, и во всех y_i встречается c. Тогда сдвинем цвета: покрасим $x \to y_1, \dots, y_j$ сдвигом, уберём цвет у ребра $x \to y_{j+1}$. Теперь построим граф S, оставив только рёбра цветов c и c_j. В S компоненты связности — чётные циклы и пути. Также в S степень x не больше единицы (т.к. в ней нет c), степень y_k не больше единицы (т.к. в ней нет $c_k = c_j$), степень y_{j+1} не больше единицы (т.к. раньше в неё вело ребро c_j). Значит, они втроем не могут быть в одной компоненте.

Если x и y_{j+1} в разных компонентах, то поменяем цвета в компоненте с y_{j+1}, покрасим ребро $x \to y_{j+1}$ в цвет c. А если они лежат в одной, то поменяем цвета в компоненте y_k, сдвинем цвета рёбер, покрасим $x \to y_k$ в цвет c.

Можно обобщить до мультирёбер (без док-ва): в произвольном графе $\chi' \leqslant \Delta + \mu$ (где μ — максимальное по $\mu(x, y)$ — кол-во параллельных рёбер между вершинами). Следствие — $\chi' \leqslant 3/2 \cdot \Delta$ (без док-ва).

12 Хроматический многочлен $P_G(z)$ — функция, причём для целого $k \geqslant 0$ значение $P_G(k)$ есть кол-во способов покрасить G в k цветов. Для K_n — убывающая степень, для пустого — z^n, для дерева — $z(z-1)^{n-1}$. Лемма: $P_{G-e}(z) = P_G(z) + P_{G \setminus e}(z)$, т.к. вершины-концы e либо разного цвета, либо одного. Теорема: для любого графа G на n вершинах $P_G(z)$ — это полином степени n из $\mathbb{Z}[z]$, причём коэфф. при z^n всегда единица, а остальные — ненули с чередующимся знаком. Индукция по числу вершин/рёбер (лексикографически), для $\bar{K}_n$ всё верно. Переход: лемма, написали общий вид через $a_i \in \mathbb{Z}_+$, сложили, проверили знаки.

Следствие доказательства: коэффициент при z^{n-1} равен $-E(G)$. По правилу произведения можем перемножать хроматические полиномы для компонент связности. Теорема: ноль является корнем хроматического полинома кратности ровно k, где k — число компонент связности. Достаточно показать, что для любого связного графа это корень кратности ровно один. Без док-ва.

Вершина симплициарна, если её соседи образуют клику. Нумерация в порядке исключения $x_n, \dots, x_1$, если x_i симплициарна для подграфа из всех оставшихся. Если граф допускает такую нумерацию, то можно красить вершины в порядке $x_1, \dots, x_n$, у каждой покрашенные соседи образуют клику, поэтому остаётся $z - \tilde{d}_i$ цветов, получаем полином как произведение линейных. Теорема Дирака: граф допускает нумерацию $\iff$ он хордален (отсутствуют индуцированные циклы длины больше трёх). $\Rightarrow$ очевидно, так как мы в какой-то момент удалим вершину цикла, её соседи в клике, получили хорду, упс. $\Leftarrow$: подграф хордального хордален, поэтому достаточно показать, что в хордальном есть симплициарная. Верно даже более сильное: для любой x среди всех y_i, находящихся на макс. расстоянии от x, найдётся симплициарная. Индукция по числу вершин, база $n = 1$ очевидна.

Переход: если x смежна со всеми остальными, то они от неё на расстоянии 1, можно найти симплициарную в $G - x$, в G она тоже симплициарна (x ничего не испортит), успех. Если же это не так, то рассмотрим мн-во T вершин, максимально удалённых от x, возьмём одну из компонент связности подграфа T, назовём H. А смежные с ними вершины не из T назовём S (предыдущий слой). Покажем, что S — клика, взяв любые две вершины u и v оттуда, найдя кратчайший путь между ними в графе $G - T - S$ (такой есть, так как можно просто спуститься до x), он длины хотя бы два. Потом добавляем к нему кратчайший путь между u и v через T, получили цикл длины $\geqslant 4$. Хорд в каждой половине цикла нет, между половинами тоже быть не может (далёкие слои bfs'а), значит, только между u и v. Теперь смотрим только на подграф $S \cup H =: G'$, берём $u \in S$, по индукции ищём дальнейшую от неё симплициарную y. Если G' не клика, то $y \in H$ и тогда y симплициарна в G. А если G' клика, то берём любую $y \in H$, она тоже симплициарна в G.

Также известно, что хордальные графы совершенны (без док-ва).

13 Граф планарен, если можно нарисовать на плоскости с кривыми рёбрами так, чтобы пересекались только в вершинах. Изображение — плоский граф $\tilde{G}$, способ изображения — правильное вложение. Лемма Жордана: если есть простая замкнутая кривая и есть кривая, которая начинается снаружи и кончается внутри, то есть пересечение. K_5 непланарен и имеет минимальное число вершин среди непланарных. От противного: пусть планарен, смотрим на цикл из четырёх вершин, потом выбираем грань для пятой, упс. Трюк: если пошли в какую-то грань, а целевая вершина лежит снаружи грани, то упс по Жордану. Ещё непланарен $K_{3,3}$ (минимальное число вершин среди непланарных).

Планарный граф максимальный, если при добавлении любого ребра планарность теряет. Число пересечений графа — минимальное количество пересечений отрезков ($\mathrm{cr}(G)$, никакие три в одной точке не могут), это штука очень сложная, внезапно равна минимальному кол-ву рёбер, которые надо удалить, чтобы сделать граф планарным. У планарных $\mathrm{cr} = 0$ по определению. Грань — односвязная область, ограниченная вершинами/рёбрами. Бывают внутренние и одна внешняя. Можно вкладывать на поверхность сферы. Теорема: планарен $\iff$ вкладывается на сферху (поставили сферу, спроецировали из полюса). Ещё можем через сферу сделать любую грань внешней.

Любая грань ограничена набором вершин и рёбер (не обязательно связным), образующих границу ∂f (они инцидентны границе). Две грани инцидентны, если имеют общее ребро. У грани есть степень — число рёбер, но ребро-мост (в смысле, у которого с двух сторон одна грань) учитывается дважды. Тогда сумма степеней граней равна $2E$. Принимаем на веру: каждое ребро либо разделяет, либо мост; у дерева одна грань; границы граней различны за исключением случая простого цикла. Граница грани — это объединение нескольких замкнутых маршрутов (в связном — один), необязательно простых (могут мешать мосты). Но в двусвязном любая граница — простой цикл, док-во: разбили на ручки, индукция по числу ручек, каждая ручка разбивает грань пополам. Следствие: в трёхсвязном плоско графе любые два соседа любой вершины x лежат на общем цикле (что верно, в общем, для любых даже двусвязных), т.к. можно удалить x и посмотреть на грань, в которой она лежала, все соседи лежат на границе этой грани, а граница — цикл.

Двойственный граф $\tilde{G}^*$ к нарисованному графу $\tilde{G}$: помещаем в грань вершину, потом соединяем смежные грани (ребро-мост переходит в петлю и обратно). Двойственный к k-регулярному (k-валентному) называется k-ангуляцией, у него степень любой грани — k (т.к. вершины переходят в грани). Теорема: двойственный связен, т.к. плоскость связна. Теорема: если $\tilde{G}$ связен, то $\tilde{G}^{**}$ ему изоморфен. Теорема: набор рёбер в $\tilde{G}$ образует цикл $\iff$ соответствующий набор рёбер в $\tilde{G}^*$ образует минимальный рёберный разрез.

Граф G^* абстрактно двойственен к произвольному G, если есть биекция между рёбрами, причём если рёбра в G образуют цикл, то соотв. рёбра в G^* образуют минимальный рёберный разрез. Без док-ва: планарен $\iff$ есть абстрактно двойственный.

Графы можно вкладывать в плоскость по-разному топологически (см. степени граней). Строго односвязные графы могут вкладываться разными способами — вращаем блоки. Двусвязные, увы. тоже — рисуем конвертик с крышей (6 вершин, 10 рёбер), можно центр оставить внутри (триангуляция), а можно вынести наружу. А вот трёхсвязного — единственно (докажем дальше).

14 Формула Эйлера: для связного плоского графа $B - P + \Gamma = 2$, индукция по числу граней от единицы (для дерева). Отсюда все вложения графа имеют одинаковое число граней. Утверждение: если в графе n вершин, то не более $3n-6$ рёбер, причём равенство только для триангуляции (где степени граней — 3). Док-во: рассматриваем только связные графы (в несвязных можно добавлять рёбра), степень любой грани $\geqslant 3$, сумма степеней равна сумме степеней рёбер, получаем $\Gamma \leqslant {}^2/_3 P$, пихаем в формулу Эйлера. А равенство только если все грани степени 3. Следствие: максимальный граф — триангуляция, если это не так, можем распилить грань большей степени на две (**TODO** а рёбра-мосты?). Следствие: в простом плоском графе есть вершина степени не более пять. По Эйлеру непланарен K_5 (рёбер много) и $K_{3,3}$ (все циклы длины $\geqslant 4$, степень каждой грани тогда $\geqslant 4$, сумма степеней равна 18, граней $\leqslant 4$, упс).

Теорема Фэри: простой планарный можно вложить, причём рёбра будут отрезками прямых. А точнее — можно любую укладку «распрямить», не меняя циклический порядок смежных вершин. Индукция по n (база — K_4 и его подграфы). Переход: считаем, что граф — максимальный планарный. У него все грани (в том числе внешняя) имеют степень три, и есть хотя бы четыре вершины степени $\leqslant 5$ (почему **TODO**). Возьмём ту, которая не во внешней грани, удалим, остаток уложим, добавим вершину обратно в грань (в пятиугольнике всегда есть точка, из которой видны все вершины, строгого док-ва нет, только случаи по числу вершин с сильно развёрнутыми углами).

Толщина графа — минимальное количество планарных подграфов, на которое можно его разбить. Толщина — это минимальное число слоёв печатной платы. Теорема: толщина не меньше $\frac{m}{3n-6}$, так как в каждом графе не более $3n-6$ рёбер. Например, можно показать для K_n оценку в $\lfloor\frac{n+7}{6}\rfloor$, она даже оказывается точной при $n \neq 9, 10$ (а для 9 и 10 ответ — три).

15 Проверям на планарность отдельно все компоненты. Теорема: граф планарен $\iff$ все блоки планарны. $\Rightarrow$ очевидно (т.к. подграф). $\Leftarrow$: индукция по числу блоков в графе, база очевидна, для перехода берём крайний блок, рисуем остаток, переносим точку сочленения на внешнюю грань, вкладываем оставшийся блок. Определение подразбиения ребра — это мы заменили ребро на два (с созданием вершины). Подразбиение графа — последовательно подразбили какие-то рёбра (возможно, ноль). Утверждение: граф планарен $\iff$ любое подразбиение планарно.

Томассен: если в трёхсвязном графе $\geqslant 5$ вершин, то есть ребро, стянув которое, граф всё ещё трёхсвязен. Док-во от противного: для каждого ребра найдётся вершина z такая, что $\{x, y, z\}$ разделяющее. Тогда выберем e и вершину z так, чтобы одна из компонент остатка (F) была максимальна по размеру. Обозначим $H = F \cup \{x, y\}$, это двусвязный подграф. А теперь берём ребро из z в компоненту не-F (такое есть, иначе можно z подцепить к F). Если убить его и ещё одну произвольную вершину, то H останется связен, но в нём больше вершин, чем в F, упс.

Почти Татт: лемма о выпуклом вложении трёхсвязного графа без подграфов Куратовского: индукция по числу вершин, база $n \leqslant 5$ руками. Переход: нашли по Томассену ребро, стянули в z, остаток вложили по индукции, все соседи z лежат на общем цикле-границе грани. Тогда на нём лежат все соседи исходных вершин. Противоречия бывают двух видов: либо у них три общих соседа (тогда есть K_5), либо соседи пересекаются нетривиально в цикле (тогда есть $K_{3,3}$). Значит, противоречий нет, можно разместить одну вершину на месте z, а другую — в малой окрестности (в зависимости от угла). Отсюда Татт: если трёхсвязный планарен, то выпукло вкладывается. А вот двусвязный $K_{2,n}$ выпукло нельзя (без док-ва).

Покажем, что любой минимальный непланарный, в котором нет подграфов Куратовского, трёхсвязен, получим, что таких не бывает и будет теорема Куратовского: граф не планарен $\iff$ он содержит подграф, являющийся подразбиением K_5 или $K_{3,3}$ (тут $\Leftarrow$ очевидно). Пусть есть такой минимальный непланарный G, он как минимум двухсвязен (иначе вложили блоки матрёшкой). Если не трёхсвязен, то есть разделяющее из двух вершин, при удалении получили компоненты связности. Добавим в каждую ребро $\{x, y\}$. Если все получились планарными, то граф нарисуем, значит, хотя бы одна непланарна. А раз одна непланарна, то в ней есть Куратовский. Но он мог там появиться только если мы добавили ребро $\{x, y\}$, которого не было, а тогда это ребро можно собрать подразбиением из другой компоненты.

Теорема Вагнера: граф планарен $\iff$ у него нет миноров K_5 или $K_{3,3}$ (минор — уалаяем вершины и стягиваем рёбра).